现代物理基础丛书 38

电磁波理论

葛德彪　魏　兵　著



《现代物理基础丛书》编委会

现代物理基础丛书　38

电 磁 波 理 论

葛德彪　魏　兵　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书讲述电磁波理论的基本原理. 全书共 9 章. 第 1 章为基本方程, 第 2、3 章为平面波, 讨论均匀介质中的平面波传播、半空间和分层介质的反射和折射以及各向异性介质中本征波的特性. 第 4 章分析波导和谐振腔, 讨论平行平板、平面介质波导和金属波导管以及介质圆波导中的导行波, 并介绍用微扰法处理波导与腔体中波的衰减以及腔壁和介质对谐振频率的影响. 第 5 章简单讨论传输线上波的特性. 第 6~8 章分别讨论辐射、衍射和散射. 辐射问题包括基本电偶极子和磁偶极子、线天线和电偶极子阵列特性, 并采用互易定理计算半空间界面上的电偶极子辐射. 在 Huygens 原理基础上分析 Fresnel 和 Fraunhofer 衍射, 并讨论平面互补结构的衍射特性. 散射问题给出球和无限长导体圆柱级数解的推导以及远区散射截面公式, 介绍用 Floquet 定理处理周期性表面散射. 第 9 章给出高频近似中的两种重要方法——几何光学近似和物理光学近似, 用于分析反射面和介质透镜准直特性以及理想导体目标的后向与双站散射.本书给出一些公式编程计算和结果图形显示, 并附有相应的 MATLAB 程序代码, 以便读者更好理解和进一步研究.

本书可作为无线电物理、光学、等离子体物理、电子科学技术和电子信息专业研究生课程教材, 也可作为高年级本科生、高等学校教师和相关专业研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

电磁波理论/葛德彪, 魏兵著. —北京: 科学出版社, 2011
(现代物理基础丛书; 38)
ISBN 978-7-03-032006-3

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①葛… ②魏… Ⅲ. ①电磁波 Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 160443 号

责任编辑: 张 静 钱 俊 / 责任校对: 林青梅
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2011 年 8 月第一次印刷 印张: 31 3/4 插页: 2
印数: 1—2 000 字数: 615 000

定价: 98.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

自 Maxwell 方程提出 100 多年以来, 电磁学的理论和应用发展迅速, 目前已经广泛应用于现代科学技术和日常生活的许多领域. 本书讨论电磁波理论, 不涉及静态和准静态场、电介质、带电粒子等电磁学和电动力学的其他内容. 对于电磁波的研究包括理论分析、数值模拟和实验等途径. 本书从 Maxwell 方程出发分析电磁波在传播、导行、辐射、衍射和散射等方面的特性, 所获得的公式和基本概念是数值模拟和实验研究以及应用的必要基础. 电磁波的研究可分为时谐场和瞬态场两种情形, 本书限于讨论时谐场情形, 时谐因子采用 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$.

全书共 9 章. 围绕基本方程的讨论在第 1 章. 第 2、3 章为平面波, 包括分层介质和各向异性介质情形. 第 4、5 章分析波导、谐振腔和传输线上的电磁波. 第 6~8 章分别讨论辐射、衍射和散射问题. 第 9 章简述高频技术中的几何光学和物理光学近似方法及其应用. 实际上, 许多电磁波的重要概念是从 Maxwell 方程出发结合基本物理模型分析演绎的结果. 本书力求公式推导过程清楚, 演绎的物理概念清晰. 为了叙述思路连贯, 有些公式先给出结果, 然后再单独列出其推导或论证过程. 例如, 线天线辐射功率公式和 Huygens 原理数学表述等均给出详尽数学推导. 此外, 为了明确所得公式的物理意义和应用, 还给出一些公式编程计算和结果图形显示, 并附有相应 MATLAB 程序代码.

本书是在多年研究生教学和科研工作基础上根据原有讲义修订、改写而成. 读者需要具备电磁场或电动力学以及矢量分析和场论的基本知识. 电磁波理论中有较多数学推导和结果公式, 阅读中应明了推演过程, 注重物理分析, 并适当参阅有关参考文献.

本书从讲义到书稿的形成过程中, 得到许多同事的鼓励以及研究生的讨论与帮助. 本书的准备和出版得到西安电子科技大学研究生教材建设基金支持, 在此谨致谢意. 本书出版过程中, 科学出版社的编辑做了大量细致的编辑加工, 在此一并表示感谢. 最后, 我们将十分欢迎和感谢专家和读者提出意见与建议. 电子信箱：dbge@xidian.edu.cn, bwei@xidian.edu.cn.

葛德彪　魏　兵

2011 年 3 月于西安电子科技大学

目　　录

符 号 示 例

时谐因子

$$\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

矢量

$$\oint\limits_{L} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint\limits_{S} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oiint\limits_{S} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \rho \mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

单位矢量

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_{\mathrm{s}}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$$

张量

$$\boldsymbol{D} = \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \boldsymbol{E} + \overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}} \cdot \boldsymbol{H}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

可忽略量

$$k\sqrt{(x-x')^2 + z^2} \simeq kz \left(1 + \frac{x^2}{2z^2} - \frac{xx'}{z^z} + \cancel{\frac{x'^2}{2z^2}}\right)$$

第 1 章　基 本 方 程

本章给出 Maxwell 方程的积分和微分形式以及介质分界面处的边界条件, 讨论介质的本构关系, 导出电磁场能量守恒 Poynting 定理. 介绍时谐场的复数表示, 以及平面波极化状态的描写.

1.1　Maxwell 方 程

1.1.1　Maxwell 方程积分形式

在电磁实验定律基础上, Maxwell(1873) 建立电磁波基本方程, Hertz(1888) 用实验证实电磁波的存在. 实际上 Maxwell 方程建立前后百余年间许多科学家对电磁学的发展做出了重要贡献, 如表 1-1 所示 (Kraus, 1984; Kong, 2002). 目前电磁波理论在广播、通信、电视、遥感、光学工程、生物医学工程、地球物理及航空航天等领域具有广泛应用. 随着科学技术发展, 对电磁理论的研究也更加深入.

表 1-1　电磁学发展简表

姓名	年代	主要贡献	用以命名的电磁单位
Benjamin Franklin	1706～1790	提出电荷守恒	
Charles A. de Coulomb	1736～1806	测量电、磁作用力	库仑
Karl F. Gauss	1777～1855	提出散度定理, 地磁测量	高斯
Alessandro Volta	1745～1827	发明伏打电池	伏特
Andre M. Ampere	1775～1836	发明螺线管, 电流相互作用	安培
Hans C. Oersted	1777～1851	发现电可以产生磁	奥斯特
Georg S. Ohm	1787～1854	欧姆定律	欧姆
Michael Faraday	1791～1867	发现磁可以产生电	法拉第
Joseph Henry	1797～1878	电报实验	亨利
Wilhelm E Weber	1804～1891	地磁测量	韦伯
James P. Joule	1818～1889	电流热效应焦耳定律	焦耳
James C. Maxwell	1831～1879	奠定电磁理论	麦克斯韦
Thomas A. Edison	1847～1931	发明灯泡和电力系统	
Nikola Tesla	1856～1943	交流电机, 电力传输	特斯拉
Heinrich Hertz	1857～1894	电磁辐射	赫兹
Guglielmo Marconi	1874～1937	实现无线电通信	
Albert Einstein	1879～1955	给出 Maxwell 方程在相对论下的统一形式	

Maxwell 方程的积分形式为

$$
\left.\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\\
&\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho \mathrm{d}V
\end{aligned}\right\} \tag{1-1}
$$

式中, 第一、二式可应用于以任意回路 L 为边界的曲面 S; 第三、四式可应用于以任意封闭面 S 为表面的体积 V, 如图 1-1 所示. 各物理量的单位如下:

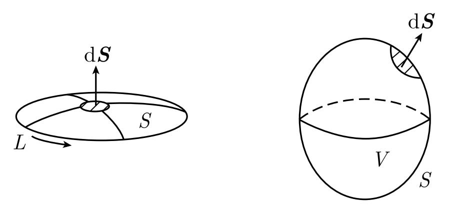
$\boldsymbol{E}$ 为电场强度, 单位为伏/米 (V/m);

$\boldsymbol{D}$ 为电通量密度, 单位为库/米 ^{2}(C/m^2);

$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度, 单位为安/米 (A/m);

$\boldsymbol{B}$ 为磁通量密度, 单位为韦/米 ^{2}(Wb/m^2);

$\boldsymbol{J}$ 为电流密度, 单位为安/米 ^{2}(A/m^2).



(a) 曲面S及其回路L　　(b) 区域V及其表面S

图 1-1　积分回路和积分体积

1.1.2　Maxwell 方程微分形式

由上述积分形式可以导出微分形式. 根据矢量场论 Stokes 回路定理, 式 (1-1) 第一式左端可以写为

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

代入式 (1-1) 得

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式对任意回路所围曲面成立, 所以有

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

根据矢量场论 Gauss 散度定理, 式 (1-1) 第四式左端可以写为

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V$$

代入式 (1-1) 第四式得

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

上式对任意封闭曲面所围体积成立, 所以有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

对于式 (1-1) 的其他二式可作同样处理. 于是, 由式 (1-1) 可得 Maxwell 方程微分形式.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

式 (1-2) 中的电荷、电流满足守恒定律：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1-3}$$

注意到 Maxwell 方程 (1-2) 的四个方程中的两个散度方程不是独立的, 它们可以由第一、二式以及守恒定律 (1-3) 导出. 因此, 式 (1-2) 中只有第一、二式是独立方程, 它们可以写出六个分量方程. 直角坐标系中 Maxwell 旋度式 (无源) 的六个分量方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ &\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ &\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \\ &\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ &\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

为了确定电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的 12 个场分量, 还需要另外 6 个标量方程, 即本构关系. 对于线性各向同性介质, 本构关系为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}\\&\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}\\&\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

式中, ε 表示介电系数, 单位为法拉第/米 (F/m);

μ 表示磁导系数, 单位为亨利/米 (H/m);

σ 表示电导率, 单位为西门子/米 (S/m);

以上 σ 为介质的电损耗. 式 (1-5) 中 ε_r 为相对介电系数, μ_r 为相对磁导系数, 无量纲. 真空中 $\sigma=0$, $\varepsilon_\mathrm{r}=1$, $\mu_\mathrm{r}=1$, $\varepsilon=\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\mathrm{F/m}$, $\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$. 水和土壤的介质参数见表 1-2.

表 1-2　水和土壤的介质参数

材料	电导率/(S/m)	介电系数 (ε_r)
海水	4	81
淡水	10^{-3}	81
湿土壤	10^{-3}	10
干土壤	10^{-5}	4

1.2　边 界 条 件

1.2.1　Maxwell 方程积分形式应用于分界面

通常在两种不同介质的分界面处介质参数有突变, 如图 1-2 所示. 将 Maxwell 方程积分形式应用于分界面可以导出边界条件. 将式 (1-1) 第二式应用于如图 1-3(a) 所示垂直于分界面的小矩形回路得到

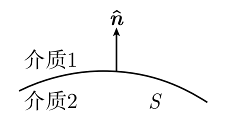
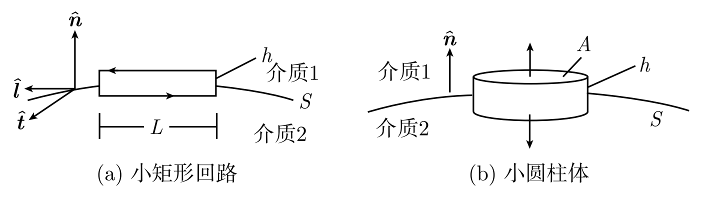


图 1-2　两种介质分界面

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot L\hat{\boldsymbol{l}}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,(Lh)-\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,(Lh)$$



(a) 小矩形回路　　(b) 小圆柱体

图 1-3　积分公式应用于边界

式中 $\hat{\boldsymbol{l}},\hat{\boldsymbol{t}}$ 分别为矩形回路的切向和法向单位矢. 当回路高度 $h\to 0$ 时由于 $\boldsymbol{H}$ 为有限, 式 (1-1) 第二式在侧边的积分趋于零, 所以只保留上边和下边的贡献. 当 $h\to 0$, $\boldsymbol{D}$ 为有限, 故上式右端第一项为零. 对于上式右端第二项, 若有面电流存在, $\lim\limits_{h\to 0}\{\boldsymbol{J}h\}=\boldsymbol{J}_{\rm s}$, 其中 $\boldsymbol{J}_{\rm s}$ 为面电流密度. 于是上式变为

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot l\hat{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{J}_{\rm s}\cdot l\hat{\boldsymbol{t}}$$

式中, 切向单位矢 $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{n}}$, $\hat{\boldsymbol{t}}$ 为矩形回路法向单位矢量. 代入上式得

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\right)=\boldsymbol{J}_{\rm s}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}$$

或

$$\hat{\boldsymbol{t}}\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)]=\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{J}_{\rm s}$$

由于回路法向 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 为任意, 所以由上式得到磁场切向分量的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_{\rm s}$$

将式 (1-1) 第四式应用于如图 1-3(b) 所示分界面上的小圆柱体得到

$$(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}A=\rho hA$$

当 $h\to 0$ 时由于 $\boldsymbol{D}$ 为有限, 式 (1-1) 第四式在柱体表面侧边的积分趋于零, 所以只保留上表面和下表面的贡献. 当 $h\to 0$, 若有面电荷存在, 上式右端 $\lim\limits_{h\to 0}\{\rho h\}=\rho_{\rm s}$, $\rho_{\rm s}$ 为面电荷密度, 代入得到电场法向分量的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_{\rm s}$$

对于式 (1-1) 第一、三式可做类似处理.

1.2.2 边界条件

上述推导可得出两种介质分界面处电磁场的法向和切向分量边界条件, 归结为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0\\&\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_{\rm s}\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_{\rm s}\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

式 (1-6) 右端分别为面电荷和面电流. 式中, 法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 由介质 2 指向介质 1, 如图 1-2 所示.

在绝缘介质界面没有自由面电荷、面电流, 所以上式变为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

对于理想导体 (PEC), 其内部没有场, 表面有面电荷和面电流, 所以式 (1-6) 变为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{B}_1=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{D}_1=\rho_{\mathrm{s}}\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

1.3 本 构 关 系

1.3.1 各向同性介质

介质物体中联系 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ 之间关系称为本构关系. 各向同性介质的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间方向相同, 本构参数为标量, 本构方程如式 (1-5) 所示,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

各向同性介质的本构参数与坐标系选择无关.

1.3.2 电各向异性介质

各向异性介质的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间方向可以不相同, 本构参数为张量, 本构参数张量与坐标系选择有关. 电各向异性介质的本构方程为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}=\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

式中, 介电系数 $\overline{\overline{\varepsilon}}$ 为张量,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

本构关系的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

其分量式为

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z$$

$$D_y = \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z$$

$$D_z = \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z$$

1.3.3 磁各向异性介质

对于磁各向异性介质, 本构方程为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

式中, 磁导系数 $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ 为张量,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

其分量式为

$$B_x = \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z$$

$$B_y = \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z$$

$$B_z = \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z$$

1.4 Poynting 定理和能流密度

根据 Maxwell 方程可以导出能量守恒关系式, 由旋度方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

用 $\boldsymbol{H}$ 点乘式 (1-12) 第一式, $\boldsymbol{E}$ 点乘第二式, 二者相加得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$$

上式对空间区域 V 积分得

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_V\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=-\iiint\limits_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$$

根据矢量场论 Gauss 散度定理, 上式左端第一项可写为封闭面通量积分形式

$$\oiint\limits_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_V\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=-\iiint\limits_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{1-13}$$

式 (1-13) 称为 Poynting 定理, 式中各项的物理意义分述如下：左端第一项为功率流密度的散度, 第二项代表 V 中电磁场能量密度变化率, 等号右端代表电流供给的功率. 由此定义功率流密度 (能流密度) 为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{1-14}$$

单位为瓦特/米 ^{2}(Watt/m^2).

对于线性各向同性介质, 其本构关系为式 (1-9), 这时式 (1-13) 中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}&=\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\&=\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\end{aligned}$$

由此定义电磁场能量密度为

$$W=\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{1-15}$$

单位为焦/米 ^{3} (J/m^3).

对于如图 1-4 所示空间区域, 式 (1-13) 所示能量守恒的积分形式为

$$\oiint\limits_A\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V W\mathrm{d}V=-\iiint\limits_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})\,\mathrm{d}V \tag{1-16}$$

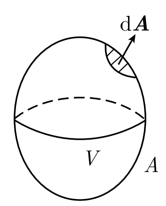


图 1-4　空间区域 V

1.5 真空中平面波和电磁波谱

1.5.1 真空中平面波

真空中无源 Maxwell 旋度方程

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1-17}$$

消去 $\boldsymbol{H}$ 得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

又由 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$, 上式中

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right)=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

所以

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\tag{1-18}$$

以上为电场波动方程.

考虑上述方程的平面波解. 设平面波沿 z 轴传播, 电场为 x 分量, 式 (1-18) 变为

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}=0,\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\simeq3\times10^8\ \mathrm{m/s}\tag{1-19}$$

以上一维波动方程的一般解 (达朗贝尔解) 为

$$E_x\left(z,t\right)=E_x\left(z\pm ct\right)=E_x\left(t\pm\frac{z}{c}\right)$$

式中, $\pm$ 分别代表沿 $+z$ 和 $-z$ 传播的波, 波的传播速度为真空中光速 c.

1.5.2 时谐场复数表示

设场随时间呈余弦 (正弦) 变化, 称为时谐场. 沿 z 轴平面波为

$$E_x\left(z,t\right)=E_0\cos\left[k\left(z-ct\right)\right]=E_0\cos\left(kz-\omega t\right)$$

上式可写成复数的实部,

$$E_x\left(z,t\right)=E_0\cos\left(kz-\omega t\right)=E_0\mathrm{Re}\left\{\exp\left[\mathrm{i}\left(kz-\omega t\right)\right]\right\}$$

通常采用平面波的复数表示为

$$E_x\left(z,t\right)=E_0\exp\left(\mathrm{i}kz\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$$

一般时谐场的复数表示为

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)=\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$$

式中, $\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right)$ 称为复数相位 (phasor), $\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$ 为时谐因子. 采用时谐场的复数表示运算后应取实部作为物理结果.

1.5.3 电磁波谱

电磁波覆盖很宽的频率范围, 从光波直到甚低频电磁波, 如表 1-3 所示. 表 1-4~ 表 1-6 给出若干常用频段及其名称. 文献中常用到的频率单位有：兆赫兹 (1 MHz=10^6 Hz)、吉赫兹 (1 GHz=10^9 Hz)、太赫兹 (1 THz=10^{12} Hz) 等.

表 1-3 电磁波谱

	宇宙射线	γ 射线	X 射线	紫外线	可见光	红外线	无线电波
波长范围/m	$<10^{-16}$	$10^{-16}\sim10^{-11}$	$10^{-11}\sim10^{-8}$	$10^{-8}\sim10^{-7}$	$10^{-7}\sim10^{-6}$	$10^{-6}\sim10^{-3}$	$10^{-3}\sim10^{11}$
频率范围/Hz	$>10^{24}$	$10^{24}\sim10^{19}$	$10^{19}\sim10^{16}$	$10^{16}\sim10^{15}$	$10^{15}\sim10^{14}$	$10^{14}\sim10^{11}$	$10^{11}\sim3$

表 1-4 无线电波

频段/波段		波长范围	频率范围
远红外 IR	毫米波	0.1~1 mm	300~3000 GHz
太赫兹		0.3~3 mm	0.1~10 THz
极高频 EHF	微波	1~10 mm	30~300 GHz
超高频 SHF		1~10 cm	3~30 GHz
特高频 UHF		10~100 cm	300~3000 MHz
甚高频 VHF		1~10 m	30~300 MHz
高频 HF	短波	10~100 m	3~30 MHz
中频 MF	中波	100~1000 m	300~3000 kHz
低频 LF	长波	1~10 km	30~300 kHz
甚低频 VLF		10~100 km	3~30 kHz
特低频 ULF		100~1000 km	300~3000 Hz
超低频 SLF		1000~10000 km	30~300 Hz
极低频 ELF		>10000 km	<30 Hz

表 1-5 雷达频段

频段名称	频率范围	说明
HF	3~30 MHz	
VHF	30~300 MHz	I：100~150 MHz G：160~225 MHz P：225~239 MHz
UHF	300~1000 MHz	
L	2~4 GHz	
S	4~8 GHz	
C	8~12 GHz	
X	12~18 GHz	
Ku	18~27 GHz	
Ka	27~40 GHz	
V	40~75 GHz	Q：36~40 GHz
W	75~110 GHz	
毫米波	110~300 GHz	

表 1-6 常用电器频段

用　途	频率范围	说　明
调幅广播 (AM)	531∼1602 kHz	
短波广播	3∼30 MHz	
调频广播 (FM)	87∼108 MHz	
电视	48.5∼958 MHz	L 频段：1∼5 频道, 48.5∼92 MHz. H 频段：6∼12 频道, 167∼233 MHz. UHF 频段：13∼68 频道, 470∼958 MHz
微波炉	2.45 GHz	
无绳电话	900 MHz , 2.4 GHz , 5.8 GHz	
手机	800, 900, 1800, 1900 MHz	

1.6 时谐场 Maxwell 方程

1.6.1 时谐场方程和复数介电系数

采用时谐场复数表示后, 时间导数可以写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right]=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

所以时谐场情况的时间导数算子有以下对应关系：

$$\frac{\partial}{\partial t}\to-\mathrm{i}\omega$$

于是, 时谐场情形旋度方程可写为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{1-20}$$

式 (1-20) 又可写为

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}\\ &=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\omega\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}\\ &=-\mathrm{i}\omega\varepsilon_{\mathrm{complex}}\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

由此可引入复数介电系数,

$$\varepsilon_{\mathrm{complex}}=\varepsilon'+\mathrm{i}\varepsilon''=\varepsilon_0\left(\varepsilon_{\mathrm{r}}'+\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{r}}''\right)\tag{1-21}$$

虚部代表介质损耗, $\varepsilon'' = \sigma/(\omega\varepsilon_0)$. 部分材料的复数相对介电系数见表 1-7 (Harrington, 1964: 487).

表 1-7 若干材料的复数相对介电系数

材料	温度/°C	本构参数	复数相对介电系数			
			10^4Hz	10^6Hz	10^8Hz	10^{10}Hz
黏土 (干)	25	ε'_r	3.72	2.57		2.16
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-3})$	390	170		28
沙土 (干)	25	ε'_r	2.75	2.59		2.53
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-4})$	940	440		92
铅钡玻璃	25	ε'_r	6.76	6.73	6.70	6.64
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-4})$	100	85	115	470
有机玻璃	27	ε'_r	2.95	2.76		2.59
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-4})$	885	385		175
石蜡	25	ε'_r	2.25	2.25	2.25	2.24
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-4})$	5	5	5	5
聚苯乙烯	25	ε'_r	2.56	2.56	2.55	2.54
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-4})$	1.3	1.8	3	11
泡沫聚苯乙烯	25	ε'_r	1.03	1.03		1.03
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-4})$	1	2		1.5
水	25	ε'_r		78.2	78	55
		$\varepsilon''_\mathrm{r}\ (\times 10^{-2})$		310	39	3000

1.6.2 复数 Poynting 矢量和平均能流

已知能流密度 (瞬时值) 定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\\ &= \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right\}\times\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right\}\end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right\} &= \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right]^*\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r})\exp(+\mathrm{i}\omega t)\right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r})\exp(+\mathrm{i}\omega t)\right]\\ &\quad\times\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\exp(+\mathrm{i}\omega t)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}2\omega t)+\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\exp(+\mathrm{i}2\omega t)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right\}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}2\omega t)\right\}$$

上式第一项和时间无关, 定义为复数 Poynting 矢量

$$\boldsymbol{S}_{\text{complex}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right\} \tag{1-22}$$

能流密度的周期平均值为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{average}}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right\}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})(-\mathrm{i}2\omega t)\right\}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right\}=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{S}_{\text{complex}}(\boldsymbol{r})\right\}\end{aligned} \tag{1-23}$$

式 (1-23) 表明, 复数 Poynting 矢量的实部代表平均能流密度. 同样, 采用复数表示后, 电磁场的平均能量密度为

$$W_{\text{average}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*\right\} \tag{1-24}$$

1.6.3 复数 Poynting 定理

由 Maxwell 旋度方程式 (1-20) 有

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}\\\nabla\times\boldsymbol{H}&=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

用 $\boldsymbol{H}^*$ 点乘式 (1-25) 第一式, $\boldsymbol{E}$ 点乘第二式的共轭, 二者相减得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*)-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^* \tag{1-26}$$

根据式 (1-22), 式 (1-26) 可写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\text{complex}}=\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^* \tag{1-27}$$

根据式 (1-15) 和式 (1-21), 电场和磁场的平均能量密度分别为

$$\left.\begin{aligned}W_{\text{e,average}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*\right\}=\frac{1}{4}\varepsilon'\left|\boldsymbol{E}\right|^2\\W_{\text{m,average}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*\right\}=\frac{1}{4}\mu'\left|\boldsymbol{H}\right|^2\end{aligned}\right\} \tag{1-28}$$

于是式 (1-27) 变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\text{complex}}-2\mathrm{i}\omega\left(W_{\text{m,average}}-W_{\text{e,average}}\right)+\omega L+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^{*}=0 \tag{1-29}$$

式中,

$$L=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^{*}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right\}=\frac{1}{2}\left(-\mu''\left|\boldsymbol{H}\right|^{2}+\varepsilon''\left|\boldsymbol{E}\right|^{2}\right) \tag{1-30}$$

式 (1-29) 称为复数 Poynting 定理. 它可以区分为实部和虚部. 式 (1-29) 的实部就是关于平均能流密度的守恒定律,

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\text{average}}-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^{*}\right\}=\omega L \tag{1-31}$$

式 (1-31) 左端第一项代表流入的平均能流, 第二项代表外电流所做的功, 等式右端为介质的损耗. 式 (1-29) 的虚部为

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\text{i}}-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^{*}\right\}=2\omega\left(W_{\text{e,average}}-W_{\text{m,average}}\right) \tag{1-32}$$

式 (1-32) 代表功率的电抗部分, 它和平均电场能量和磁场能量之差有关.

式 (1-31) 右端代表介质损耗. 生物工程中常用的相关参数为吸收功率比 (specific absorption rate, SAR), 定义为

$$\text{SAR}=\frac{\omega L}{\rho} \tag{1-33}$$

式中, ρ 为介质的质量密度. 由于通常生物体 $\mu''=0$, 所以吸收功率比又可写为

$$\text{SAR}=\frac{\omega\varepsilon''\left|\boldsymbol{E}\right|^{2}}{2\rho}=\frac{\sigma\left|\boldsymbol{E}\right|^{2}}{2\rho} \tag{1-34}$$

1.7 引入磁荷磁流后的 Maxwell 方程

1.7.1 引入磁荷磁流后的方程和边界条件

为了分析方便, 通常引入磁荷、磁流. Maxwell 方程式 (1-1) 变为

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iint_S \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho_m\mathrm{d}V\\
&\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho\mathrm{d}V
\end{aligned}\right\} \tag{1-35}$$

式中, $\boldsymbol{M}$ 为磁流密度, 单位为伏特/米 ²(V/m²). 上述形式对于电和磁的参数具有很好的对偶形式. 虽然物理上尚未确定磁荷、磁流的存在. 但是, 作为一种等效方式, 磁荷、磁流的概念已常用于电磁计算和分析.

和式 (1-35) 对应的 Maxwell 方程微分形式为

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{M} \\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= \rho_{\mathrm{m}} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{1-36}$$

以上方程中的磁荷、磁流也满足守恒定律,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{M}+\frac{\partial\rho_{\mathrm{m}}}{\partial t}=0 \tag{1-37}$$

在引入磁荷、磁流后边界条件 (1-6) 式改写为

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2) &= \rho_{\mathrm{ms}} \\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2) &= \rho_{\mathrm{s}} \\ \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2) &= -\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} \\ \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2) &= \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \end{aligned}\right\} \tag{1-38}$$

式 (1-38) 右端分别为面电荷、面电流以及面磁荷、面磁流, 式中, 法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 由介质 2 指向介质 1, 如图 1-2 所示. 对于理想磁导体 (PMC), 其内部没有场, 表面有面磁荷和面磁流, 所以 PMC 表面边界条件变为

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{B}_1 &= \rho_{\mathrm{ms}} \\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{D}_1 &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1 &= -\boldsymbol{M}_s \\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-39}$$

1.7.2 时谐场情形和复数导磁系数

对于具有损耗的线性各向同性介质, 本构关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu\boldsymbol{H}=\mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{J} &= \sigma\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{M} &= \sigma_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{1-40}$$

式中, $\sigma_{\rm m}$ 表示导磁率, 单位为欧姆/米 (Ω/m). 以上 σ 和 $\sigma_{\rm m}$ 分别为介质的电损耗和磁损耗. 时谐场的旋度方程 (1-36) 式变为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{J}_{\rm m}={\rm i}\omega\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}=-{\rm i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{1-41}$$

式 (1-41) 又可写为

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=-{\rm i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}\\ &=-{\rm i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E}\\ &=-{\rm i}\omega\left(\varepsilon+{\rm i}\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}=-{\rm i}\omega\varepsilon_{\rm complex}\boldsymbol{E}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&={\rm i}\omega\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}\\ &={\rm i}\omega\mu\boldsymbol{H}-\sigma_{\rm m}\boldsymbol{H}\\ &={\rm i}\omega\left(\mu+{\rm i}\frac{\sigma_{\rm m}}{\omega}\right)\boldsymbol{H}={\rm i}\omega\mu_{\rm\ complex}\boldsymbol{H}\end{aligned}$$

由此可引入复数介电系数和复数导磁系数,

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{\rm complex}=\varepsilon'+{\rm i}\varepsilon''=\varepsilon_0\left(\varepsilon'_{\rm r}+{\rm i}\varepsilon''_{\rm r}\right)\\ &\mu_{\rm complex}=\mu'+{\rm i}\mu''=\mu_0\left(\mu'_{\rm r}+{\rm i}\mu''_{\rm r}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1-42}$$

虚部分别代表介质的电和磁损耗, 即 $\varepsilon''=\sigma/\left(\omega\varepsilon_0\right)$, $\mu''=\sigma_{\rm m}/(\omega\mu_0)$.

1.8　平面波的极化

1.8.1　左旋和右旋波的定义

对于平面波, 设传播方向为 $\hat{\boldsymbol{k}}$, 电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直于波的传播方向. 极化状态按照 $\boldsymbol{E}$ 矢量端点轨迹定义. 右旋和左旋极化是按照如图 1-5 所示右手和左手关系来定义. 应当注意：上述左旋和右旋的定义只适用于平面波情形, 电磁波的一般情形通常没有描述波传播方向的波矢量, 且 $\boldsymbol{E}$ 矢量端点轨迹变得复杂, 不能用简单的左旋或右旋波来描写.

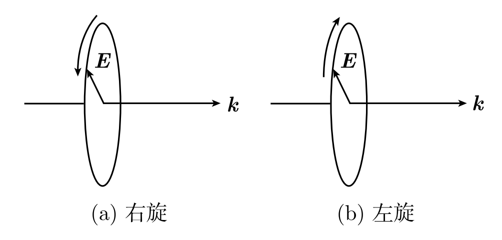


图 1-5　用电场 E 矢量端点轨迹定义左旋和右旋波

1.8.2　极化椭圆：正椭圆

为了便于描写, 采用和传播方向相关联的局域坐标系. 水平方向、垂直方向和传播方向之间相互关系为 $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{h}} \times \hat{\boldsymbol{v}}$, 如图 1-6 所示. 电场矢量可写为

$$\boldsymbol{E}(t) = \hat{\boldsymbol{h}} E_h + \hat{\boldsymbol{v}} E_v = \hat{\boldsymbol{h}} e_h \cos(\omega t - \psi_h) + \hat{\boldsymbol{v}} e_v \cos(\omega t - \psi_v) \tag{1-43}$$

式中, ψ_h, ψ_v 为初相位. 设振幅 $e_h, e_v > 0$, E_v 和 E_h 之间相位差为

$$\psi = \psi_v - \psi_h$$

式 (1-43) 消去时间因子 t 后得到

$$\left(\frac{E_h}{e_h}\right)^2 + \left(\frac{E_v}{e_v}\right)^2 - 2\frac{E_h E_v}{e_h e_v}\cos\psi = \sin^2\psi \tag{1-44}$$

波的传播方向

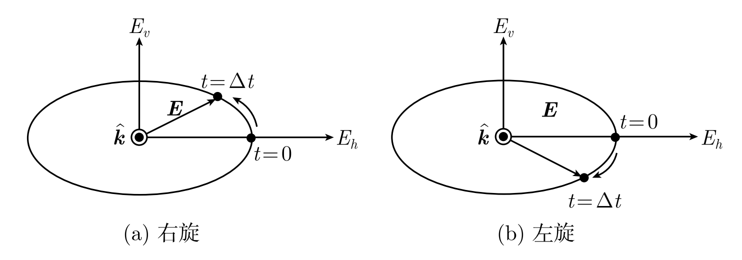
图 1-6　局域坐标系

通常式 (1-44) 表示倾斜椭圆：当 $0 < \psi < \pi$ 时为右旋, $0 > \psi > -\pi$ 时为左旋.

下面讨论振幅 e_h, e_v 和相位差 ψ 取一些特殊值时的极化特性. 首先看正椭圆极化. 当 $\psi = \psi_v - \psi_h = \pi/2$, 式 (1-43) 变为

$$\left.\begin{aligned} E_h &= e_h \cos(\omega t - \psi_h) \\ E_v &= e_v \cos\left[\omega t - \left(\psi_h + \frac{\pi}{2}\right)\right] = e_v \sin(\omega t - \psi_h) \end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

不失一般性, 可设 $\psi_h = 0$ 来判断轨迹. 当 $t = 0 \to \Delta t$, 如图 1-7(a) 所示 $\boldsymbol{E}$ 端点为逆时针方向, 即为右旋.



(a) 右旋　　(b) 左旋

图 1-7　正椭圆极化

当 $\psi = \psi_v - \psi_h = -\pi/2$, 则式 (1-43) 变为

$$\left.\begin{aligned} E_h &= e_h \cos(\omega t - \psi_h) \\ E_v &= -e_v \sin(\omega t - \psi_h) \end{aligned}\right\} \tag{1-46}$$

可设 $\psi_h = 0$ 以判断轨迹. 当 $t = 0 \to \Delta t$, 图 1-7(b) 所示 $\boldsymbol{E}$ 端点为顺时针方向, 即为左旋.

从式 (1-45) 或式 (1-46) 消去 t 得到

$$\left(\frac{E_h}{e_h}\right)^2 + \left(\frac{E_v}{e_v}\right)^2 = 1$$

为正椭圆方程. 如果振幅 $e_h = e_v$, 则为圆极化.

下面讨论采用复数表示法时左旋和右旋的表示式. 由式 (1-43) 得

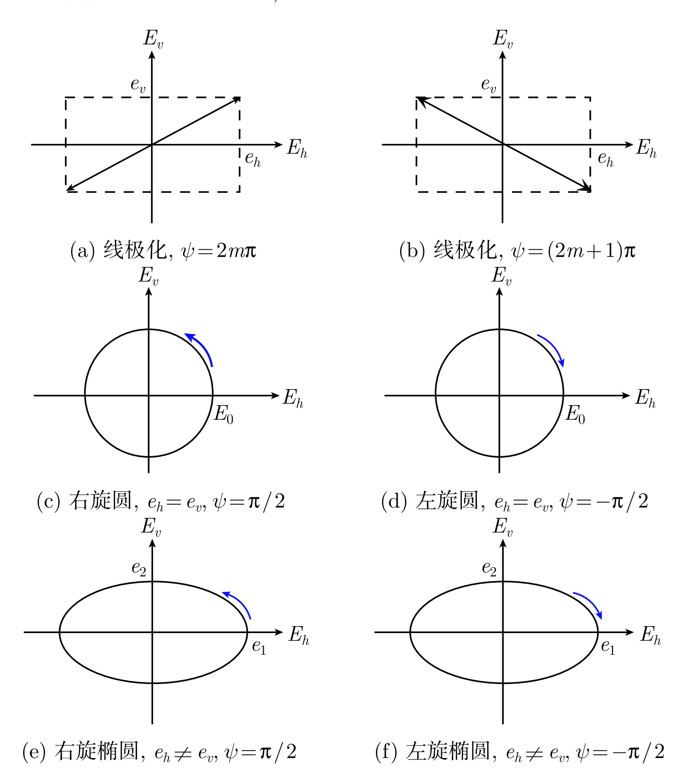
$$E_h = e_h \exp\left(\mathrm{i}\psi_h\right) \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$$

$$E_v = e_v \exp\left(\mathrm{i}\psi_v\right) \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$$

两个分量之比为

$$\frac{E_v}{E_h} = \frac{e_v}{e_h} \exp\left[\mathrm{i}(\psi_v - \psi_h)\right] = \left(\frac{e_v}{e_h}\right) \exp\left(\mathrm{i}\psi\right) \tag{1-47}$$

考虑以下几种特殊的极化状态, 如图 1-8 所示.



(a) 线极化, $\psi = 2m\pi$　(b) 线极化, $\psi = (2m+1)\pi$

(c) 右旋圆, $e_h = e_v$, $\psi = \pi/2$　(d) 左旋圆, $e_h = e_v$, $\psi = -\pi/2$

(e) 右旋椭圆, $e_h \neq e_v$, $\psi = \pi/2$　(f) 左旋椭圆, $e_h \neq e_v$, $\psi = -\pi/2$

图 1-8　几种特殊极化状态

情形一：当 $\psi = 2m\pi$ 或 $(2m+1)\pi$, 为线极化, 如图 1-8(a) 和图 1-8(b) 所示. 式 (1-47) 变为

$$\frac{E_v}{E_h} = \pm\left(\frac{e_v}{e_h}\right)$$

情形二：若 $e_h = e_v$ 为圆极化, $\psi = \pm\pi/2$. 其中, + 为右旋圆极化, −为左旋圆极化, 如图 1-8(c) 和图 1-8(d) 所示, 图中 $\hat{\boldsymbol{h}} \times \hat{\boldsymbol{v}}$ 为波的传播方向. 式 (1-47) 变为

$$\frac{E_v}{E_h} = \exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \pm\mathrm{i}$$

情形三：若 $e_h \neq e_v$ 为正椭圆, $\psi = \pm\pi/2$. 其中, + 为右旋正椭圆, −为左旋正椭圆, 如图 1-8(e) 和图 1-8(f) 所示. 式 (1-47) 变为

$$\frac{E_v}{E_h} = \frac{e_v}{e_h}\exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \pm\mathrm{i}\frac{e_v}{e_h}$$

当以地面为参考系时, 电场 $\boldsymbol{E}$ 与地面垂直时称为垂直极化波; $\boldsymbol{E}$ 与地面平行时称为水平极化波. 在无线电通信中, 考虑到发射天线和接收天线的架设方便, 减少重影以及避开其他电波的干扰等因素, 垂直极化波大多用于中波广播、移动通讯、卫星电视广播等, 水平极化波大多用于短波广播、地面电视广播、调频广播和卫星电视广播等.

1.8.3 斜椭圆的倾斜角

考虑如式 (1-44) 所示的倾斜椭圆. 在 E_hOE_v 系中的分量为

$$\begin{aligned} E_h &= e_h\cos(\omega t - \psi_h) \\ E_v &= e_v\cos(\omega t - \psi_v) = e_v\cos[\omega t - (\psi + \psi_h)] \end{aligned}$$

其复数形式为

$$\begin{aligned} E_h &= e_h\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \psi_h)] \\ E_v &= e_v\exp\{-\mathrm{i}[\omega t - (\psi + \psi_h)]\} \\ &= e_v\exp(\mathrm{i}\psi)\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \psi_h)] \end{aligned}$$

式中, $\psi = \psi_v - \psi_h$ 为二分量之间相位差. 另外, 也可以建立一个新坐标系 E_1OE_2, 如图 1-9 所示, 使得该椭圆在此坐标系中为正椭圆, 即椭圆长轴和短轴正好与坐标轴一致. 参照式 (1-45) 和式 (1-46), 正椭圆方程为

$$\begin{aligned} E_1 &= e_1\cos(\omega t - \psi_0) \\ E_2 &= \pm e_2\sin(\omega t - \psi_0) \end{aligned} \tag{1-48}$$

其复数形式为

$$E_1 = e_1 \exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t - \psi_0\right)\right]$$
$$E_2 = \pm e_2 \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t - \psi_0\right)\right]$$

式中, e_1, e_2 分别为半长轴和半短轴, 即设 $e_1 \geqslant e_2 > 0$. + 为右旋, − 为左旋. 两个坐标系之间的关系为

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h \\ E_v \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{aligned} E_1 &= E_h \cos\alpha + E_v \sin\alpha \\ E_2 &= -E_h \sin\alpha + E_v \cos\alpha \end{aligned} \tag{1-49}$$

式中, α 为 E_hOE_v 系中椭圆倾斜角.

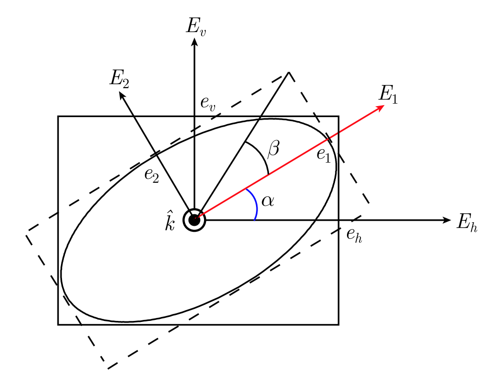


图 1-9　倾斜椭圆的倾斜角

1.8.4　Stokes 参数和 Poincaré 球

若令式 (1-48) 中短轴和长轴之比为

$$\tan\beta = \pm\frac{e_2}{e_1} \tag{1-50}$$

式中, β 称为极化度角 (ellipticity angle), 其取值范围为

$$-1 \leqslant \tan\beta \leqslant 1 \quad 或 \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4} \tag{1-51}$$

式中, 当 $0 < \beta \leqslant \pi/4$ 为右旋; $-\pi/4 \leqslant \beta < 0$ 为左旋; $\beta = 0$ 为线极化. 所以 β 不仅表示长短轴之比, 还表示极化旋转方向. 式 (1-50) 代入式 (1-48) 得

$$\begin{aligned} E_1 &= e_1 \cos(\omega t - \psi_0) \\ E_2 &= e_1 \tan\beta \sin(\omega t - \psi_0) \end{aligned} \tag{1-52}$$

其复数形式为

$$\begin{aligned} E_1 &= e_1 \exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t - \psi_0\right)\right] \\ E_2 &= e_1 \tan\beta \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t - \psi_0\right)\right] \end{aligned}$$

如上所述, 极化椭圆的描写在 E_hOE_v 系中用 e_h、e_v 和 $\psi = \psi_v - \psi_h$ 三个参数; 在新坐标系 E_1OE_2 中用 e_1, β 和 α 三个参数, 其中 e_1 为椭圆长轴, β 为极化度角, 描写长短轴比与旋转方向, α 为椭圆倾斜角. 可以证明, 上述两组参数之间满足以下关系：

$$\left.\begin{aligned} &e_1^2 + e_2^2 = e_h^2 + e_v^2 \\ &e_1^2 \tan\beta = e_h e_v \sin\psi \\ &2e_h e_v \cos\psi = (e_h^2 - e_v^2)\tan 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-53}$$

利用上述关系两组参数之间可以互相转换.

式 (1-53) 的证明如下：比较式 (1-49) 和式 (1-52) 得到

$$\begin{aligned} e_1 \cos(\omega t - \psi_0) &= E_h \cos\alpha + E_v \sin\alpha \\ e_1 \tan\beta \sin(\omega t - \psi_0) &= -E_h \sin\alpha + E_v \cos\alpha \end{aligned}$$

再将式 (1-45) 代入上式消去 E_h, E_v. 然后令含 $\sin\omega t, \cos\omega t$ 的系数分别相等可得

$$\left.\begin{aligned} e_1 \cos\psi_0 &= e_h \cos\psi_h \cos\alpha + e_v \cos\psi_v \sin\alpha \\ e_1 \sin\psi_0 &= e_h \sin\psi_h \cos\alpha + e_v \sin\psi_v \sin\alpha \\ e_1 \tan\beta \cos\psi_0 &= -e_h \sin\psi_h \sin\alpha + e_v \sin\psi_v \cos\alpha \\ e_1 \tan\beta \sin\psi_0 &= e_h \cos\psi_h \sin\alpha - e_v \cos\psi_v \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-54}$$

式 (1-54) 第一、二式平方相加消去 ψ_0, 以及第三、四式平方相加消去 ψ_0, 得到

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_h^2 \cos^2\alpha + e_v^2 \sin^2\alpha + e_h e_v \sin 2\alpha \cos\psi \\ e_1^2 \tan^2\beta = e_2^2 &= e_h^2 \sin^2\alpha + e_v^2 \cos^2\alpha - e_h e_v \sin 2\alpha \cos\psi \end{aligned}$$

以上二式之和得到 $e_1^2 + e_2^2 = e_h^2 + e_v^2$, 即为式 (1-53) 第一式.

将式 (1-54) 第一、三式相乘, 第二、四式相乘, 然后相加消去 ψ_0, 得到 $e_1^2 \tan\beta = e_h e_v \sin\psi$, 即式 (1-53) 第二式.

又将式 (1-54) 第一和第四式相乘, 第二、三式相乘, 然后相减消去 ψ_0, 得到 $2e_h e_v \cos\psi = (e_h^2 - e_v^2)\tan 2\alpha$, 即式 (1-53) 第三式. 证毕.

由式 (1-53) 第一式可见, 极化椭圆在任何直角系中的二直角分量的平方和不变. 根据式 (1-23) 和平面波特性, 这一平方和与平均能流密度成正比, 代表波的强度.

极化椭圆的描写还可以用以下所定义的参数：

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{1}{\eta}\left(e_h^2 + e_v^2\right) \\ Q &= \frac{1}{\eta}\left(e_h^2 - e_v^2\right) \\ U &= \frac{2}{\eta}e_h e_v \cos\psi \\ V &= \frac{2}{\eta}e_h e_v \sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{1-55}$$

式中, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为波阻抗. 由式 (1-55) 可得

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

I 与能流或波的强度成正比. I, Q, U, V 称为 Stokes 参数. 其中, 只有三个是独立变量. 式 (1-53) 代入式 (1-55) 可得 (证明作为习题)

$$\left.\begin{aligned} Q &= I\cos 2\alpha \cos 2\beta \\ U &= I\sin 2\alpha \cos 2\beta \\ V &= I\sin 2\beta \end{aligned}\right\} \tag{1-56}$$

式 (1-56) 表明用 I, α 和 β 也可描写极化状态. 如前所述, 它们分别代表波的强度、极化椭圆倾角和极化度角. 利用式 (1-55) 和式 (1-56) 可以确定椭圆倾角 α 和极化度角 β.

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{V}{I}\right) = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2e_h e_v \sin\psi}{e_h^2 + e_v^2}\right) \\ \alpha &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{U}{Q}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2e_h e_v \cos\psi}{e_h^2 - e_v^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1-57}$$

半长轴 e_1 则可以由式 (1-53) 第二式确定,

$$e_1 = \sqrt{\frac{e_h e_v \sin\psi}{\tan\beta}} \tag{1-58}$$

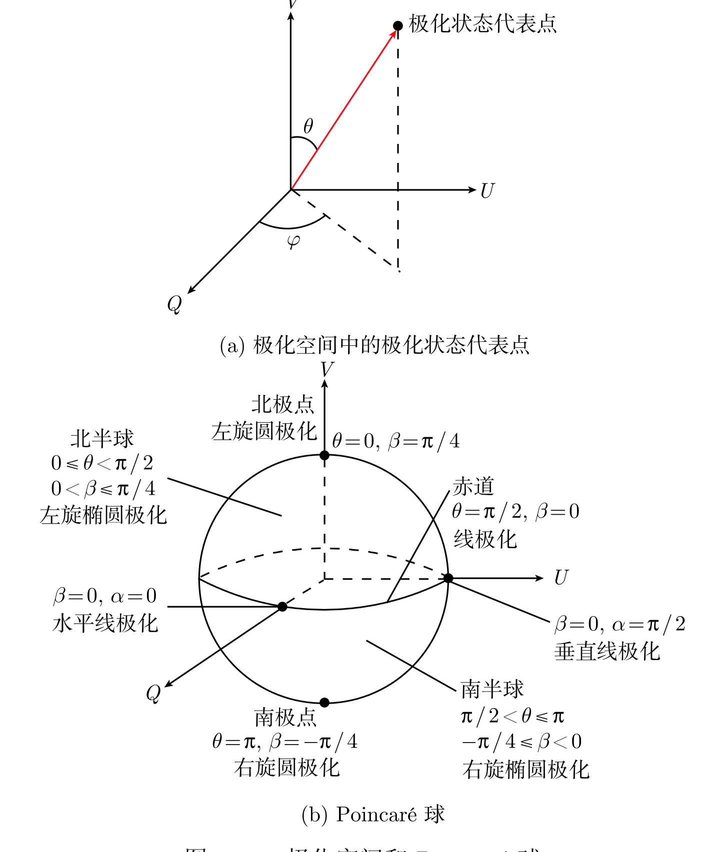
为了便于极化的几何图示, 引入新变量,

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} - 2\beta \\ \varphi &= 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-59}$$

则式 (1-56) 改写为

$$\left.\begin{aligned} Q &= I\sin\theta\cos\varphi \\ U &= I\sin\theta\sin\varphi \\ V &= I\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1-60}$$

式 (1-60) 类似于球坐标与直角坐标之间的关系. 由此可定义极化空间, 其中 Q, U, V 为直角坐标轴, 如图 1-10(a) 所示. 极化空间中的一个点称为极化状态代表点. 该点的坐标既可以用 Q, U, V 描写, 也可以用 I, θ, ϕ 描写. 极化空间中 I 等于常数的球面称为 Poincaré 球, 如图 1-10(b) 所示. 所有位于该球面上的代表点具有相同的波强度, 但极化状态不同. 在 Poincaré 球的赤道面上, $\theta = \pi/2$, 即 $\beta = 0$, 表示波为线极化; 赤道面上的不同 ϕ 角对应于不同的线极化取向. Poincaré 球的北极点和南极点分别为 $\theta = 0$ 和 π, 即 $\beta = \pi/4$ 和 $-\pi/4$, 分别代表右旋和左旋圆极化. 北半球面和南半球面分别对应于右旋和左旋椭圆极化, 不同 ϕ 角对应于极化椭圆的不同倾角.



(a) 极化空间中的极化状态代表点

(b) Poincaré 球

图 1-10　极化空间和 Poincaré 球

1.9　平面波极化的 MATLAB 动态演示

MATLAB 语言有很强的图形显示功能. 本节给出 MATLAB 程序动态演示平面波极化特性, 参见 1.8 节. 从平面电磁波来波方向观察电场矢量末端随时间变化的轨迹如图 1-11 所示. 该程序稍作修改就可以演示斜椭圆极化的情形.

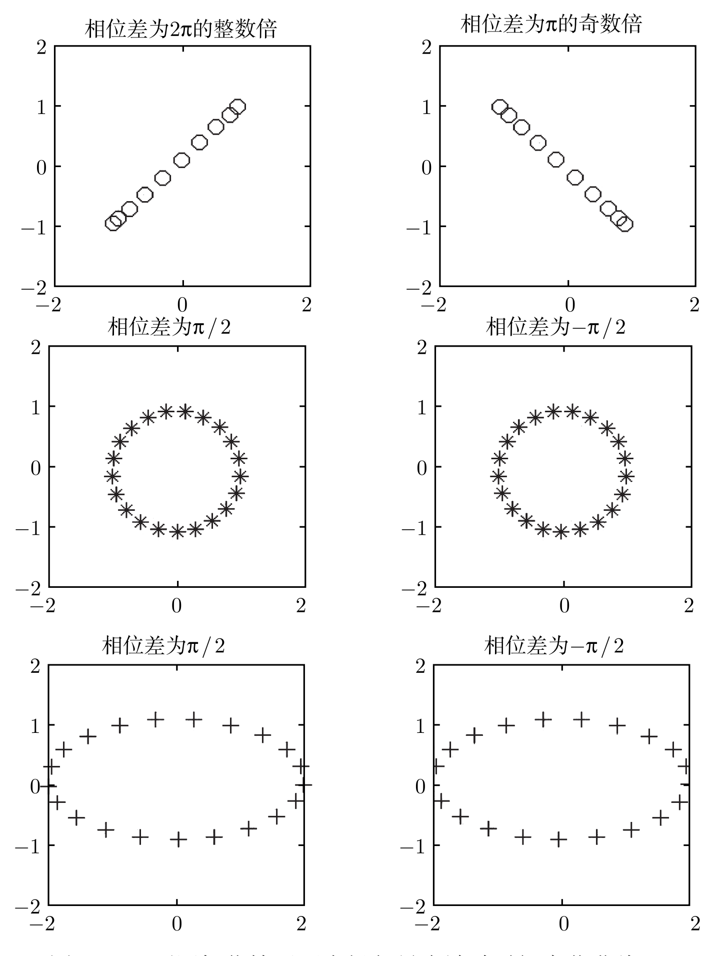


图 1-11　不同极化情形下电场矢量末端随时间变化曲线

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  本程序可动态演示不同极化情形下电场矢量末端随时间变化的曲线包括线
%                                          极化、圆极化和椭圆极化
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clear
omega=3.0e5;                    %电磁波频率
delt_t=1.0e-6;                  %步进时间间隔

%相位差为 2×m×pi 时一三象限线极化
phi=2*pi;                       %两垂直方向的相位差
for n=1:10
E_h=cos(omega*delt_t*n-phi);
E_v=cos(omega*delt_t*n-phi);
axis equal
axis([-2,2,-2,2])
subplot(3,2,1)
plot(E_h,E_v,'o')
title('相位差为 2pi 的整数倍','FontSize',10,'FontName','黑体')
hold on
pause(0.5)
end
clc

%相位差为 (2×m+1)×pi 时二四象限线极化
clear
omega=3.0e5;                    %电磁波频率
delt_t=1.0e-6;                  %步进时间间隔

phi=3*pi;                       %两垂直方向的相位差
for n=1:10
E_h=cos(omega*delt_t*n-phi);
E_v=-cos(omega*delt_t*n-phi);
axis equal
axis([-2,2,-2,2])
subplot(3,2,2)
plot(E_h,E_v,'o')
title('相位差为 pi 的奇数倍','FontSize',10,'FontName','黑体')
hold on
pause(0.5)
```

```
end
clc

%相位差为 pi/2 时右旋圆极化
clear
omega=3.0e5;                          %电磁波频率
delt_t=1.0e-6;                        %步进时间间隔
phi=pi/2;                             %两垂直方向的相位差
for n=1:21
E_h=cos(omega*delt_t*n-phi);
E_v=sin(omega*delt_t*n-phi);
axis equal
axis([-2,2,-2,2])
subplot(3,2,3)
plot(E_h,E_v,'*')
title(' 相位差为 pi/2','FontSize',10,'FontName',' 黑体 ')
hold on
pause(0.5)
end
clc

%相位差为 -pi/2 时左旋圆极化
clear
omega=3.0e5;                          %电磁波频率
delt_t=1.0e-6;                        %步进时间间隔
phi=-pi/2;                            %两垂直方向的相位差
for n=1:21
E_h=cos(omega*delt_t*n-phi);
E_v=-sin(omega*delt_t*n-phi);
axis equal
axis([-2,2,-2,2])
subplot(3,2,4)
plot(E_h,E_v,'*')
title(' 相位差为 -pi/2','FontSize',10,'FontName',' 黑体 ')
hold on
```

```
pause(0.5)
end
clc

%相位差为 pi/2 时右旋椭圆极化
clear
omega=3.0e5;                        %电磁波频率
delt_t=1.0e-6;                      %步进时间间隔
phi=pi/2;                           %两垂直方向的相位差
for n=1:21
E_h=2*cos(omega*delt_t*n-phi);
E_v=sin(omega*delt_t*n-phi);
axis equal
axis([-2,2,-2,2])
subplot(3,2,5)
plot(E_h,E_v,'+')
title(' 相位差为 pi/2','FontSize',10,'FontName',' 黑体 ')
hold on
pause(0.5)
end
clc

%相位差为 -pi/2 时左旋椭圆极化
clear
omega=3.0e5;                        %电磁波频率
delt_t=1.0e-6;                      %步进时间间隔
phi=-pi/2;                          %两垂直方向的相位差
for n=1:21
E_h=2*cos(omega*delt_t*n-phi);
E_v=-sin(omega*delt_t*n-phi);
axis equal
axis([-2,2,-2,2])
subplot(3,2,6)
plot(E_h,E_v,'+')
title(' 相位差为 -pi/2','FontSize',10,'FontName',' 黑体 ')
```

```
hold on
pause(0.5)
end
clc
```

习 题

1. 在 EB 表述下, 本构关系可写为 $\begin{bmatrix} c\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \overline{\overline{\boldsymbol{C}}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ c\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$, 其中 $\overline{\overline{\boldsymbol{C}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\boldsymbol{P}}} & \overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{M}}} & \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}} \end{bmatrix}$; 在 EH 表述下, 本构关系可写为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \overline{\overline{\boldsymbol{C}}}_{\mathrm{EH}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$, 其中 $\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}_{\mathrm{EH}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\varepsilon}} & \overline{\overline{\xi}} \\ \overline{\overline{\zeta}} & \overline{\overline{\mu}} \end{bmatrix}$. 试证上述二本构矩阵诸元素间满足以下关系:

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{\varepsilon}} & \overline{\overline{\xi}} \\ \overline{\overline{\zeta}} & \overline{\overline{\mu}} \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \overline{\overline{\boldsymbol{P}}} - \overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{M}}} & \overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}^{-1} \\ -\overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{M}}} & \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}^{-\mathbf{1}} \end{bmatrix}$$

2. 设有以下几种电场矢量 (自由空间中):

(a) $\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{x}} \cos(\omega t - kz)$

(b) $\boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{z}} \cos(\omega t - kz)$

(c) $\boldsymbol{E}_3 = (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}}) \cos(\omega t + kz)$

试问: (1) 它们是否满足波动方程,

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{E} = 0$$

并求出 ω 与 k 之间的关系.

(2) 所给三种电场是否都满足 Maxwell 方程?

(3) 若能满足 Maxwell 方程, 求出相应的磁场.

3. 设均匀导电介质满足本构关系 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$.

(1) 试证有耗均匀介质中电场 $\boldsymbol{E}$ 所满足的方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

(2) 试证 $\boldsymbol{E}(z, t) = \hat{\boldsymbol{x}} \exp(-k_{\mathrm{I}} z) \cos(k_{\mathrm{R}} z - \omega t)$ 是该方程的解, 并求出 k_{I} 和 k_{R} 的值.

(3) 试证有耗均匀介质中磁场 $\boldsymbol{H}$ 所满足的方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0$$

4. (1) 试证以下电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 [\hat{\boldsymbol{x}} \cos(kz - \omega t) + \hat{\boldsymbol{y}} \sin(kz - \omega t)]$$

满足波动方程, 且它们是左旋圆极化波.

(2) 证明, 在 $t=0$ 时刻 $\boldsymbol{E}$ 矢量端点轨迹沿 z 轴形成右手螺旋线, 如图 1-12 所示. 螺旋线方程为

$$x=R\cos\left(\frac{2\pi}{p}z\right),\quad y=R\sin\left(\frac{2\pi}{p}z\right)$$

求出其中螺距 p.

5. 设时谐场用复数表示并取时谐因子为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 试求左旋和右旋圆极化波的电场直角分量之比 $\dfrac{E_x}{E_y}=?$ 又问如果时谐因子取为 $\exp(+\mathrm{j}\omega t)$, 比值 $\dfrac{E_x}{E_y}=?$

6. 平面上面电流的辐射. 设 $z=0$ 面上有均匀面电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{x}}J_{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 如图 1-13 所示. 它将向两侧辐射平面波,

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]\\ \boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]\end{cases}\qquad (z>0)$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t+kz)]\\ \boldsymbol{H}_2=-\hat{\boldsymbol{y}}H_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t+kz)]\end{cases}\qquad (z<0)$$

设两侧介质为真空, 试由 Maxwell 方程和边界条件确定上式中 E_0, H_0 和 J_{s} 的关系为 $H_0=J_{\mathrm{s}}/2, E_0=\eta H_0, \eta=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

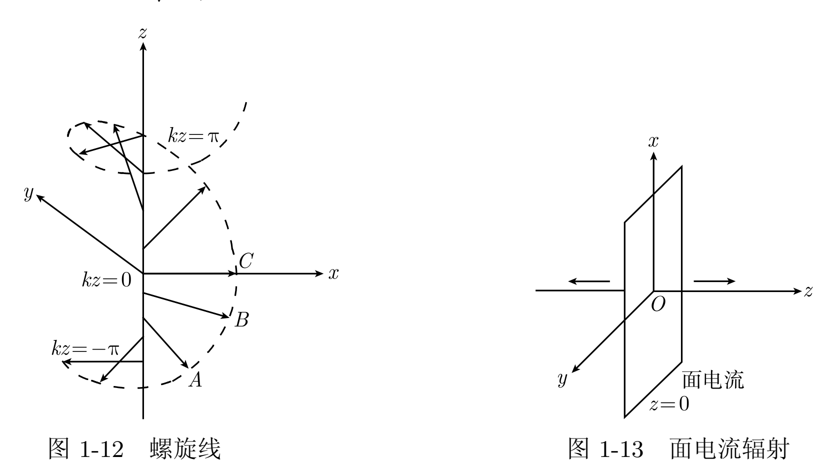


图 1-12　螺旋线　　　　图 1-13　面电流辐射

7. 平面上面磁流的辐射. 设 $z=0$ 面上有均匀面磁流 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{y}}M_{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. 它将向两侧辐射平面波,

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]\\ \boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]\end{cases}\qquad (z>0)$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_2=-\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t+kz)]\\ \boldsymbol{H}_2=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\exp[-\mathrm{i}(\omega\ t+kz)]\end{cases}\qquad (z<0)$$

设两侧介质为真空, 试由 Maxwell 方程和边界条件确定辐射平面波的幅值 E_0, H_0 和 M_s 的关系为 $E_0 = M_\mathrm{s}/2, H_0 = E_0/\eta, \eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

8. 非均匀各向同性介质 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ 中, 假设不存在自由电荷及电流, 并设介质为非磁性的, 即 $\mu = \mu_0$. 试证非均匀介质中的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E} + \nabla \left[\boldsymbol{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon(\boldsymbol{r})}{\varepsilon(\boldsymbol{r})} \right] = 0$$

9. 证明 Stokes 参数 I, Q, U, V 满足关系式 (1-56).

第 2 章　波动方程和平面波解

本章讨论时谐场情形的无源波动方程及其平面波解. 给出平面波在各向同性介质中的传播特性, 半空间介质分界面反射折射的 Fresnel 公式, 以及分层介质情形平面波反射透射的计算方法.

2.1　介质中平面波

2.1.1　时谐场平面波方程

均匀介质中时谐场无源 Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} \\ &\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

由此可得电场的波动方程 (Helmholtz 方程),

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} = 0, \quad k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{2-2}$$

它的平面波解为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{2-3}$$

式中, $\boldsymbol{k}$ 为波矢量. 对于平面波, 式 (2-3) 求散度得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \nabla \cdot [\boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \\ &= \boldsymbol{E}_0 \cdot \nabla[\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \\ &= \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &= \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

求旋度运算有类似结果. 由此可见. 在平面波情形有以下算子对应关系:

$$\nabla \to \mathrm{i}\boldsymbol{k} \tag{2-4}$$

式 (2-3) 代入式 (2-1) 第一、二式, 并利用式 (2-4) 可得

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \\ &\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \frac{-1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

式 (2-3) 代入式 (2-1) 第三、第四式有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0 \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

由式 (2-5) 和式 (2-6) 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{-1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}\times\left(\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}\right) \\ &= \frac{-1}{\omega^2\mu\varepsilon}\left[\boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\right)-\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon}\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\right) \end{aligned}$$

上式对任何 $\boldsymbol{E}$ 成立, 故有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=k^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{2-7}$$

以上称为色散关系, 给出平面波波矢量与介质本构参数之间关系.

2.1.2 平面波特性: 无耗和有耗介质情形

下面分别讨论无耗和有耗介质中的平面波特性.

情形一: 无耗介质中平面波. 设 ε、μ 为实数, 由式 (2-5) 得

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E} \tag{2-8}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{k}}$ 为传播方向单位矢, 波阻抗 η 为

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},\quad 真空\ \eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\Omega$$

如果波矢量 $\boldsymbol{k}$ 为实数, 式 (2-8) 表明电磁场方向和传播方向三者相互垂直, 成右手螺旋关系, 如图 2-1 所示.

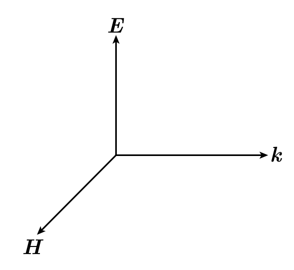


图 2-1 无耗介质中的平面波

无耗介质时, 波矢量 $\boldsymbol{k}$ 也可能是复数, 设

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$$

代入式 (2-3) 得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\exp(-\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{r})$$

式中, $\exp(-\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{r})$ 表示振幅衰减, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$ 为波的衰减方向; $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{r})$ 代表波的相位传播, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$ 为波的传播方向. 上式代入式 (2-7) 得

$$\left.\begin{array}{l}k_{\mathrm{R}}^2-k_{\mathrm{I}}^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ 2\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}=0\qquad\Rightarrow\quad\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\perp\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}\end{array}\right\}$$

可见在无耗介质中, 如果波矢量 $\boldsymbol{k}$ 是复数, 波的衰减方向必定与其传播方向相互垂直, 或者说波的等振幅面与等相位面相互垂直. 以后将要讨论的全反射时的透射波就属于这一类非均匀平面波.

情形二：有耗介质中平面波. 设介电系数为复数 $\varepsilon=\varepsilon'+\mathrm{i}\sigma/\omega$, μ 为实数, 这时波矢量为复数,

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}\tag{2-9}$$

式 (2-9) 代入式 (2-7) 得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=k_{\mathrm{R}}^2-k_{\mathrm{I}}^2+\mathrm{i}2\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}=\omega^2\mu\varepsilon=\omega^2\mu\left(\varepsilon'+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)\tag{2-10}$$

式 (2-9) 代入式 (2-3) 得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp\left[-(\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{r})\right]\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]\tag{2-11}$$

式中, $\exp\left[-(\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{r})\right]$ 表示振幅衰减, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$ 为等振幅面的传播方向; $\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]$ 代表波的相位传播, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$ 为等相位面的传播方向. 在有耗介质中等振幅面与等相位面可能不一致, 称为非均匀平面波. 由式 (2-10) 得到

$$\left.\begin{array}{l}k_{\mathrm{R}}^2-k_{\mathrm{I}}^2=\omega^2\mu\varepsilon'\\ 2\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}=\omega\mu\sigma\end{array}\right\}\tag{2-12}$$

式中, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$ 之间的夹角为未知. 在半空间介质反折射情况需要通过边界条件才可确定. 这里, 先讨论 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$ 之间为平行的特殊情形, 例如平面波垂直于有耗介质表面入射时的透射波. 若 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}//\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$, 这时式 (2-12) 变为

$$\left.\begin{array}{l}k_{\mathrm{R}}^2-k_{\mathrm{I}}^2=\omega^2\mu\varepsilon'\\ 2k_{\mathrm{R}}\cdot k_{\mathrm{I}}=\omega\mu\sigma\end{array}\right\}\tag{2-13}$$

由此可解得 k_{R} 和 k_{I}:

$$\left.\begin{aligned} k_{\mathrm{R}}^2 &= \frac{\omega^2\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}\right)}+1\right] \\ k_{\mathrm{I}}^2 &= \frac{\omega^2\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}\right)}-1\right] \end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

为了便于讨论物理含义, 设波沿 z 传播, 由式 (2-11) 得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(-k_{\mathrm{I}} z\right) \cdot \exp\left[\mathrm{i}\left(k_{\mathrm{R}} z - \omega t\right)\right] \tag{2-15}$$

根据式 (2-15), 定义波的衰减长度 (透入深度) 为幅值衰减到 $\exp(-1) \approx 0.37$ 时的深度,

$$d_{\mathrm{p}} = \frac{1}{k_{\mathrm{I}}} \tag{2-16}$$

在 $z = 5d_{\mathrm{p}}$ 处, 波已衰减为 $|E/E_0| = \exp(-5) \approx 0.0067$. 由式 (2-15) 可得波的相速为

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k_{\mathrm{R}}} \tag{2-17}$$

2.1.3 良导体和弱导电介质情形

常用到介质为良导体和弱导电介质两种特殊情形. 在良导体情形有

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} \gg 1, \quad k_{\mathrm{R}} \approx k_{\mathrm{I}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad v_{\text{phase}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad d_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{2-18}$$

这时透入深度只是一个很小的值. 铜为良导体, $\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_0$, 电导率 $\sigma = 58 \times 10^6$ S/m, 其他几种金属的电导率如表 2-1 所示. 由式 (2-18) 计算得到电磁波在铜介质中传播时几个频率下的数据如表 2-2 所示.

表 2-1 几种金属的电导率

材料	σ/(S/m)	材料	σ/(S/m)
金	41×10^6	铝	37.2×10^6
银	61.7×10^6	黄铜	15.7×10^6
铜	58×10^6	焊锡	7.06×10^6

表 2-2 良导体铜中的电磁波参数

	50Hz	1MHz	30GHz
真空中波长	6000km	300m	10mm
介质中波长	5.8×10^{-2} m	4.1×10^{-4} m	2.4×10^{-6} m
介质中波速	2.9 m/s	410m/s	7.1×10^4 m/s
介质中衰减长度	9.3×10^{-3} m	6.6×10^{-5} m	3.8×10^{-7} m

对于弱导电介质,

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} \ll 1, \quad k_{\mathrm{R}} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}, \quad k_{\mathrm{I}} \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}, \quad d_{\mathrm{p}} = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} \tag{2-19}$$

这时透入深度和频率无关. 波的相速 $v_{\text{phase}} = \omega/k_{\mathrm{R}} \simeq 1\sqrt{\mu\varepsilon'}$ 近似等于无耗介质情形.

2.1.4 相速群速和等离子体介质

设平面波沿 z 传播, 信号携带多个频率成分, 但为窄带信号. 为了讨论简单, 假设仅包含两个相近的频率成分, ω_1 和 ω_2, 即

$$E = E_0 \exp\{\mathrm{i}[k(\omega_1)z - \omega_1 t]\} + E_0 \exp\{\mathrm{i}[k(\omega_2)z - \omega_2 t]\} \tag{2-20}$$

且

$$\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$$

式中, $\Delta\omega \ll \omega_0$, ω_0 称为中心频率. 利用 Taylor 展开,

$$\left.\begin{aligned} k(\omega_1) = k(\omega_0 + \Delta\omega) \simeq k(\omega_0) + \Delta\omega \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \\ k(\omega_2) = k(\omega_0 - \Delta\omega) \simeq k(\omega_0) - \Delta\omega \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \end{aligned}\right\} \tag{2-21}$$

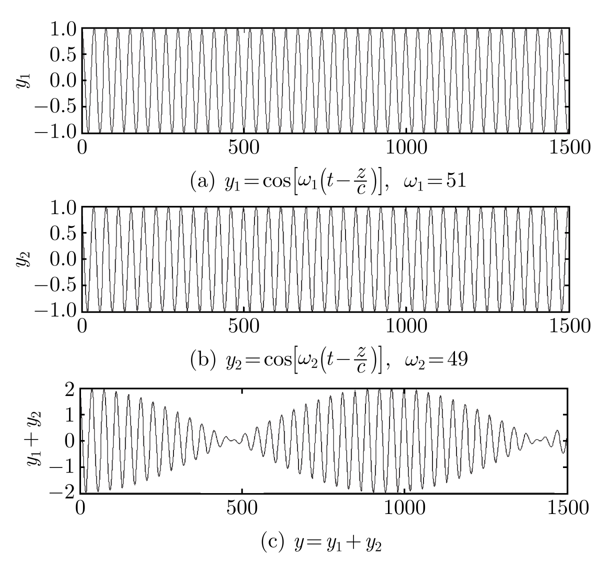
式 (2-21) 代入式 (2-20) 得

$$E = 2E_0 \cos\left[\Delta\omega\left(\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0} z - t\right)\right] \cdot \exp\{\mathrm{i}[k(\omega_0)z - \omega_0 t]\} \tag{2-22}$$

式中, 右端余弦项为振幅因子, 指数项为相位因子. 注意函数形式 $f(z - vt)$ 或 $f(t - (z/v))$ 中 v 表示传播速度. 所以, 式 (2-22) 表明窄带信号的传播应当区分两种传播速度：其一为相速, 即相位因子传播速度; 其二为群速, 即振幅因子传播速度,

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{phase}} &= \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} = \left.\frac{\omega}{k}\right|_{\omega=\omega_0} \\ v_{\text{group}} &= \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega=\omega_0} \end{aligned}\right\} \tag{2-23}$$

式 (2-23) 对于一般窄带信号适用. 频率相近的两个正弦波图 2-2(a) 和图 2-2(b), 相加后的波形如图 2-2(c) 所示. 由图 2-2(c) 可见, 相加后波形的包络具有余弦 (正弦) 形式.



(a) $y_1=\cos\left[\omega_1\left(t-\frac{z}{c}\right)\right],\ \omega_1=51$

(b) $y_2=\cos\left[\omega_2\left(t-\frac{z}{c}\right)\right],\ \omega_2=49$

(c) $y=y_1+y_2$

图 2-2　频率相近的两个波的合成

对于通常无耗介质, 由式 (2-3), $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, 且 μ,ε 与频率无关. 这时, $\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega=\sqrt{\mu\varepsilon}$, 所以 $v_{\text{phase}}=v_{\text{group}}=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. 但是, 如果 μ,ε 与频率有关, 或者波数 k 不是频率 ω 的线性函数, 这时 $v_{\text{phase}}\neq v_{\text{group}}$, 且和频率有关, 这一类介质称为色散介质.

等离子体 (plasma) 是介质中分子、原子电离后的一种特殊状态, 由电子 (带负电) 和正离子组成, 总体呈电中性. 等离子体是一种色散介质, 其介电系数为

$$\varepsilon_{\text{plasma}}=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}\right)\tag{2-24}$$

式中, 参数

$$\omega_{\text{p}}=\sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}\tag{2-25}$$

称为等离子体频率, 或等离子体电子震荡频率, 或 Langmuir 频率. 式 (2-25) 中 N 为电子浓度, $q=-1.6\times10^{-19}\text{C}$ 为电子电量, $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$ 为电子质量.

在太阳紫外线、X 射线和高能粒子的作用下, 使地球高层 60~1000km 的大气中分子和原子部分电离或完全电离, 产生自由电子和正、负离子, 形成等离子体区域. 地球上空 60~450km 范围通常称为电离层 (ionosphere), 该层电子浓度约为 $N=1.12\times10^{11}\text{m}^{-3}$. 电离层又可分为 D 层、E 层和 F 层等, 其中 F 层还可分为 F1 层和 F2 层. 图 2-3 为地球中纬度地区夜间和白天电离层电子密度的典型高度分布, 各层电子浓度的最大值如表 2-3 所示. 实际上电离层是在变化的, 主要表现为电子密度随时间 (昼夜、季节和太阳活动周期) 和空间 (高度和经纬度) 的变

化. 在 55 公里高度以下的区域中, 大气相对稠密, 碰撞频繁, 自由电子消失很快, 气体保持不导电性质. 在电离层顶部, 大气异常稀薄, 电离的迁移运动主要受地球磁场的控制, 称为磁层. 也有人把整个电离的大气称为电离层, 磁层看作电离层的一部分.

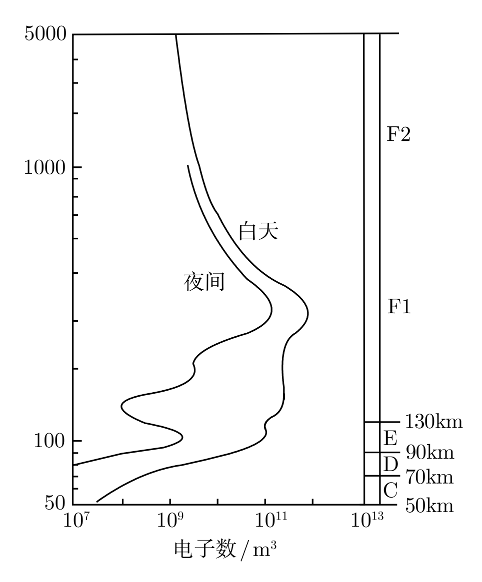


图 2-3　电离层电子密度的典型高度分布

表 2-3　电离层各层电子浓度的最大值

	D 层	E 层	F1 层	F2 层
高度范围/km	60～90	90～150	150～200	200～500
电子浓度最大值/(个/m^3)	$10^9\sim10^{10}$	$10^9\sim10^{11}$	10^{11}	$10^{11}\sim10^{12}$
电子浓度最大值所在高度/km	约 70	约 110	190～200	约 300

下面考虑等离子体中的平面波特性. 由式 (2-3)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{2-26}$$

式中, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$. 对于等离子体 $\mu=\mu_0$, 将式 (2-24) 代入得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=k^2=\omega^2\mu\varepsilon=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right) \tag{2-27}$$

为了简单, 设波矢量 $\boldsymbol{k}$ 沿 z 方向, 即 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kz$. 区分以下两种情形:

情形一: 电磁波频率大于等离子体频率, $\omega>\omega_\mathrm{p}$, 由式 (2-27) 可得

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}=\left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{c}\right)\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_\mathrm{p}^2}-1} \tag{2-28}$$

式中, $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 为真空中波速. 根据式 (2-23) 波的相速和群速分别为

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{phase}} &= \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1-\dfrac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}}} \\ v_{\text{group}} &= \frac{1}{\dfrac{\partial k}{\partial \omega}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}} \end{aligned}\right\} \tag{2-29}$$

这时, 等离子体中相速 $v_{\text{phase}} > c$, 但群速 $v_{\text{group}} < c$, 且 $v_{\text{phase}} \cdot v_{\text{group}} = c^2$. 按照式 (2-28), k 随 ω/ω_{p} 变化关系如图 2-4 所示. 如果工作频率远大于等离子体频率, $\omega \gg \omega_{\text{p}}$, 式 (2-28) 可近似为

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\omega_{\text{p}}^2}{2\omega^2}\right) \tag{2-30}$$

所以如图 2-4 所示色散曲线以直线 $k=\omega/c$ 为渐近线.

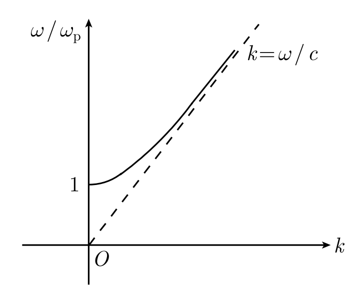


图 2-4　等离子体色散关系曲线

情形二：电磁波频率小于等离子体频率, $\omega < \omega_{\text{p}}$, 由式 (2-27) 可得 $k=\text{i}k_{\text{I}}$,

$$k_{\text{I}}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}-1}$$

代入式 (2-26) 得到

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(\text{i}kz)\exp(\text{i}\omega t)=\boldsymbol{E}_0\exp(-k_{\text{I}}z)\exp(\text{i}\omega t)$$

这时电磁波沿 z 方向呈指数衰减, 没有传播.

电离层中电子密度约为 $N=1.12\times10^{11}\text{m}^{-3}$, 其他参数为 $q=-1.6\times10^{-19}\text{C}$, $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$, $\varepsilon=\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\text{F/m}$, 以上数据代入式 (2-25) 可得相应等离子体频率为

$$\omega_{\text{p}}=\sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{1.12\times10^{11}\times1.6^2\times10^{-38}}{9.1\times10^{-31}\times8.85\times10^{-12}}}$$

$$= \sqrt{0.0356 \times 10^{16}} = 0.189 \times 10^{8}\text{Hz} \approx 19\text{MHz}$$

根据以上讨论, 当 $\omega > \omega_{\rm p}$, 即超过等离子体频率的电磁波可以穿过电离层传播; 如果 $\omega < \omega_{\rm p}$, 即低于等离子体频率的电磁波则不能在电离层中传播, 被反射回地面. 短波通信使用频段 3MHz~30MHz, 目的是地面发射的电磁波能够被电离层反射返回地面以达到远距离通信. 1901 年 Marconi(马可尼, 1874 — 1937) 使用风筝竖起的 400 英尺天线, 从英国发送信号 (频率约 500kHz), 在加拿大东南角讯号山 (Signal Hill) 接收, 首次实现横过大西洋约 3540km 的无线电信号传送. 实际上这个信号已经两次被电离层反射. 卫星通信使用微波频段 300MHz 至 30GHz, 采用高频信号的目的是保证地面上发射的电磁波能够穿透电离层到达卫星. 电离层对电波传播有极大影响, 详细讨论参见焦培南和张忠治 (2007). 现在电离层的应用涉及到无线电通讯、广播、导航、雷达定位以及宇宙航行等领域.

2.2　半空间反射和折射

2.2.1　相位匹配条件和 Snell 定律

平面波传播遇到界面时将产生反射和透射. 设两种介质的分界面位于 z =0, 如图 2-5 所示. 入射波从介质 1 入射, 在介质 1 中有入射波和反射波, 介质 2 中有透射波. 在 z =0 分界面的边界条件要求电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续, 电场切向分量可以写为

$$E_{\rm i}^{\rm tan} \exp\left[{\rm i}\left(k_{{\rm i}x}x + k_{{\rm i}y}y\right)\right] + E_{\rm r}^{\rm tan} \exp\left[{\rm i}\left(k_{{\rm r}x}x + k_{{\rm r}y}y\right)\right] = E_{\rm t}^{\rm tan} \exp\left[{\rm i}\left(k_{{\rm t}x}x + k_{{\rm t}y}y\right)\right] \tag{2-31}$$

式中, 上标 tan 表示切向分量. 式 (2-31) 对任何 (x, y) 成立, 必有

$$\begin{aligned} k_{{\rm i}x} = k_{{\rm r}x} = k_{{\rm t}x} = k_x \\ k_{{\rm i}y} = k_{{\rm r}y} = k_{{\rm t}y} = k_y \end{aligned} \tag{2-32}$$

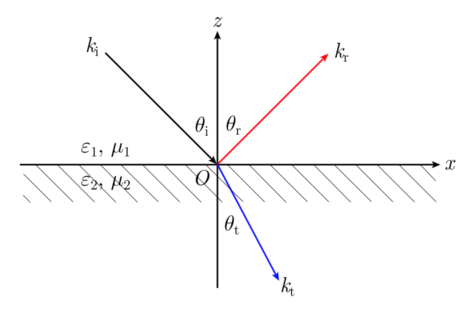


图 2-5　入射波、反射波和透射波

式 (2-32) 表明, 入射波、反射波和透射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}},\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}},\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}$ 在分界面处的切向分量为连续. 这时由式 (2-31) 可见在分界面处入射波、反射波、透射波的相位彼此相等, 这一结论也称为相位匹配条件. 由式 (2-32) 可见, 入射波、反射波和透射波的波矢量处于同一平面内, 该平面称为入射面.

相位匹配条件可以用 $\boldsymbol{k}$ 空间图示说明. 为了方便, 设 $k_y=0$, 即 xoz 为入射面. 光学中定义折射率 $n_1=\sqrt{(\mu_1\varepsilon_1)/(\mu_0\varepsilon_0)}$, μ_0,ε_0 为真空参数. 设 $n_1<n_2$, 即波从折射率较小 (光疏) 介质入射到折射率较大 (光密) 介质, 如图 2-6(a) 所示. 介质中波数可写为

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_{1r}\varepsilon_{1r}}=n_1\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$
$$k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_{2r}\varepsilon_{2r}}=n_2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

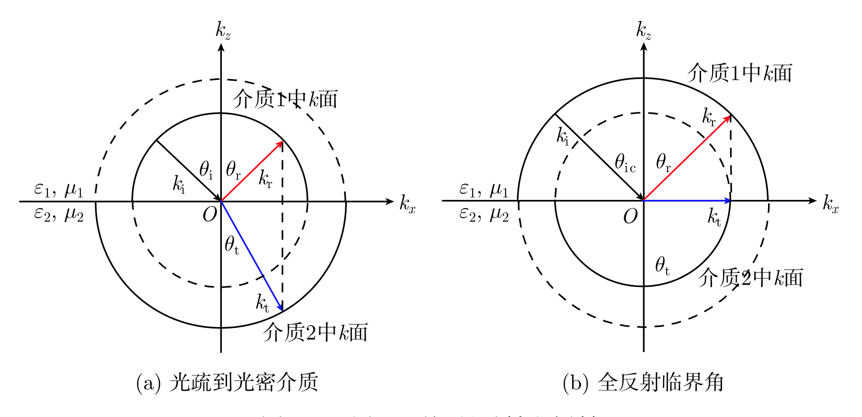
式中, n 为折射率. 对于入射波和反射波 $k_{\mathrm{i}}=k_{\mathrm{r}}=k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$, 对于透射波 $k_{\mathrm{t}}=k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$. 根据式 (2-32) 波矢量的 x 分量相等, 得到

$$k_{\mathrm{i}x}=k_1\sin\theta_{\mathrm{i}}=k_{\mathrm{r}x}=k_1\sin\theta_{\mathrm{r}}=k_{\mathrm{t}x}=k_2\sin\theta_{\mathrm{t}}$$

于是, $\theta_{\mathrm{r}}=\theta_{\mathrm{i}}$, 以及

$$\frac{\sin\theta_{\mathrm{t}}}{\sin\theta_{\mathrm{i}}}=\frac{k_1}{k_2}=\frac{\sqrt{\mu_{1\mathrm{r}}\varepsilon_{1\mathrm{r}}}}{\sqrt{\mu_{2\mathrm{r}}\varepsilon_{2\ \mathrm{r}}}}=\frac{n_1}{n_2} \tag{2-33}$$

以上为 Snell 定律.



(a) 光疏到光密介质　　(b) 全反射临界角

图 2-6　用 k 面解释反射和折射

如果 $n_1>n_2$ (从光密介质到光疏介质), 则有 $\sin\theta_{\mathrm{t}}>\sin\theta_{\mathrm{i}}$. 当折射角 $\theta_{\mathrm{t}}=90^\circ$, $\sin\theta_{\mathrm{t}}=1$, 相应的入射角称为全反射临界角 θ_{ic}, 由式 (2-33) 可得

$$\sin\theta_{\mathrm{ic}}=\frac{n_2}{n_1} \tag{2-34}$$

当 $\theta_{\mathrm{i}}=\theta_{\mathrm{ic}}$ 时, 折射角为 90°, 折射波矢量刚好与 k_x 轴平行, 如图 2-6(b) 所示. 如果入射角大于临界角 $\theta_{\mathrm{i}}>\theta_{\mathrm{ic}}$ 为全反射, 折射波矢量将不能在 k 空间给出图示.

2.2.2 TE 和 TM 波的分解

设入射面为 xoz, 如图 2-5 所示, 且 $\partial/\partial y=0$, Maxwell 方程的直角分量式变为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial y}}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=\mathrm{i}\omega\mu H_x\\[2mm]\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=\mathrm{i}\omega\mu H_y\\[2mm]\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\cancel{\dfrac{\partial E_x}{\partial y}}=\mathrm{i}\omega\mu H_z\end{cases}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cancel{\dfrac{\partial H_z}{\partial y}}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_x\\[2mm]\dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_y\\[2mm]\dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\cancel{\dfrac{\partial H_x}{\partial y}}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_z\end{cases}$$

以上方程可以区分为相互独立的两组方程, 即

$$\begin{array}{cc}\text{TE} & \text{TM}\\ \left.\begin{aligned}&H_x=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}\\&H_z=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}\\&E_y=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} & \left.\begin{aligned}&E_x=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}\\&E_z=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}\\&H_y=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\end{array}\tag{2-35}$$

式中, 一组具有 E_y,H_x,H_z 分量, 称为对 z 的 TE 波 (横电波), 或水平极化波, 或 s 波. 另一组具有 H_y,E_x,E_z 分量, 称为对 z 的 TM 波 (横磁波), 或垂直极化波, 或 p 波. 由式 (2-35) 可得场的横向分量 E_y,H_y 均满足

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega^2\mu\varepsilon\right)E_y=0\\&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega^2\mu\varepsilon\right)H_y=0\end{aligned}\right\}\tag{2-36}$$

式 (2-36) 为 Helmholtz 方程. 结合边界条件求解 Helmholtz 方程确定 E_y,H_y 后, 再利用式 (2-35) 便可由 E_y 得到 H_x,H_z, 由 H_y 得到 E_x,E_z.

式 (2-35) 的两组方程具有对偶性 (duality). 当边界条件也具有对偶性时, TE 和 TM 波之间具有以下对偶关系：

$$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{E} & \to & \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H} & \to & -\boldsymbol{E} \\ \varepsilon & \to & \mu \\ \mu & \to & \varepsilon \end{array}\right\} \tag{2-37}$$

2.2.3 Fresnel 公式

首先讨论半空间 TE 波的反射和透射, 如图 2-7 所示. 区域 0 中电磁场为

$$\left.\begin{aligned} E_y &= [E_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z) + RE_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ H_x &= -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{k_{0z}}{\omega\mu_0}[E_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z) - RE_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ H_z &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{k_x}{\omega\mu_0}[E_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z) + RE_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \end{aligned}\right\} \tag{2-38}$$

式中, R 为反射系数. 区域 t 中的电磁场为

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{t}y} &= TE_0 \exp(-\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z) \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ H_{\mathrm{t}x} &= -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\mathrm{t}}}\frac{\partial E_{\mathrm{t}y}}{\partial z} = \frac{k_{\mathrm{t}z}}{\omega\mu_{\mathrm{t}}}TE_0 \exp(-\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z) \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ H_{\mathrm{t}z} &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\mathrm{t}}}\frac{\partial E_{\mathrm{t}y}}{\partial x} = \frac{k_x}{\omega\mu_{\mathrm{t}}}TE_0 \exp(-\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z) \exp(\mathrm{i}k_x x) \end{aligned}\right\} \tag{2-39}$$

式中, T 为透射系数. 根据相位匹配条件, 入射波、反射波和透射波波矢量的 x 分量相等, 即 $k_{0x} = k_{\mathrm{t}x} = k_x$. 介质色散关系为

$$\left.\begin{aligned} k_x^2 + k_{0z}^2 = k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \\ k_x^2 + k_{\mathrm{t}z}^2 = k_{\mathrm{t}}^2 = \omega^2\mu_{\mathrm{t}}\varepsilon_{\mathrm{t}} \end{aligned}\right\} \tag{2-40}$$

设界面为 $z=0$, 根据 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 切向分量连续的边界条件, 由式 (2-38) 和式 (2-39) 可得

$$(1+R) = T$$

$$\frac{k_{0z}}{\mu_0}(1-R) = \frac{k_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}}}T$$

解之得

$$R = \frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}}, \quad T = \frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}} \tag{2-41}$$

式中，

$$p_{0\mathrm{t}} = p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}} = \frac{\mu_0 k_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}} k_{0z}} \tag{2-42}$$

代表 TE 波情形的系数.

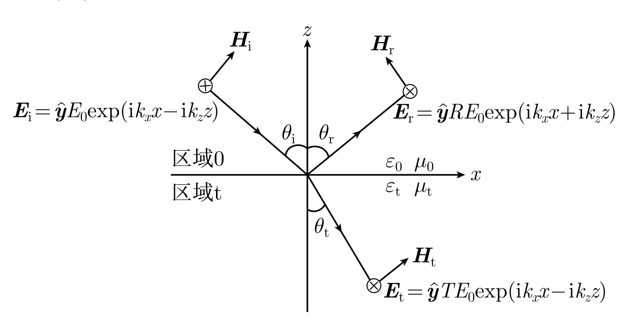


图 2-7 分界面波的反射和折射：TE 波

可以证明, 如果界面不是 $z = 0$, 而是 $z = -d_0$, 则反射波和透射波的相位与界面位置有关, 这时反射系数增加一个相移 $2k_{0z}d_0$, 而透射系数增加相移为 $(k_{0z} - k_{\mathrm{t}z})d_0$.

在全反射情况, 式 (2-40) 第二式中 $k_x^2 > \omega^2 \mu_{\mathrm{t}} \varepsilon_{\mathrm{t}}$. 于是 $k_{\mathrm{t}z}$ 为虚数, 记为 $k_{\mathrm{t}z} = \mathrm{i}\alpha_{\mathrm{t}z}$. 式中, $\alpha_{\mathrm{t}z}$ 为正实数. 式 (2-42) 变为

$$p_{0\mathrm{t}} = p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}} = \frac{\mu_0 k_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}} k_{0z}} = \mathrm{i}\frac{\mu_0 \alpha_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}} k_{0z}} \tag{2-43}$$

式 (2-41) 中 R 变为

$$R = \frac{1 - p_{0\mathrm{t}}}{1 + p_{0\mathrm{t}}} = \frac{1 - \mathrm{i}\dfrac{\mu_0 \alpha_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}} k_{0z}}}{1 + \mathrm{i}\dfrac{\mu_0 \alpha_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}} k_{0z}}} = \exp(\mathrm{i}2\varphi), \quad \varphi = \varphi^{\mathrm{TE}} = -\arctan\left(\frac{\mu_0 \alpha_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}} k_{0z}}\right) \tag{2-44}$$

式 (2-44) 表明, 全反射时反射系数的模值等于 1. 但是, 反射波和入射波之间存在相移, 这一相移称为 Goos–Hänchen 相移, 或全反射相移. 在全反射情况, 由于 $k_{\mathrm{t}z} = \mathrm{i}\alpha_{\mathrm{t}z}$ 为虚数, 代入式 (2-39) 可见透射波沿 z 呈指数衰减.

对于 TM 波, 如图 2-8 所示, 区域 0 和区域 t 中电磁场为

$$\left.\begin{aligned} H_y &= [H_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z) + RH_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x), \quad z > 0 \\ E_x &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{-k_{0z}}{\omega\varepsilon_0}[H_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z) - RH_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ E_z &= \frac{-1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{-k_x}{\omega\varepsilon_0}[H_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z) + RH_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \end{aligned}\right\} \tag{2-45}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
H_{\mathrm{t}y} &= TH_0 \exp\left(-\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z\right) \exp\left(\mathrm{i}k_x x\right), \quad z<0 \\
E_{\mathrm{t}x} &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}} \frac{\partial H_{\mathrm{t}y}}{\partial z} = -\frac{k_{\mathrm{t}z}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}} TH_0 \exp\left(-\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z\right) \exp\left(\mathrm{i}k_x x\right) \\
E_{\mathrm{t}z} &= -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}} \frac{\partial H_{\mathrm{t}y}}{\partial x} = -\frac{k_x}{\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}} TH_0 \exp\left(-\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z\right) \exp\left(\mathrm{i}k_x x\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2-46}$$

同样, 由边界条件或对偶性关系 (2-37) 可得

$$R = \frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}}, \quad T = \frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}} \tag{2-47}$$

式中,

$$p_{0\mathrm{t}} = p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{t}z}}{\varepsilon_{\mathrm{t}} k_{0z}} \tag{2-48}$$

在全反射情况, TM 波的 Goos–Hänchen 相移为

$$R = \frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{1-\mathrm{i}\dfrac{\varepsilon_0\alpha_{\mathrm{t}z}}{\varepsilon_{\mathrm{t}}k_{0z}}}{1+\mathrm{i}\dfrac{\varepsilon_0\alpha_{\mathrm{t}z}}{\varepsilon_{\mathrm{t}}k_{0z}}} = \exp\left(\mathrm{i}2\varphi\right), \quad \varphi = \varphi^{\mathrm{TM}} = -\arctan\left(\frac{\varepsilon_0\alpha_{\mathrm{t}z}}{\varepsilon_{\mathrm{t}}k_{0z}}\right) \tag{2-49}$$

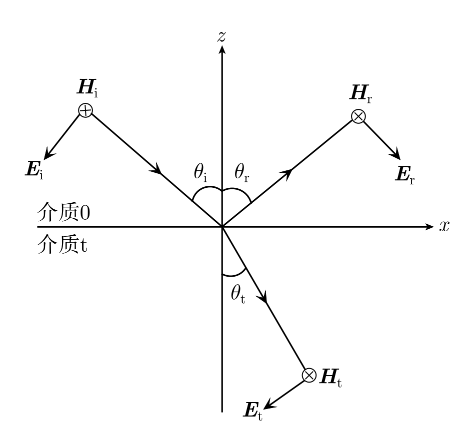


图 2-8 分界面波的反射和折射：TM 波

虽然 TE 与 TM 波的 Fresnel 系数有对偶性, 但 TE 与 TM 波的反射、透射系数分别定义为电场和磁场的比值, 即

$$R^{\mathrm{TE}} = \frac{E_{y\text{反射}}}{E_{y\text{入射}}}, \quad T^{\mathrm{TE}} = \frac{E_{y\text{透射}}}{E_{y\text{入射}}}$$

$$R^{\mathrm{TM}} = \frac{H_{y\text{反射}}}{H_{y\text{入射}}}, \quad T^{\mathrm{TM}} = \frac{H_{y\text{透射}}}{H_{y\text{入射}}}$$

在应用公式时应当注意二者的区别.

在垂直入射情形, $k_{0x}=k_{tx}=k_x=0$, 由 TE 波的式 (2-41) 和式 (2-42) 得到

$$\left.\begin{aligned} p_{0\mathrm{t}} &= \frac{\mu_0 k_\mathrm{t}}{\mu_\mathrm{t} k_0} = \frac{\mu_0\sqrt{\mu_\mathrm{t}\varepsilon_\mathrm{t}}}{\mu_\mathrm{t}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_\mathrm{t}}}{\sqrt{\mu_\mathrm{t}\varepsilon_0}} = \frac{\eta_0}{\eta_\mathrm{t}} \\ R &= \frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{1-\dfrac{\eta_0}{\eta_\mathrm{t}}}{1+\dfrac{\eta_0}{\eta_\mathrm{t}}} = \frac{\eta_\mathrm{t}-\eta_0}{\eta_\mathrm{t}+\eta_0} \\ T &= \frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{2}{1+\dfrac{\eta_0}{\eta_\mathrm{t}}} = \frac{2\eta_\mathrm{t}}{\eta_\mathrm{t}+\eta_0} \end{aligned}\right\} \tag{2-50}$$

式中, η_0, η_t 分别为界面两侧的介质波阻抗. 如果 $\mu_\mathrm{t}=\mu_0$, 式 (2-50) 变为

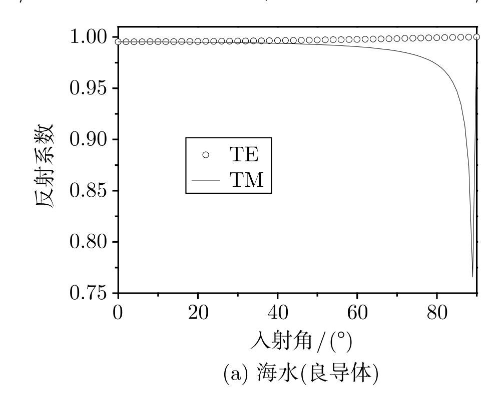
$$p_{0\mathrm{t}} = \frac{\mu_0 k_\mathrm{t}}{\mu_\mathrm{t} k_0} = \frac{\mu_0\sqrt{\mu_\mathrm{t}\varepsilon_\mathrm{t}}}{\mu_t\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}}$$

$$R = \frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}}}{1+\dfrac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}$$

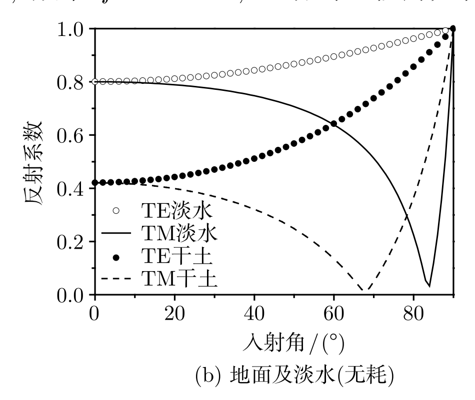
$$T = \frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{2}{1+\dfrac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon_\mathrm{t}}}$$

由 TM 波得出垂直入射情形的结果和以上公式不同, 因为这时反射和透射系数代表磁场的比值.

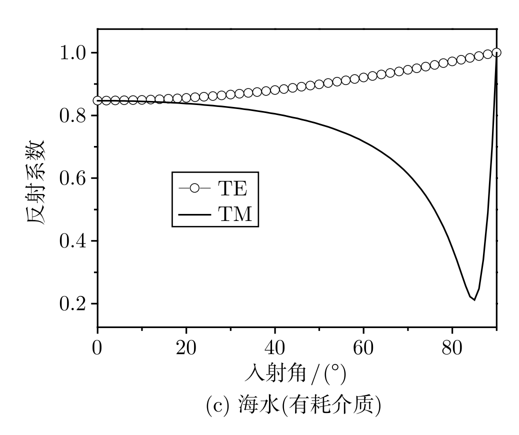
算例：由 Fresnel 公式计算地球表面不同介质的反射系数 $\left|R^{\mathrm{TE}}\right|$ 和 $\left|R^{\mathrm{TM}}\right|$, 结果如图 2-9 所示. 反射系数定义为反射波和入射波电场幅值之比. (a) 为海水 $\varepsilon_\mathrm{r}=81, \sigma=3$ S/m, 频率 f =600KHz, 满足良导体条件. (b) 为干土壤 $\varepsilon_\mathrm{r}=6, \sigma=10^{-5}$ S/m 和淡水 $\varepsilon_\mathrm{r}=81, \sigma=2\times10^{-4}$ S/m, 频率 f =600kHz, 二者均近似为无耗



(a) 海水(良导体)



(b) 地面及淡水(无耗)



(c) 海水(有耗介质)

图 2-9 无线电波在地球表面的反射

介质. (c) 为海水 $\varepsilon_{\mathrm{r}}=81, \sigma=3$ S/m, 频率 f =600MHz, 是有耗介质. 可见, 对于任何入射角都有 $\left|R^{\mathrm{TE}}\right|>\left|R^{\mathrm{TM}}\right|$ (Stratton, 1941:509).

2.2.4 理想导体表面的反射

电磁波不可透入理想导体内部, 只在其表面产生反射. 对于 TE 波, 如图 2-7 所示, 在 z =0 界面 $E_y|_{z=0}=0$, 由式 (2-38) 第一式可得 $R^{\mathrm{TE}}=-1$. 代入式 (2-38) 第二式可得反射波切向磁场等于入射波切向磁场.

对于 TM 波, 如图 2-8 所示, 在 z =0 界面 $E_x|_{z=0}=0$, 由式 (2-45) 第二式可得 $R^{\mathrm{TM}}=+1$, 代入式 (2-45) 第一式得到分界面处反射波切向磁场等于入射波切向磁场. 此外, 由式 (2-45) 第三式可得反射波法向电场等于入射波法向电场.

一般而言, 由理想导体表面边界条件得出其表面电场的切向分量和磁场的法向分量等于零. 对于理想导体表面为平面的特殊情形, 无论 TE 或 TM 情形, 反射波磁场的切向分量等于入射波磁场切向分量, 即分界面处总场的磁场切向分量等于入射波磁场切向分量的 2 倍; 以及反射波电场的法向分量等于入射波电场法向分量, 即分界面处总场的电场法向分量等于入射波电场法向分量的 2 倍. 这一结论在以后分析中将要用到.

2.2.5 Brewster 定律

下面考虑两种介质分界面无反射的特殊情形. 设两侧介质均为非磁性介质, 即 $\mu_{\mathrm{t}}=\mu_0$, 且均为真空导磁系数. 对于 TM 波, 由式 (2-47), 欲使 $R^{\mathrm{TM}}=0$, 要求

$$1-p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}=1-\frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{t}z}}{\varepsilon_{\mathrm{t}} k_{0z}}=0 \tag{2-51}$$

式中, ε_0 代表区域 0 的介电系数, 以下推导中改写为 $\varepsilon_0\varepsilon_{1\mathrm{r}}$, 并记 $\varepsilon_{\mathrm{t}}=\varepsilon_0\varepsilon_{2\mathrm{r}}$, ε_0 代表真空介电系数. 于是式 (2-51) 可写为

$$\varepsilon_0\varepsilon_{2\mathrm{r}}k_0\cos\theta_{\mathrm{i}}=\varepsilon_0\varepsilon_{1\mathrm{r}}k_{\mathrm{t}}\cos\theta_{\mathrm{t}}$$

$$\varepsilon_{2\mathrm{r}}\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{1\mathrm{r}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}=\varepsilon_{1\mathrm{r}}\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{2\mathrm{r}}}\cos\theta_{\mathrm{t}}$$

$$\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}=\sqrt{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}\cos\theta_{\mathrm{t}}$$

又由 Snell 定律式 (2-33), $\sqrt{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}\sin\theta_{\mathrm{i}}=\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}\sin\theta_{\mathrm{t}}$, 和上式相乘得

$$\sin\theta_{\mathrm{i}}\cos\theta_{\mathrm{i}}=\sin\theta_{\mathrm{t}}\cos\theta_{\mathrm{t}}$$

$$\sin2\theta_{\mathrm{i}}=\sin2\theta_{\mathrm{t}}$$

上式有两个解, 分别为

$$2\theta_{\mathrm{i}}=2\theta_{\mathrm{t}},\quad \theta_{\mathrm{i}}=\theta_{\mathrm{t}}$$

$$2\theta_{\mathrm{i}}=180^\circ-2\theta_{\mathrm{t}}\quad\Rightarrow\quad\theta_{\mathrm{i}}+\theta_{\mathrm{t}}=90^\circ$$

以上第一个解 $\theta_{\mathrm{i}}=\theta_{\mathrm{t}}$ 代入 Snell 定律导致 $\sqrt{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}=\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}$, 两侧为相同介质, 故舍去. 另一解 $\theta_{\mathrm{i}}+\theta_{\mathrm{t}}=90^\circ$ 代入 Snell 定律得

$$\sqrt{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}\sin\theta_{\mathrm{i}}=\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}\sin\theta_{\mathrm{t}}=\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}\sin(90^\circ-\theta_{\mathrm{i}})=\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}$$

所以

$$\theta_{\mathrm{i}}=\theta_{\mathrm{Brewster}}=\arctan\frac{\sqrt{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}}{\sqrt{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}}\tag{2-52}$$

该入射角称为 Brewster 角. 在此入射角下 $R^{\mathrm{TM}}=R^{\parallel}=0$, 电场平行于入射面的波没有反射. 这一现象称为 Brewster 定律. 若入射波为自然光 (非偏振光), 反射波成为电场垂直于入射面的偏振波, 所以 Brewster 角又称为起偏角.

算例：设入射波一侧介质为空气 $\varepsilon_{1\mathrm{r}}=1,\mu_{1\mathrm{r}}=1$, 另一侧介质为聚乙烯 $\varepsilon_{2\mathrm{r}}=2.56,\mu_{2\mathrm{r}}=1$. 由 Fresnel 公式计算得到反射系数 $\left|R^{\mathrm{TE}}\right|$ 和 $\left|R^{\mathrm{TM}}\right|$ 如图 2-10 所示. 由图可见, 当入射角 $\theta_{\mathrm{i}}=\theta_{\mathrm{Brewster}}=\arctan(\sqrt{2.56})\approx58^\circ$ 时有 $R^{\mathrm{TM}}=0$ (张善杰, 2009:94).

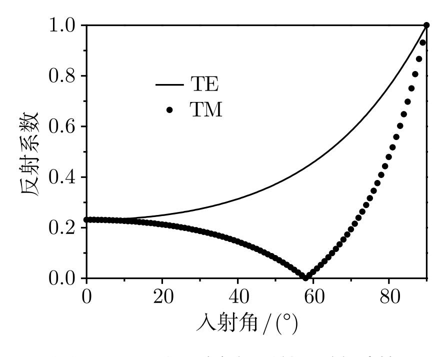


图 2-10 聚乙烯表面的反射系数

2.2.6　全反射

如前所述, 在电磁波从光密入射到光疏介质时全反射临界角为式 (3-34), 即

$$\theta_{\text{ic}} = \arcsin\frac{n_0}{n_{\text{t}}} = \arcsin\sqrt{\frac{\mu_{\text{t}}\varepsilon_{\text{t}}}{\mu_0\varepsilon_0}}$$

式中, n_{t} 为透射波一侧介质折射率. 由色散关系式 (2-40) 得透射波波矢量法向分量为

$$\begin{aligned} k_{\text{t}z} &= \sqrt{\omega^2\mu_{\text{t}}\varepsilon_{\text{t}} - k_x^2} \\ &= \sqrt{\omega^2\mu_{\text{t}}\varepsilon_{\text{t}} - k^2\sin^2\theta_{\text{i}}} \\ &= \sqrt{\omega^2\mu_{\text{t}}\varepsilon_{\text{t}} - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\sin^2\theta_{\text{i}}} \end{aligned}$$

设 $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} > \sqrt{\mu_{\text{t}}\varepsilon_{\text{t}}}$, 当入射角 $\theta_{\text{i}} > \theta_{\text{ic}}$, 导致 $k_{\text{t}z} = \text{i}\alpha_{\text{t}z}$ 为虚数. 代入式 (2-42)、式 (2-48) 可得 $p_{0\text{t}}^{\text{TE}}$、$p_{0\text{t}}^{\text{TM}}$ 为虚数, 因而反射系数 $|R| = 1$. 这时透射波变为

$$E_{\text{t}}, H_{\text{t}} \propto \exp(\text{i}k_{0x}x - \text{i}k_{\text{t}z}z) = \exp(+\alpha_{\text{t}z}z)\exp(\text{i}k_{0x}x)$$

即波沿 x 传播, 沿 $(-z)$ 方向衰减, 如图 2-11 所示. 全反射时的透射波为倏逝波, 没有垂直离开界面的能流.

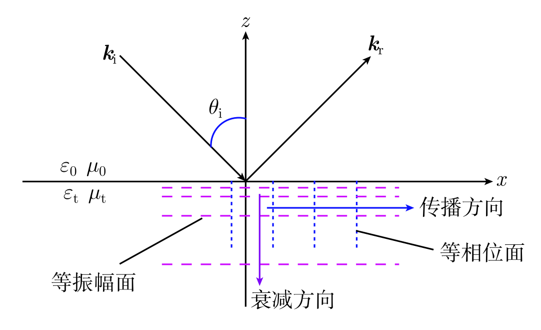
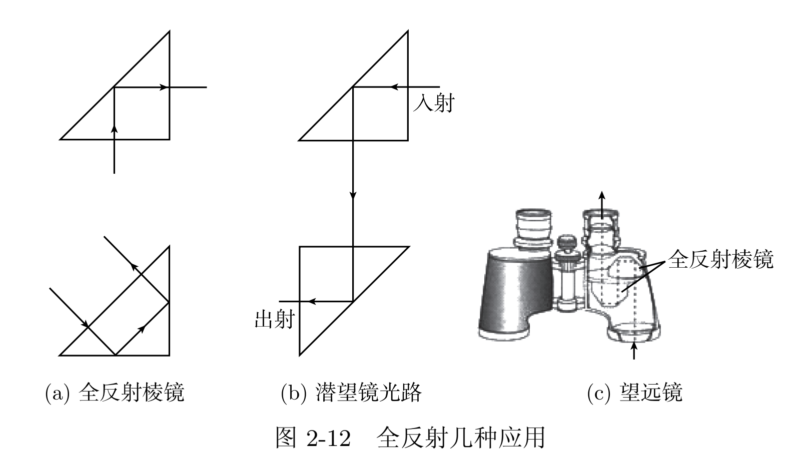


图 2-11　全反射时的透射波

全反射的应用例子如图 2-12 所示. 玻璃折射率为 $n = \sqrt{\varepsilon_{\text{r}}} \simeq 1.5$, 所以玻璃和空气界面的全反射临界角为 $\theta_{\text{ic}} = \arcsin\sqrt{\mu_{\text{t}}\varepsilon_{\text{t}}/(\mu_0\varepsilon_0)} = \arcsin(1/1.5) \approx 41.8°$. 当玻璃中的入射角等于 45° 时, 光线在玻璃与空气界面为全反射, 没有能量损失, 可以构成全反射棱镜, 用于潜望镜. 在望远镜中利用全反射棱镜的组合可实现射线转折和射线平移, 能在较小尺度空间中构成长焦距系统.



(a) 全反射棱镜　(b) 潜望镜光路　(c) 望远镜

图 2-12　全反射几种应用

2.2.7　良导体表面阻抗边界条件

设平面波垂直入射到良导体表面, 如图 2-13 所示. 由良导体条件式 (2-18), 良导体的复数介电系数为

$$\varepsilon_{\mathrm{w}}=\varepsilon_{\text{conductor}}=\varepsilon\left(1+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\approx\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega},\quad\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg1 \tag{2-53}$$

设良导体中的透射波为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{\mathrm{w}}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp(\mathrm{i}kz)\\&\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k}{\omega\mu_0}E_0\exp(\mathrm{i}kz)=\hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}}{\mu_0}}E_0\exp(\mathrm{i}kz)\end{aligned}\right\} \tag{2-54}$$

即电场和磁场之间满足关系式

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{w}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{w}}}}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}\approx\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{\mathrm{i}\sigma}}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}} \tag{2-55}$$

式 (2-55) 表明, 良导体表面电场切向分量不为零. 以上电场和磁场切向分量之间的关系式称为阻抗边界条件, 或 Leontovich 边界条件.

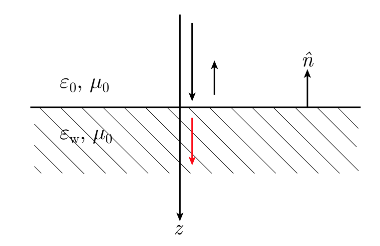


图 2-13　垂直入射导体表面的电磁波

如果平面波斜入射到良导体表面, 如图 2-14 所示. 由 Snell 定律, 根据良导体复数介电常数式 (2-53), 可得透射波矢量,

$$k^2 = k_x^2 + k_{tz}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_w$$

即

$$\begin{aligned} k_{tz}^2 &= k^2 - k_x^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_w - k_0^2 \sin^2 \theta_i \\ &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \sin^2 \theta_i \\ &\approx i\omega\mu_0\sigma \end{aligned}$$

式中, θ_i 为入射角, 上式又可写为

$$k_{tz} \approx \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \alpha_{tz} + i\alpha_{tz}, \quad \alpha_{tz} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \tag{2-56}$$

所以良导体中透射波为

$$E_t, H_t \propto \exp(ik_{0x}x + ik_{tz}z) = \exp(-\alpha_{tz}z)\exp(ik_{0x}x + i\alpha_{tz}z)$$

可见斜入射时透射波仍沿 z 方向衰减, 其衰减长度和式 (2-18) 相同, 与入射角无关. 图 2-14 中透射波传播方向 θ_t 为

$$\tan\theta_t = \frac{k_{0x}}{\alpha_{tz}} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sin\theta_i}{\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}} = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\dfrac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}} \approx 0, \quad \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \gg 1 \tag{2-57}$$

由式 (2-57) 可以得出结论：当平面波斜入射到良导体表面时, 良导体中的透射波仍然垂直于表面. 所以阻抗边界条件 (2-55) 也可以推广到斜入射情形. 实际应用中还将其推广用于表面弯曲和非平面波情形.

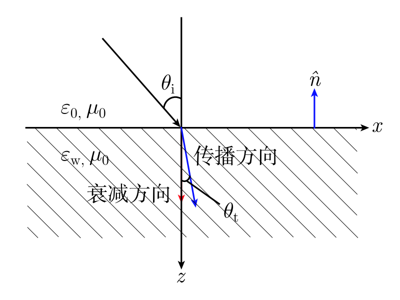


图 2-14 斜入射良导体表面时的透射波

根据阻抗边界条件式 (2-55), 设导体表面法向为 $\hat{\boldsymbol{n}}=-\hat{\boldsymbol{z}}$, 如图 2-15 所示, 则进入良导体表面单位面积的平均功率流为

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{d}} &= (-\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{w}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}^{*}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{w}}\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}^{*})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma}}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}}}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}})\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}})^{*}\right\} \end{aligned}$$

由于 $1/\sqrt{\mathrm{i}}=(1-\mathrm{i})/\sqrt{2}, \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}^{\tan}$, 上式可改写为

$$p_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}\left|\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}^{\tan}\right|^2 \tag{2-58}$$

式 (2-58) 用磁场切向分量 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{w}}^{\tan}$ 表示良导体表面单位面积的损耗功率 p_{d}, 这一公式在计算电磁波损耗时常用到.

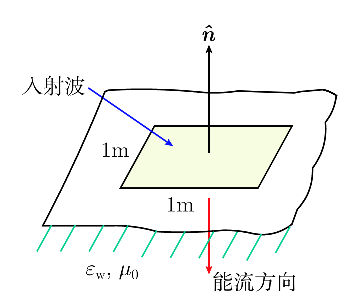


图 2-15 进入导体表面单位面积的功率流

2.3 椭圆极化波在半空间界面的反射和透射

2.3.1 椭圆极化波的反射和透射

设椭圆极化波斜入射到半空间分界面, 如图 2-16 所示, 入射面为 xoz 面. 入射波电场垂直和平行于入射面的两个分量为

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{i}\perp} &= E_{\mathrm{i}y}=e_{\mathrm{i}\perp}\exp(\mathrm{i}kx-\mathrm{i}kz) \\ E_{\mathrm{i}\parallel} &= e_{\mathrm{i}\parallel}\exp(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{i}})\exp(\mathrm{i}kx-\mathrm{i}kz) \end{aligned}\right\} \tag{2-59}$$

式中, $e_{\mathrm{i}\perp}, e_{\mathrm{i}\parallel}$ 为幅值, ψ_{i} 为入射波电场平行和垂直两个分量之间相位差. 根据式 (1-53), 其倾斜椭圆参数为

$$\left.\begin{aligned} & e_1^2+e_2^2=e_{\mathrm{i}\perp}^2+e_{\mathrm{i}\parallel}^2 \\ & e_1^2\tan\beta=e_{\mathrm{i}\perp}e_{\mathrm{i}\parallel}\sin\psi_{\mathrm{i}} \\ & 2e_{\mathrm{i}\perp}e_{\mathrm{i}\parallel}\cos\psi_{\mathrm{i}}=(e_{\mathrm{i}\perp}^2-e_{\mathrm{i}\parallel}^2)\tan2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2-60}$$

式中, e_1 为椭圆长轴, $\tan\beta$ 为长短轴比与极化旋转方向, α 为椭圆倾斜角, 如图 1-9 所示. 根据式 (2-59) 中幅值 $e_{\mathrm{i}\perp}, e_{\mathrm{i}\parallel}$ 和相位差 ψ_{i} 可以确定椭圆倾角 α、极化度角 β 和椭圆长轴 e_1, 具体公式可参见式 (1-57) 和式 (1-58), 即

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2e_{\mathrm{i}\perp}e_{\mathrm{i}\parallel}\sin\psi_{\mathrm{i}}}{e_{\mathrm{i}\perp}^2+e_{\mathrm{i}\parallel}^2}\right) \\ \alpha &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2e_{\mathrm{i}\perp}e_{\mathrm{i}\parallel}\cos\psi_{\mathrm{i}}}{e_{\mathrm{i}\perp}^2-e_{\mathrm{i}\parallel}^2}\right) \\ e_1 &= \sqrt{\frac{e_{\mathrm{i}\perp}e_{\mathrm{i}\parallel}\sin\psi_{\mathrm{i}}}{\tan\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{2-61}$$

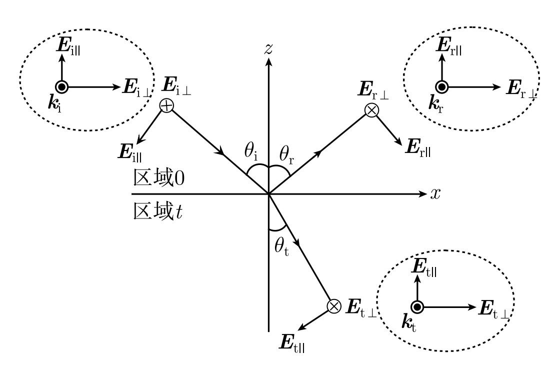


图 2-16　分界面波的反射的折射：椭圆极化波

分界面处反射波电场需要分别考虑垂直和平行于入射面的两个分量. 反射波电场垂直和平行分量为

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{r}\perp} &= E_{\mathrm{r}y} = R_\perp E_{\mathrm{i}y} = |R_\perp|\exp(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{r}\perp})E_{\mathrm{i}y} \\ E_{\mathrm{r}\parallel} &= R_\parallel E_{\mathrm{i}\parallel} = \left|R_\parallel\right|\exp\left(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{r}\parallel}\right)E_{\mathrm{i}\parallel} \end{aligned}\right\} \tag{2-62}$$

式中, 反射系数 $R_\perp = |R_\perp|\exp(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{r}\perp}) = R^{\mathrm{TE}}$ 和 $R_\parallel = \left|R_\parallel\right|\exp\left(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{r}\parallel}\right) = R^{\mathrm{TM}}$ 分别由式 (2-41) 和式 (2-47) 确定. 记 $e_{\mathrm{r}\perp} = |R_\perp|e_{\mathrm{i}\perp}, e_{\mathrm{r}\parallel} = \left|R_\parallel\right|e_{\mathrm{i}\parallel}$ 为幅值, ψ_{r} 为反射波电场平行和垂直两个分量之间相位差,

$$\psi_{\mathrm{r}} = \psi_{\mathrm{i}} + \psi_{\mathrm{r}\parallel} - \psi_{\mathrm{r}\perp}$$

根据反射波幅值和相位差即可确定椭圆倾角 α、极化度角 β 和椭圆长轴 e_1, 所用公式和式 (2-61) 类似, 只需将反射波相应参数代入式 (2-61) 即可.

透射波的极化状态可以类似讨论. 由于 TM 波透射系数 $T_\parallel$ 是透射波和入射波磁场之比, 平面波电场和磁场之间关系为式 (2-8), 即 $E = \eta H = \sqrt{\mu/\varepsilon}H$, 其

中 η 为波阻抗. 而透射波和入射波分别在区域 1 和区域 0, 有不同波阻抗, 所以 $E_{\rm t}/E_{\rm i}=\eta_{\rm t}H_{\rm t}/(\eta_{\rm i}H_{\rm i})=(\eta_{\rm t}/\eta_{\rm i})T_{\parallel}$. 如果介质为无耗, 透射波和入射波电场之间相位差只与透射系数有关. 透射波电场垂直和平行分量为

$$\left.\begin{aligned}E_{\rm t\perp}&=E_{ty}=\left(\frac{\eta_t}{\eta_0}\right)T_{\perp}E_{{\rm i}y}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_t}}\left|T_{\perp}\right|\exp\left({\rm i}\psi_{\rm t\perp}\right)E_{{\rm i}y}\\E_{\rm t\parallel}&=\frac{\eta_{\rm t}}{\eta_0}T_{\parallel}E_{\rm i\parallel}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_t}}\left|T_{\parallel}\right|\exp\left({\rm i}\psi_{\rm t\parallel}\right)E_{\rm i\parallel}\end{aligned}\right\}\tag{2-63}$$

式中, $e_{\rm t\perp},e_{\rm t\parallel}$ 为幅值, 透射系数 $T_{\perp}=\left|T_{\perp}\right|\exp\left({\rm i}\psi_{\rm t\perp}\right)=T^{\rm TE}$ 和 $T_{\parallel}=\left|T_{\parallel}\right|\exp\left({\rm i}\psi_{\rm t\parallel}\right)=T^{\rm TM}$ 分别由式 (2-41) 和式 (2-47) 确定. 记 $e_{\rm t\perp}=(\varepsilon_0/\varepsilon_t)\left|T_{\perp}\right|e_{\rm i\perp},e_{\rm t\parallel}=(\varepsilon_0/\varepsilon_t)\left|T_{\parallel}\right|e_{\rm i\parallel}$ 为幅值, $\psi_{\rm t}$ 为透射波电场平行和垂直两个分量之间相位差.

$$\psi_{\rm t}=\psi_{\rm i}+\psi_{\rm t\parallel}-\psi_{\rm t\perp}$$

参照式 (2-61) 即可确定透射波的极化特性.

2.3.2 圆极化波在理想导体表面的反射

设圆极化波斜入射到理想导体表面, 如图 2-17 所示. 入射波为右旋圆极化, 即

$$e_{\rm i\perp}=e_{\rm i\parallel}=E_0,\quad \psi_{\rm i}=\frac{\pi}{2}$$

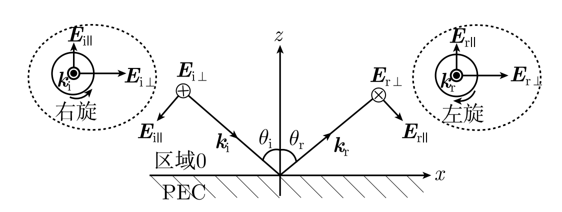


图 2-17 理想导体表面圆极化波的反射

理想导体反射系数为

$$R_{\perp}=\left|R_{\perp}\right|\exp\left({\rm i}\psi_{\rm r\perp}\right)=R^{\rm TE}=-1$$

$$R_{\parallel}=\left|R_{\parallel}\right|\exp\left({\rm i}\psi_{\rm r\parallel}\right)=R^{\rm TM}=+1$$

即 $\psi_{\rm r\perp}=\pi,\psi_{\rm r\parallel}=0$, 所以,

$$\psi_{\rm r}=\psi_{\rm i}+\psi_{\rm r\parallel}-\psi_{\rm r\perp}=\frac{\pi}{2}+0-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

以及 $e_{\rm r\perp}=e_{\rm r\parallel}=E_0$, 可见反射波为左旋极化波, 如图 2-17 内小图所示.

2.3.3　圆极化波在介质表面的反射和透射

设圆极化波斜入射到介质表面, 入射角为 $\theta_{\mathrm{i}}=45^{\circ}$, 如图 2-18 所示, 入射波为右旋圆极化, 即

$$e_{\mathrm{i}\perp}=e_{\mathrm{i}\|}=E_0,\quad \psi_{\mathrm{i}}=\frac{\pi}{2}$$

设区域 0 为真空, 区域 1 介质为聚苯乙烯 $\varepsilon_{\mathrm{r}}=2.7,\mu_{\mathrm{r}}=1$. 由 Snell 定律 $\sqrt{\varepsilon_0}\sin\theta_{\mathrm{i}}=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\sin\theta_{\mathrm{t}}$ 可得折射角为

$$\theta_{\mathrm{t}}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\sin\theta_{\mathrm{i}}}{\sqrt{\varepsilon_t}}\right)=\arcsin\left(\frac{\sin 45^{\circ}}{\sqrt{2.7}}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2\times 2.7}}\right)=25.5^{\circ}$$

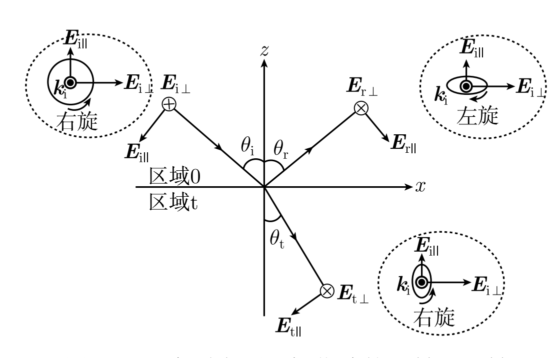


图 2-18　介质表面圆极化波的反射和透射

反射系数由式 (2-41) 和式 (2-47) 确定, 其中

$$p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}=\frac{\mu_0 k_{\mathrm{t}z}}{\mu_{\mathrm{t}}k_{0z}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{i}}},\quad p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{t}z}}{\varepsilon_{\mathrm{t}}k_{0z}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

于是可得

$$\begin{aligned}
R_{\perp}&=|R_{\perp}|\exp(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{r}\perp})=R^{\mathrm{TE}}=\frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{i}}-\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{i}}+\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{t}}}\\
&=\frac{\cos 45^{\circ}-\sqrt{2.7}\cos 25.5^{\circ}}{\cos 45^{\circ}+\sqrt{2.7}\cos 25.5^{\circ}}=-0.354\\
R_{\|}&=\left|R_{\|}\right|\exp\left(\mathrm{i}\psi_{\mathrm{r}\|}\right)=R^{\mathrm{TM}}=\frac{1-p_{0\mathrm{t}}}{1+p_{0\mathrm{t}}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}-\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}+\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{t}}}\\
&=\frac{\sqrt{2.7}\cos 45^{\circ}-\cos 25.5^{\circ}}{\sqrt{2.7}\cos 45^{\circ}+\cos 25.5^{\circ}}=0.126
\end{aligned}$$

即 $\psi_{\mathrm{r}\|}=0,\psi_{\mathrm{r}\perp}=\pi$, 所以反射波平行和垂直分量之间相位差为

$$\psi_{\mathrm{r}}=\psi_{\mathrm{i}}+\psi_{\mathrm{r}\|}-\psi_{\mathrm{r}\perp}=\frac{\pi}{2}+0-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

另外, 反射波幅值为 $e_{\mathrm{r}\perp} = |R_\perp| e_{\mathrm{i}\perp} = 0.354E_0, e_{\mathrm{r}\|} = \left|R_\|\right| e_{\mathrm{i}\|} = 0.126E_0$, 代入式 (2-61) 可以确定椭圆倾角 α、极化度角 β,

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2e_{\mathrm{r}\perp}e_{\mathrm{r}\|}\cos\psi_{\mathrm{r}}}{e_{\mathrm{r}\perp}^2 - e_{\mathrm{r}\|}^2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\times 0.354\times 0.126\times\cos(-90^\circ)}{0.354^2 - 0.126^2}\right) = 0$$

$$\beta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2e_{\mathrm{r}\perp}e_{\mathrm{r}\|}\sin\psi_{\mathrm{r}}}{e_{\mathrm{r}\perp}^2 + e_{\mathrm{r}\|}^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\times 0.354\times 0.126\times\sin(-90^\circ)}{0.354^2 + 0.126^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(-0.632) = -0.342$$

可见, 反射波为左旋波, 且

$$\tan\beta = \tan(-0.342) = -0.356, \quad \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{-0.356} = -2.81$$

即椭圆长短轴之比为 2.81, 上式负号代表左旋波, 如图 2-18 内小图所示.

透射系数由式 (2-41) 和式 (2-47) 确定,

$$T_\perp = T^{\mathrm{TE}} = \frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{i}} + \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{t}}} = \frac{2\cos 45^\circ}{\cos 45^\circ + \sqrt{2.7}\cos 25.5^\circ} = 0.647$$

$$T_\| = T^{\mathrm{TM}} = \frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\cos\theta_{\mathrm{i}} + \sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_{\mathrm{t}}} = \frac{2\sqrt{2.7}\cos 45^\circ}{\sqrt{2.7}\cos 45^\circ + \cos 25.5^\circ} = 1.127$$

即 $\psi_{\mathrm{t}\|} = \psi_{\mathrm{t}\perp} = 0$. 所以, 透射波平行和垂直分量之间相位差为

$$\psi_{\mathrm{t}} = \psi_{\mathrm{i}} + \psi_{\mathrm{t}\|} - \psi_{\mathrm{t}\perp} = \frac{\pi}{2} + 0 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

另外, 透射波幅值为 $e_{\mathrm{t}\perp} = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_{\mathrm{t}}}\,|T_\perp|\, e_{\mathrm{i}\perp} = \sqrt{1/2.7}\times 0.647E_0 = 0.394E_0$, $e_{\mathrm{t}\|} = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_{\mathrm{t}}}\,\left|T_\|\right| e_{\mathrm{i}\|} = \sqrt{1/2.7}\times 1.127E_0 = 0.686E_0$, 代入式 (2-61) 可以确定椭圆倾角 α、极化度角 β,

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2e_{\mathrm{t}\perp}e_{\mathrm{t}\|}\cos\psi_{\mathrm{r}}}{e_{\mathrm{t}\perp}^2 - e_{\mathrm{t}\|}^2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\times 0.394\times 0.686\times\cos 90^\circ}{0.394^2 - 0.686^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2e_{\mathrm{t}\perp}e_{\mathrm{t}\|}\sin\psi_{\mathrm{r}}}{e_{\mathrm{t}\perp}^2 + e_{\mathrm{t}\|}^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\times 0.394\times 0.686\times\sin 90^\circ}{0.394^2 + 0.686^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(0.864) = 0.522$$

可见, 透射波为右旋波, 且

$$\tan\beta = \tan(0.522) = 0.575, \quad \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{0.575} = 1.738$$

即椭圆长短轴之比为 1.738, 如图 2-18 所示内小图所示.

2.4　分 层 介 质

2.4.1　分层介质模型与方程

设平面波入射到分层介质, 如图 2-19 所示. 第 l 层参数为 μ_l, ε_l, 其中 $l = 0, 1, 2, \cdots, n, n+1$. 区域 $l=0$ 代表入射波一侧, $l=n+1$ 代表透射波一侧. 设入射面为 xoz 面, 即 $\partial/\partial y = 0$, 入射波为

$$E_i = E_0 \exp(\mathrm{i}k_{0x}x - \mathrm{i}k_{0z}z)$$

这时可分解为 TE(E_y, H_x, H_z 不为零) 和 TM(H_y, E_x, E_z 不为零) 波, 且二者之间具有对偶性.

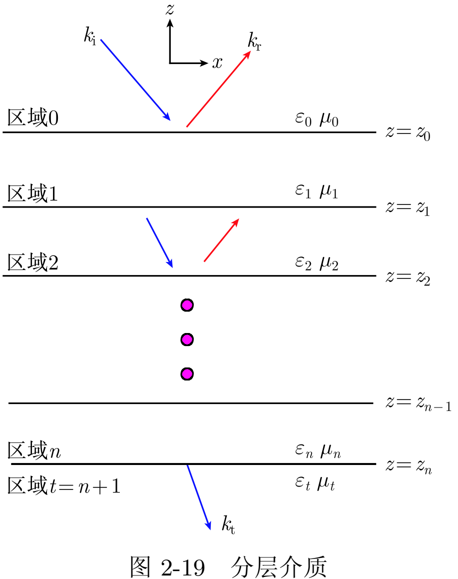


图 2-19　分层介质

首先考虑 TE 情形. 注意到区域 l 中既有上行波, 也有下行波, 所以其中总场可写为

$$\left.\begin{aligned} E_{ly} &= [A_l \exp(\mathrm{i}k_{lz}z) + B_l \exp(-\mathrm{i}k_{lz}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ H_{lx} &= \frac{-k_{lz}}{\omega\mu_l} [A_l \exp(\mathrm{i}k_{lz}z) + B_l \exp(-\mathrm{i}k_{lz}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \\ H_{lz} &= \frac{k_x}{\omega\mu_l} [A_l \exp(\mathrm{i}k_{lz}z) + B_l \exp(-\mathrm{i}k_{lz}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \end{aligned}\right\} \tag{2-64}$$

式中, A_l 和 B_l 分别代表区域 l 中的上行波和下行波幅值, 色散关系为

$$k_x^2 + k_{lz}^2 = k_l^2 = \omega^2 \mu_l \varepsilon_l \tag{2-65}$$

根据相位匹配条件, 各层中波矢量的 x 分量都相同, 均记为 k_x. 注意区域 0 中有入射波和反射波,

$$E_{0y} = [A_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z) + B_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z)] \exp(\mathrm{i}k_x x) \tag{2-66}$$

式中, $A_0 \exp(\mathrm{i}k_{0z}z)$ 代表反射波, $B_0 \exp(-\mathrm{i}k_{0z}z)$ 代表入射波, 记 $B_0 = E_0$. 区域 0 的反射系数定义为

$$R = \frac{A_0}{E_0} = \frac{A_0}{B_0} \tag{2-67}$$

在透射波区域 $t = n+1$ 中只有透射波, 即 $A_t = 0$,

$$E_{ty} = B_t \exp(-\mathrm{i}k_{tz}z) \exp(\mathrm{i}k_x x) \tag{2-68}$$

透射系数定义为

$$T = \frac{B_t}{E_0} = \frac{B_t}{B_0} \tag{2-69}$$

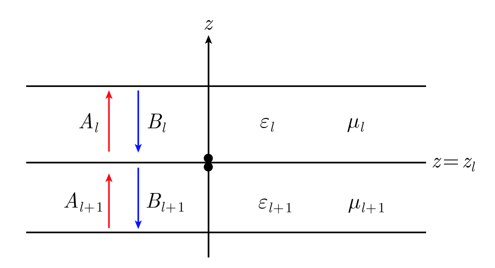


图 2-20　相邻介质层的分界面

在 l 和 $l+1$ 区分界面, 如图 2-20 所示, 电场和磁场切向分量连续的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &A_l \exp(\mathrm{i}k_{lz}z_l) + B_l \exp(-\mathrm{i}k_{lz}z_l) = A_{l+1} \exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right] + B_{l+1} \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right] \\ &\qquad A_l \exp(\mathrm{i}k_{lz}z_l) - B_l \exp(-\mathrm{i}k_{lz}z_l) \\ &= p_{l(l+1)} \cdot \left\{A_{l+1} \exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right] - B_{l+1} \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2-70}$$

式中,

$$p_{l(l+1)}^{\mathrm{TE}} = \frac{\mu_l k_{(l+1)z}}{\mu_{l+1} k_{lz}} \tag{2-71}$$

2.4.2　反射系数的连分数公式

将式 (2-70) 第一和第二式相加与相减后分别得

$$2A_l \exp(\mathrm{i}k_{lz}z_l) = A_{l+1}\left[1 + p_{l(l+1)}\right] \exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + B_{l+1}\left[1-p_{l(l+1)}\right]\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right] \\
2B_l\exp\left(-\mathrm{i}k_{lz}z_l\right) &= A_{l+1}\left[1-p_{l(l+1)}\right]\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right] \\
&\quad + B_{l+1}\left[1+p_{l(l+1)}\right]\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]
\end{aligned}
$$

以上二式相除得

$$
\begin{aligned}
\frac{A_l}{B_l}\exp(\mathrm{i}2k_{lz}z_l) &= \frac{A_{l+1}\left[1+p_{l(l+1)}\right]\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]+B_{l+1}\left[1-p_{l(l+1)}\right]\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]}{A_{l+1}\left[1-p_{l(l+1)}\right]\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]+B_{l+1}\left[1+p_{l(l+1)}\right]\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]} \\
&= \frac{A_{l+1}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]+B_{l+1}R_{l(l+1)}\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]}{A_{l+1}R_{l(l+1)}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]+B_{l+1}\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right]} \\
&= \frac{\cdot\dfrac{1}{R_{l(l+1)}}\cdot\left\{\dfrac{A_{l+1}}{B_{l+1}}+\dfrac{1}{R_{l(l+1)}}\exp\left[-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}z_l\right]\right\} + \left[1-\dfrac{1}{R^2_{l(l+1)}}\right]\exp\left[-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}z_l\right]}{\dfrac{A_{l+1}}{B_{l+1}}+\dfrac{1}{R_{l(l+1)}}\cdot\exp\left[-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}z_l\right]} \\
&= \frac{1}{R_{l(l+1)}}+\frac{\left[1-\dfrac{1}{R^2_{l(l+1)}}\right]\exp\left[-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}z_l\right]}{\dfrac{A_{l+1}}{B_{l+1}}+\dfrac{1}{R_{l(l+1)}}\cdot\exp\left[-\ \mathrm{i}2k_{(l+1)z}z_l\right]}
\end{aligned}
$$

式中,

$$
R_{l(l+1)} = \frac{1-p_{l(l+1)}}{1+p_{l(l+1)}} \tag{2-72}
$$

由此可得上行和下行波幅值之比为

$$
\frac{A_l}{B_l} = \frac{\exp\left(-\mathrm{i}2k_{lz}z_l\right)}{R_{l(l+1)}} + \frac{\left[1-\left(1/R^2_{l(l+1)}\right)\right]\exp\left[-\mathrm{i}2\left(k_{(l+1)z}+k_{lz}\right)z_l\right]}{\left(1/R_{l(l+1)}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}z_l\right)+\dfrac{A_{l+1}}{B_{l+1}}} \tag{2-73}
$$

式 (2-73) 用区域 $l+1$ 中上行和下行波幅值比来表示区域 l 中上行和下行波幅值比, 构成递推公式, 称为反射系数的连分数式.

注意在透射波区域 $t=n+1$ 中只有透射波, 即 $A_t=A_{n+1}=0$. 于是, 从区域 t 开始, 由式 (2-73) 可以逐步递推得到区域 0 界面, 即分层介质上表面反射系数, 递推步骤如下：

$$
\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}=0\Rightarrow\frac{A_n}{B_n}\Rightarrow\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{A_1}{B_1}\Rightarrow\frac{A_0}{B_0}\quad \text{记}\quad \frac{A_0}{B_0}=R \tag{2-74}
$$

这一计算步骤易于实现编程计算.

对于 TM 波, 由对偶原理, 式 (2-71)~ 式 (2-74) 成立, 但式 (2-71) 改为

$$p_{l(l+1)}^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon_l k_{(l+1)z}}{\varepsilon_{l+1}k_{lz}} \tag{2-75}$$

从区域 t 开始, 计算分层介质上表面反射系数的递推步骤和 TE 波相同.

2.4.3 理想导体衬底情形

当分层介质以理想导体 (PEC) 为衬底, 如图 2-21 所示, 递推的起始值需要特殊考虑. 对于 TE 波, 区域 t 为理想导体, 其表面边界条件为

$$E_{ny}|_{z=z_n}=A_n\exp\left(\mathrm{i}k_{nz}z_n\right)+B_n\exp\left(-\mathrm{i}k_{nz}z_n\right)=0 \tag{2-76}$$

即

$$\frac{A_n}{B_n}=-\exp\left(-\mathrm{i}2k_{nz}z_n\right) \tag{2-77}$$

比较式 (2-77) 和式 (2-73), 欲使式 (2-73) 在 $l=n$ 时与式 (2-77) 相同, 需使其中

$$R_{n(n+1)}=-1 \tag{2-78}$$

式 (2-78) 代入式 (2-74) 作为递推起始条件便可得反射系数 R.

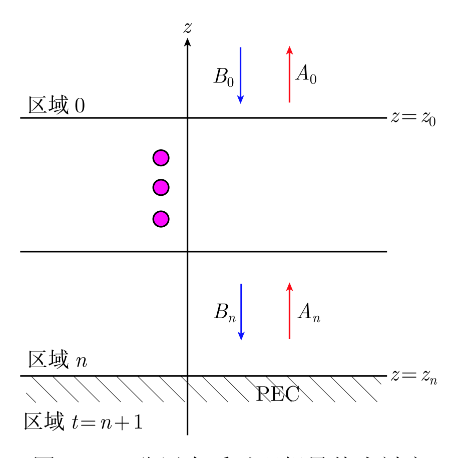


图 2-21 分层介质以理想导体为衬底

对于 TM 波, 区域 $t=n+1$ 理想导体表面边界条件为

$$E_{nx}|_{z=z_n}=\frac{k_{nz}}{\omega\varepsilon_n}\left[A_n\exp\left(\mathrm{i}k_{nz}z_n\right)-B_n\exp\left(-\mathrm{i}k_{nz}z_n\right)\right]=0 \tag{2-79}$$

即

$$\frac{A_n}{B_n}=\exp\left(-\mathrm{i}2k_{nz}z_n\right) \tag{2-80}$$

比较式 (2-80) 和式 (2-73), 欲使式 (2-73) 在 $l=n$ 时与式 (2-80) 相同, 需使其中

$$R_{n(n+1)} = +1 \tag{2-81}$$

式 (2-81) 代入式 (2-74) 递推便可得反射系数 R.

注意: 在理想导体为衬底时, 由于 TE 和 TM 波在理想导体表面的边界条件不是对偶, 所以二者结果不具有对偶性.

2.4.4　单层介质板和增透膜

单层介质板是分层介质的一个重要特例. 如图 2-22 所示单层介质板可用连分数方法分析. 令分层介质模型 n =1. 由于透射区 t =2 中无反射波, $A_2=0$. 由式 (2-73) 可得区域 1 中上行和下行波之比,

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{B_1} &= \frac{\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)}{R_{12}} + \frac{\left[1-\left(1/R_{12}^2\right)\right]\exp\left[-\mathrm{i}2\left(k_{2z}+k_{1z}\right)z_1\right]}{\left(1/R_{12}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2k_{2z}z_1\right)}\\ &= R_{12}\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)\end{aligned}$$

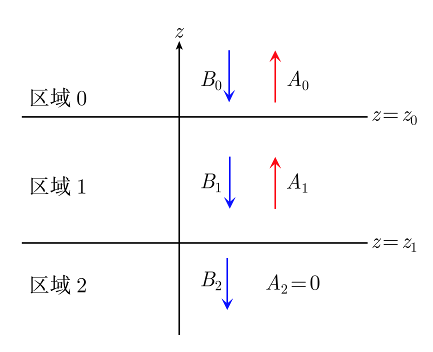


图 2-22　单层介质板

式中, R_{12} 由式 (2-72) 计算. 为了公式简单, 设 $z_0=0$, 则区域 0 分界面处反射系数为

$$\begin{aligned}R=\frac{A_0}{B_0} &= \frac{\exp\left(-\mathrm{i}2k_{0z}z_0\right)}{R_{01}} + \frac{\left[1-\left(1/R_{01}^2\right)\right]\exp\left[-\mathrm{i}2\left(k_{1z}+k_{0z}\right)z_0\right]}{\left(1/R_{01}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_0\right)+\dfrac{A_1}{B_1}}\\ &= \frac{1}{R_{01}} + \frac{\left[1-\left(1/R_{01}^2\right)\right]}{\left(1/R_{01}\right)+R_{12}\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)}\\ &= \frac{\left(1/R_{01}\right)+R_{12}\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)+R_{01}-\left(1/R_{01}\right)}{1+R_{01}R_{12}\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)}\\ &= \frac{R_{01}+R_{12}\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)}{1+R_{01}R_{12}\exp\left(-\mathrm{i}2k_{1z}z_1\right)}\end{aligned} \tag{2-82}$$

式中, R_{01}, R_{12} 如式 (2-72), 即

$$R_{l(l+1)} = \frac{1 - p_{l(l+1)}}{1 + p_{l(l+1)}}, \quad p_{l(l+1)}^{\text{TE}} = \frac{\mu_l k_{(l+1)z}}{\mu_{l+1} k_{lz}}, \quad p_{l(l+1)}^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon_l k_{(l+1)z}}{\varepsilon_{l+1} k_{lz}}$$

单层介质板可以用作增透膜, 用于光学透镜的表面. 设波垂直入射, $k_{lz} = k_l = \omega\sqrt{\mu_l \varepsilon_l}$. 又设单层介质板的两个分界面处有

$$R_{12} = R_{01}, \quad 即 \quad p_{12} = p_{01} \quad (条件一) \tag{2-83}$$

式 (2-82) 变为

$$R = \frac{R_{01}\left[1 + \exp\left(-\mathrm{i}2k_1 z_1\right)\right]}{1 + R_{01}^2 \exp\left(-\mathrm{i}2k_1 z_1\right)}$$

欲使反射系数 R =0, 上式要求 $1 + \exp\left(-\mathrm{i}2k_1 z_1\right) = 0$, 即

$$2k_1 d_1 = 2\frac{2\pi}{\lambda_1} d_1 = (2m+1)\pi, \quad d_1 = (2m+1)\frac{\lambda_1}{4}$$

特别对于 m 最小值, $m = 0$, 有

$$d_{1,\min} = \frac{\lambda_1}{4} \quad (条件二) \tag{2-84}$$

满足条件式 (2-83) 和式 (2-84) 即可达到增透 (反射为零) 的目的. 在垂直入射时, 由式 (2-71) 和式 (2-75) 有

$$p_{12}^{\text{TE}} = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_1}}, \quad p_{01}^{\text{TE}} = \frac{\mu_0 k_1}{\mu_1 k_0} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}$$

所以如式 (2-83) 所示 $p_{12} = p_{01}$(条件一) 要求 (TE 和 TM 相同)

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\right)^2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad \eta_1^2 = \eta_2 \eta_0 \tag{2-85}$$

式中, η 为波阻抗. 如果介质为非磁性, $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$, 则有

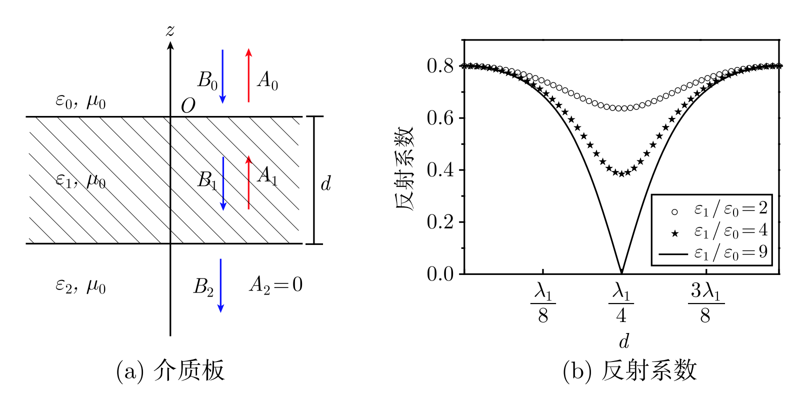
$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 \tag{2-86}$$

归纳起来, 当介质板前后介质的本构参数满足式 (2-85) 或式 (2-86), 且板的厚度符合式 (2-84), 即等于介质内波长四分之一时, 单层介质板的反射系数等于零. 该介质层可以起到增透作用. 增透膜广泛应用于照相机等光学透镜系统.

算例：设介质板入射波一侧为空气 ε_0, μ_0, 即 $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2\pi/\lambda_0$, 透射波一侧介质为 $\varepsilon_2 = 81\varepsilon_0$, 如图 2-23(a) 所示. 介质板的介电系数为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1r}\varepsilon_0$, 即

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon_{1r}}\,\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2\pi/\lambda_1$$

式中, $\lambda_1 = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{1r}}$ 为介质板中波长. 在 $\varepsilon_{1r} = 2, 4, 9$ 三个不同取值时, 介质板反射系数与板厚度的关系曲线如图 2-23(b) 所示. 由图 2-23 可见, 当介质板厚度为 $\lambda_1/4$ 时, 反射为极小; 当 $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2} = 9\varepsilon_0$ 时, 反射为零.



(a) 介质板　　　　(b) 反射系数

图 2-23　反射系数与介质板厚度的关系

2.5　分层介质的传播矩阵方法

2.5.1　传播矩阵

先讨论 TE 波, 重写式 (2-70),

$$\left.\begin{aligned} &A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)+B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)=A_l\exp(\mathrm{i}k_{lz}z_l)+B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lz}z_l)\\ &A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)-B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\\ &\qquad=p_{(l+1)l}\left[A_l\exp\left(\mathrm{i}k_{lz}z_l\right)-B_l\exp\left(-\mathrm{i}k_{lz}z_l\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{2-87}$$

式中系数

$$p_{(l+1)l}=\frac{1}{p^{\mathrm{TE}}_{l(l+1)}}=\frac{\mu_{l+1}k_{lz}}{\mu_l k_{(l+1)z}} \tag{2-88}$$

由式 (2-88) 可解出 $A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)$ 和 $B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)$ 用 A_l 和 B_l 表示, 并写成矩阵的形式,

$$\begin{bmatrix} A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\\ B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(1+p_{(l+1)l}\right)\begin{bmatrix}1 & R_{(l+1)l}\\ R_{(l+1)l} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_l\exp\left(\mathrm{i}k_{lz}z_l\right)\\ B_l\exp\left(-\mathrm{i}k_{lz}z_l\right)\end{bmatrix} \tag{2-89}$$

式中,

$$R_{(l+1)l}=-R_{l(l+1)}=-\frac{1-p_{l(l+1)}}{1+p_{l(l+1)}}=\frac{1-\left(1/p_{l(l+1)}\right)}{1+\left(1/p_{l(l+1)}\right)}=\frac{1-p_{(l+1)l}}{1+p_{(l+1)l}} \tag{2-90}$$

式 (2-89) 左端为图 2-24 中 N 点处上行和下行波幅值的列矩阵, 等式右端后一列矩阵为 M 点处上行和下行波幅值的列矩阵. 由于 M 点和 N 点分别位于分界面 $z=z_l$ 两侧, 定义矩阵

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{MN}=\frac{1}{2}\left(1+p_{(l+1)l}\right)\begin{bmatrix}1 & R_{(l+1)l}\\ R_{(l+1)l} & 1\end{bmatrix} \tag{2-91}$$

为穿越分界面从 M 到 N 点的传播矩阵.

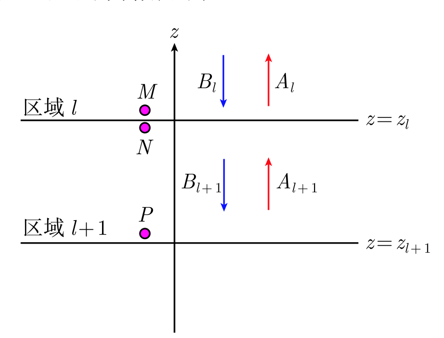


图 2-24　穿越一层介质的传播矩阵

此外, 区域 $(l+1)$ 层内从 N 点到 P 点的传播也可以用传播矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_{l+1}\right)\\ B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_{l+1}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] & 0\\ 0 & \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\\ B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\end{bmatrix} \tag{2-92}$$

式 (2-92) 左端为 P 点处上行和下行波幅值的列矩阵, 等式右端后一列矩阵为 N 点处上行和下行波幅值的列矩阵. 定义矩阵

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{NP}=\begin{bmatrix}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] & 0\\ 0 & \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right]\end{bmatrix} \tag{2-93}$$

为区域 $(l+1)$ 中从 N 点到 P 点的传播矩阵. 应当说明, 式 (2-93) 为恒等式, 目的是引入传播矩阵 $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{NP}$. 合并式 (2-89)~ 式 (2-93), 可以将图 2-24 中从 M 点到 P 点的传播用传播矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_{l+1}\right)\\ B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_{l+1}\right)\end{bmatrix}=\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{(l+1)l}\begin{bmatrix}A_l\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\\ B_l\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)z}z_l\right)\end{bmatrix} \tag{2-94}$$

式中,

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{(l+1)l} =&\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{NP} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{MN} \\
=&\frac{1}{2}\left(1+p_{(l+1)l}\right)\left[\begin{array}{cc} \exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] \end{array}\right] \\
&\cdot\left[\begin{array}{cc} 1 & R_{(l+1)l} \\ R_{(l+1)l} & 1 \end{array}\right] \\
=&\frac{1}{2}\left(1+p_{(l+1)l}\right) \\
&\cdot\left[\begin{array}{cc} \exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] & R_{(l+1)l}\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] \\ R_{(l+1)l}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] & \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)z}\left(z_{l+1}-z_l\right)\right] \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{2-95}$$

为穿越一层从 M 点到 P 点的传播矩阵, 或称为前向传播矩阵.

下面考虑整个分层介质的传播矩阵. 如图 2-25 所示多层介质中记 M_0 为入射点, N 为透射点. 设入射点 M_0 处下行和上行波幅值分别为 B_0 和 $A_0=RB_0$, 其中 R 为反射系数, 透射点 N 处下行波 (没有上行波) 幅值为 $B_{n+1}=TB_0$, 其中 T 为透射系数. 于是, 图 2-25 中从 M_0 点到 N 点的传播用传播矩阵表示为

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ TB_0\exp\left(-\mathrm{i}k_{tz}z_n\right) \end{array}\right] = \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}\left[\begin{array}{c} RB_0\exp\left(\mathrm{i}k_{0z}z_0\right) \\ B_0\exp\left(-\mathrm{i}k_{0z}z_0\right) \end{array}\right] \tag{2-96}$$

式中, 整个分层介质总的传播矩阵为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0} = \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{M_nN} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{n(n-1)} \cdots \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{21} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{10} \tag{2-97}$$

应当注意式 (2-97) 右端第一个矩阵,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{M_nN} = \frac{1}{2}\left(1+p_{tn}\right)\left[\begin{array}{cc} 1 & R_{tn} \\ R_{tn} & 1 \end{array}\right] \tag{2-98}$$

是越过分界面 $z=z_1$ 从 M_n 点到 N 点的传播矩阵, 它和式 (2-91) 形式相同. 记总传播矩阵式 (2-97) 为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0} = \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{M_nN} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{n(n+1)} \cdots \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{21} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{10} = \left[\begin{array}{cc} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{array}\right]$$

于是式 (2-96) 可以写为

$$\begin{aligned}
&0 = v_{11}R\exp\left(\mathrm{i}k_{0z}z_0\right) + v_{12}\exp\left(-\mathrm{i}k_{0z}z_0\right) \\
&T\exp\left(-\mathrm{i}k_{tz}z_n\right) = v_{21}R\exp\left(\mathrm{i}k_{0z}z_0\right) + v_{22}\exp\left(-\mathrm{i}k_{0z}z_0\right)
\end{aligned} \tag{2-99}$$

由此可以求得分层介质的反射系数 R 和透射系数 T.

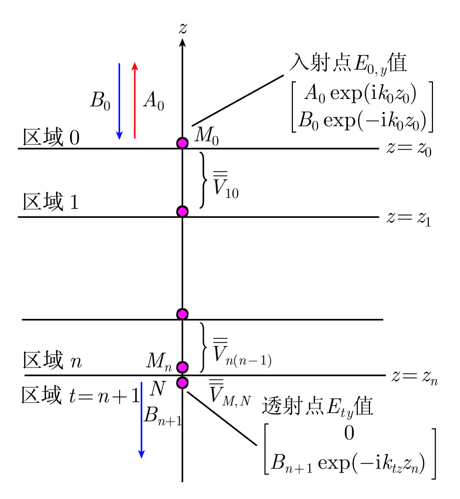


图 2-25　分层介质的传播矩阵

对于 TM 波, 推导过程和所得公式相同, 只是系数式 (2-88) 改为

$$p_{(l+1)l}=\frac{1}{p_{l(l+1)}^{\mathrm{TM}}}=\frac{\varepsilon_{l+1}k_{lz}}{\varepsilon_l k_{(l+1)z}} \tag{2-100}$$

2.5.2　单层介质

考虑单层介质的例子, 如图 2-26 所示. 设介质层厚为 d, 以及 $z_0=0, z_1=-d$, $z_0-z_1=d$, 设入射波幅值 $B_0=1$, 式 (2-96) 变为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ T\exp(\mathrm{i}k_{tz}d) \end{bmatrix}=\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}\begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-101}$$

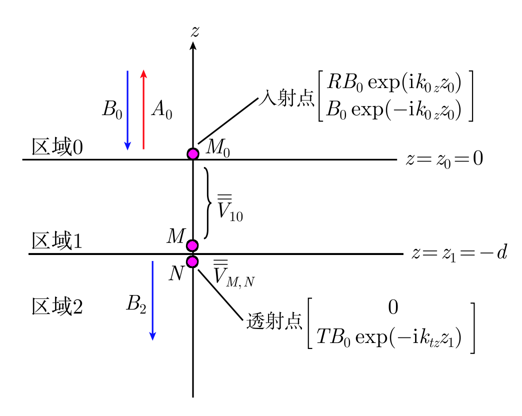


图 2-26　单层介质的传播矩阵

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}$ 为从 M_0 到 N 点的传播矩阵：

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}=\frac{1}{2}\left(1+p_{t1}\right)\begin{bmatrix}1 & R_{t1}\\ R_{t1} & 1\end{bmatrix}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{10} \tag{2-102}$$

由式 (2-95)、式 (2-91) 和式 (2-93) 可得

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{10}&=\frac{1}{2}\left(1+p_{10}\right)\begin{bmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right) & 0\\ 0 & \exp\left(\mathrm{i}k_{1z}d\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & R_{10}\\ R_{10} & 1\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\left(1+p_{10}\right)\begin{bmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right) & R_{10}\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right)\\ R_{10}\exp\left(\mathrm{i}k_{1z}d\right) & \exp\left(\mathrm{i}k_{1z}d\right)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-103}$$

式 (2-103) 代入式 (2-102) 得

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}&=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}\\ &=\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{MN}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{10}\\ &=\frac{1+p_{t1}}{2}\begin{bmatrix}1 & R_{t1}\\ R_{t1} & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1+p_{10}}{2}\begin{bmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right) & R_{10}\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right)\\ R_{10}\exp(\mathrm{i}k_{1z}d) & \exp\left(\mathrm{i}k_{1z}d\right)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-104}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned}v_{11}&=\frac{1}{4}\left(1+p_{t1}\right)\left(1+p_{10}\right)\left[1+R_{t1}R_{10}\exp\left(\mathrm{i}2k_{1z}d\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right)\\ v_{12}&=\frac{1}{4}\left(1+p_{t1}\right)\left(1+p_{10}\right)\left[R_{10}+R_{t1}\exp\left(\mathrm{i}2k_{1z}d\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right)\\ v_{21}&=\frac{1}{4}\left(1+p_{t1}\right)\left(1+p_{10}\right)\left[R_{t1}+R_{10}\exp\left(\mathrm{i}2k_{1z}d\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right)\\ v_{22}&=\frac{1}{4}\left(1+p_{t1}\right)\left(1+p_{10}\right)\left[R_{t1}R_{10}+\exp\left(\mathrm{i}2k_{1z}d\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}k_{1z}d\right)\end{aligned}\right\} \tag{2-105}$$

式中,

$$R_{(l+1)l}=-R_{l(l+1)}=-\frac{1-p_{l(l+1)}}{1+p_{l(l+1)}}=\frac{1-p_{(l+1)l}}{1+p_{(l+1)l}}$$

$$p_{(l+1)l}=\frac{1}{p_{l(l+1)}^{\mathrm{TE}}}=\frac{\mu_{l+1}k_{lz}}{\mu_l k_{(l+1)z}}\quad 或\quad p_{(l+1)l}=\frac{1}{p_{l(l+1)}^{\mathrm{TM}}}=\frac{\varepsilon_{l+1}k_{lz}}{\varepsilon_l k_{(l+1)z}}$$

式 (2-104) 代入式 (2-101) 得

$$\begin{bmatrix}0\\ T\exp\left(\mathrm{i}k_{tz}d\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}R\\ 1\end{bmatrix} \tag{2-106}$$

即

$$\begin{aligned} 0 &= v_{11}R + v_{12} \\ T\exp(\mathrm{i}k_{tz}d) &= v_{21}R + v_{22} \end{aligned} \tag{2-107}$$

解得

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{v_{12}}{v_{11}} \\ T &= (v_{21}R + v_{22})\exp(-\mathrm{i}k_{tz}d) = \left(-\frac{v_{21}v_{12}}{v_{11}} + v_{22}\right)\exp(-\mathrm{i}k_{tz}d) \end{aligned}\right\} \tag{2-108}$$

式 (2-105) 代入式 (2-108) 可得 R 及 T. 反射系数 R 为

$$\begin{aligned} R &= -\frac{v_{12}}{v_{11}} = -\frac{\frac{1}{4}(1+p_{t1})(1+p_{10})[R_{10} + R_{t1}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)]}{\frac{1}{4}(1+p_{t1})(1+p_{10})[1 + R_{t1}R_{10}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)]} \\ &= -\frac{R_{10} + R_{t1}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}{1 + R_{t1}R_{10}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)} = \frac{R_{01} + R_{1t}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}{1 + R_{1t}R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)} \end{aligned} \tag{2-109}$$

式 (2-109) 和式 (2-82) 相同. 透射系数 T 为

$$\begin{aligned} T &= (v_{21}R + v_{22})\exp(-\mathrm{i}k_{tz}d) \\ &= \frac{1}{4}(1+p_{t1})(1+p_{10})\left\{[R_{t1} + R_{10}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)]\frac{R_{01} + R_{1t}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}{1 + R_{1t}R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}\right. \\ &\quad \left. + [R_{t1}R_{10} + \exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)]\right\}\exp[-\mathrm{i}(k_{tz} + k_{1z})d] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+p_{1t}}{p_{1t}}\right)\left(\frac{1+p_{01}}{p_{01}}\right)\left\{\frac{(1-R_{01}^2)(1-R_{1t}^2)\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}{1+R_{1t}R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}\right\}\exp[-\mathrm{i}(k_{tz}+k_{1z})d] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+p_{1t}}{p_{1t}}\right)\left(\frac{1+p_{01}}{p_{01}}\right)\left\{\frac{(1-R_{01}^2)(1-R_{1t}^2)}{1+R_{1t}R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}\right\}\exp[-\mathrm{i}(k_{tz}-k_{1z})d] \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} 1 - R_{01}^2 &= 1 - \left(\frac{1-p_{01}}{1+p_{01}}\right)^2 = \frac{4p_{01}}{(1+p_{01})^2} \\ 1 - R_{1t}^2 &= 1 - \left(\frac{1-p_{1t}}{1+p_{1t}}\right)^2 = \frac{4p_{1t}}{(1+p_{1t})^2} \end{aligned}$$

所以

$$T = \frac{4\exp[-\mathrm{i}(k_{tz} - k_{1z})d]}{(1+p_{01})(1+p_{1t})(1 + R_{1t}R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d))} \tag{2-110}$$

当图 2-26 中区域 t 和区域 1 介质相同时, 单层介质退化为半空间情形. 这时 $k_{tz} = k_{1z}, p_{1t} = 1, R_{1t} = 0$, 代入式 (2-109)、式 (2-110) 得

$$R = \frac{R_{01} + R_{1t}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)}{1 + R_{1t}R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{1z}d)} = R_{01} = \frac{1-p_{01}}{1+p_{01}}$$

$$T=\frac{4\exp\left[-\mathrm{i}\left(k_{tz}-k_{1z}\right)d\right]}{\left(1+p_{01}\right)\left(1+p_{1t}\right)\left(1+R_{1t}R_{01}\exp\left(\mathrm{i}2k_{1z}d\right)\right)}=\frac{2}{\left(1+p_{01}\right)}$$

上式和半空间反射、透射系数 (2-47) 一致.

2.5.3　周期分层介质

设分层介质由两种介质交替放置构成, 一种介电系数 ε_h 较大 (光密), 另一种介电系数 ε_l 较小 (光疏), 如图 2-27 所示. 光密介质有 $N+1$ 层, 光疏介质有 N 层. 光密介质和光疏介质层厚度为 $d(d_h$ 或 $d_l)$, 均为相应介质中波长的四分之一. 设平面波垂直入射, 则区域 $(m+1)$ 中波数 $k_{(m+1)z}=k_{m+1}$, 且

$$k_{(m+1)z}\left(z_m-z_{m+1}\right)=k_{m+1}d=\frac{2\pi}{\lambda_{m+1}}\frac{\lambda_{m+1}}{4}=\frac{\pi}{2}\tag{2-111}$$

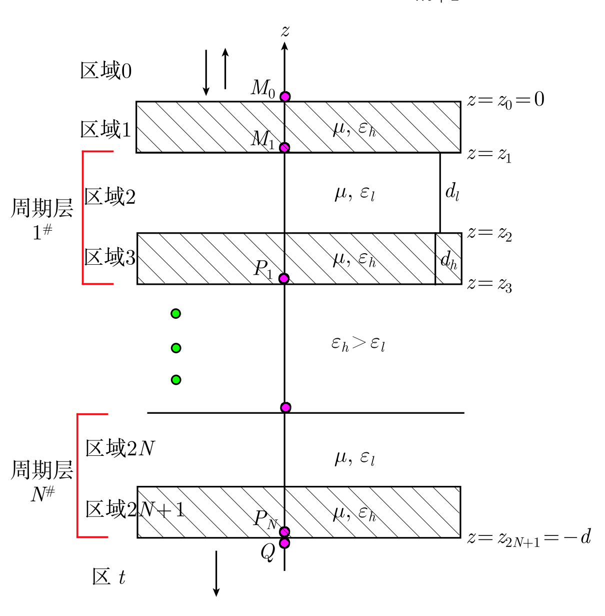


图 2-27　周期性分层介质

首先考虑图 2-27 中波传播通过一个周期层的传播矩阵. 一个周期层包括一个光密介质层和光疏介质层, 如图 2-28 中 M 点到 P 点. 根据式 (2-111), 对于光疏介质层有 $\exp\left(\mathrm{i}k_ld_l\right)=\exp\left(\mathrm{i}\pi/2\right)=\mathrm{i}$. 参照式 (2-95), 波在光疏介质层从 M 点到 N 点的传播矩阵为

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}&=\frac{1}{2}\left(1+p_{hl}\right)\begin{bmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}k_ld_l\right)&R_{hl}\exp\left(-\mathrm{i}k_ld_l\right)\\R_{hl}\exp\left(\mathrm{i}k_ld_l\right)&\exp\left(\mathrm{i}k_ld_l\right)\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\left(1+p_{hl}\right)\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&-\mathrm{i}R_{hl}\\\mathrm{i}R_{hl}&\mathrm{i}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(1+p_{hl})\begin{bmatrix} -1 & -R_{hl} \\ R_{hl} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-112}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned} R_{hl} &= \frac{1-p_{hl}}{1+p_{hl}} \\ p_{hl}^{\mathrm{TE}} &= \frac{\mu k_l}{\mu k_h} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon_l}}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon_h}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}} \end{aligned}\right\} \tag{2-113}$$

式 (2-113) 代入式 (2-112) 得

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl} = \frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 1+p_{hl} & 1-p_{hl} \\ -1+p_{hl} & -1-p_{hl} \end{bmatrix} = \frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} & 1-\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} \\ -1+\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} & -1-\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} \end{bmatrix} \tag{2-114}$$

对于光密介质层, 类似于式 (2-114), 波从 N 点到 P 点的传播矩阵为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh} = \frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 1+p_{lh} & 1-p_{lh} \\ -1+p_{lh} & -1-p_{lh} \end{bmatrix} = \frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & 1-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \\ -1+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & -1-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \end{bmatrix} \tag{2-115}$$

所以, 通过一个周期层的传播矩阵为

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh} &= \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} & 1-\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} \\ -1+\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} & -1-\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & 1-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \\ -1+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & -1-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \\ \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-116}$$

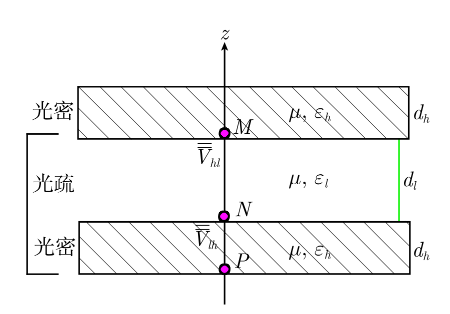


图 2-28 一个周期介质层的传播矩阵

波通过整个分层介质, 设 $z_0=0$, $z_{2N+1}=-d$, d 为整个分层介质厚度, 由式 (2-96) 得到

$$\begin{bmatrix} 0 \\ T\exp(\mathrm{i}k_{tz}d) \end{bmatrix} = \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}\cdot\begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-117}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}$ 为整个分层介质的传播矩阵,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}=\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{th}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh}\right)^{N}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{h0} \tag{2-118}$$

(a) 穿过透射界面到达透射点　　(b) 从入射点穿过区域1

图 2-29　入射点和透射点处的传播矩阵

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}$ 包含三部分, 其中 $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh}\right)^{N}$ 为 N 个周期层的传播矩阵, 即图 2-27 中由 M_1 点到 P_N 点的传播矩阵; $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{th}$ 为穿过透射界面到达透射点, 即图 2-27 中由 P_N 到 Q 点的传播矩阵; $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{h0}$ 为由入射点穿过区域 1, 即图 2-27 中由 M_0 到 M_1 点的传播矩阵. 三个分矩阵的计算如下:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{th}&=\frac{1}{2}\left(1+p_{th}\right)\begin{bmatrix}1 & R_{th}\\ R_{th} & 1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+p_{th} & 1-p_{th}\\ 1-p_{th} & 1+p_{th}\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t} & 1-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}\\ 1-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t} & 1+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-119}$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{h0}&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(1+p_{h0}\right)\begin{bmatrix}-1 & -R_{h0}\\ R_{h0} & 1\end{bmatrix}\\&=\frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}1+\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h} & 1-\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}\\ -1+\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h} & -1-\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-120}$$

$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh}\right)^{N}$ 的计算需要用到矩阵等式,

$$\begin{bmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{bmatrix}^{N}=2^{N-1}\begin{bmatrix}a^N+b^N & a^N-b^N\\ a^N-b^N & a^N+b^N\end{bmatrix} \tag{2-121}$$

以上矩阵等式用归纳法证明如下. 当 N =2, 按照矩阵乘法可得

$$\begin{bmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{bmatrix}^{2}=\begin{bmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b)^2+(a-b)^2 & 2(a+b)(a-b) \\ 2(a+b)(a-b) & (a-b)^2+(a+b)^2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} a^2+b^2 & a^2-b^2 \\ a^2-b^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

上式表明当 $N=2$ 时式 (2-121) 成立. 如果 $N=m-1$ 时式 (2-121) 成立, 即

$$\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}^{m-1} = 2^{m-2}\begin{bmatrix} a^{m-1}+b^{m-1} & a^{m-1}-b^{m-1} \\ a^{m-1}-b^{m-1} & a^{m-1}+b^{m-1} \end{bmatrix}$$

再根据矩阵乘法可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}^{m} &= \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}^{m-1} \\
&= 2^{m-2}\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{m-1}+b^{m-1} & a^{m-1}-b^{m-1} \\ a^{m-1}-b^{m-1} & a^{m-1}+b^{m-1} \end{bmatrix} \\
&= 2^{m-2}\left[\begin{matrix} (a+b)\left(a^{m-1}+b^{m-1}\right)+(a-b)\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right) \\ (a-b)\left(a^{m-1}+b^{m-1}\right)+(a+b)\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right) \end{matrix}\right. \rightarrow \\
&\qquad \leftarrow \left.\begin{matrix} (a+b)\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right)+(a-b)\left(a^{m-1}+b^{m-1}\right) \\ (a-b)\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right)+(a+b)\left(a^{m-1}+b^{m-1}\right) \end{matrix}\right] \\
&= 2^{m-2}\begin{bmatrix} 2(a^m+b^m) & 2(a^m-b^m) \\ 2(a^m-b^m) & 2(a^m+b^m) \end{bmatrix} \\
&= 2^{m-1}\begin{bmatrix} a^m+b^m & a^m-b^m \\ a^m-b^m & a^m+b^m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

上式表明, 当 $N=m$ 时式 (2-121) 成立. 依此类推, N 为任意整数时式 (2-121) 成立. 证毕.

将如式 (2-116) 所示矩阵代入式 (2-121) 可得

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh}\right)^N &= \left\{\frac{-1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \\ \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} & \sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}+\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l} \end{bmatrix}\right\}^N \\
&= \frac{(-1)^N}{2^N}\cdot 2^{N-1}\begin{bmatrix} \left(\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}\right)^N+\left(\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l}\right)^N & \left(\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}\right)^N-\left(\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l}\right)^N \\ \left(\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}\right)^N-\left(\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l}\right)^N & \left(\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_h}\right)^N+\left(\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_l}\right)^N \end{bmatrix} \\
&= \frac{(-1)^N}{2}\begin{bmatrix} (\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}+(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} & (\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}-(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} \\ (\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}-(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} & (\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}+(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-122}$$

将式 (2-119)、式 (2-120) 和式 (2-122) 代入式 (2-118) 得

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{t0}=&\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{th}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{hl}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{lh}\right)^{N}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{h0}\\
=&\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}} & 1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}} \\ 1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}} & 1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}} \end{bmatrix}\\
&\cdot\frac{(-1)^N}{2}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}+\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} & \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}-\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} \\ \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}-\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} & \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}+\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}\cdot\\
&\cdot\frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} & 1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} \\ -1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} & -1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} \end{bmatrix}\\
=&\frac{-\mathrm{i}\,(-1)^N}{4}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} & \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} \\ \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} & \left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}}+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}\\
&\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} & 1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} \\ -1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} & -1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}} \end{bmatrix}\\
=&\frac{-\mathrm{i}\,(-1)^N}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}}+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}}\left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}} & \sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}}-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}}\left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}}+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}}\left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^{\frac{N}{2}} & -\sqrt{\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}}\left(\dfrac{\varepsilon_h}{\varepsilon_l}\right)^{\frac{N}{2}}-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_h}}\left(\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)\dfrac{N}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-123}
$$

重写式 (2-117),

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ T\exp\left(\mathrm{i}k_t d\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix}
\tag{2-124}
$$

式 (2-124) 求解并应用式 (2-123) 可得垂直入射时整个周期分层介质反射系数 R,

$$
\begin{aligned}
R=-\frac{v_{12}}{v_{11}}&=-\frac{\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}\left(\varepsilon_h/\varepsilon_l\right)^{N/2}-\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}\left(\varepsilon_l/\varepsilon_h\right)^{N/2}}{\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}\left(\varepsilon_h/\varepsilon_l\right)^{N/2}+\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}\left(\varepsilon_l/\varepsilon_h\right)^{N/2}}\\
&=\frac{\left(\varepsilon_l/\varepsilon_h\right)^{N}\sqrt{\varepsilon_t/\varepsilon_h}\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}-1}{\left(\varepsilon_l/\varepsilon_h\right)^{N}\sqrt{\varepsilon_t/\varepsilon_h}\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}+1}
\end{aligned}
\tag{2-125}
$$

由式 (2-124) 可得垂直入射时透射系数 T 为

$$T\exp(\mathrm{i}k_t d) = Rv_{21} + v_{22}$$

即

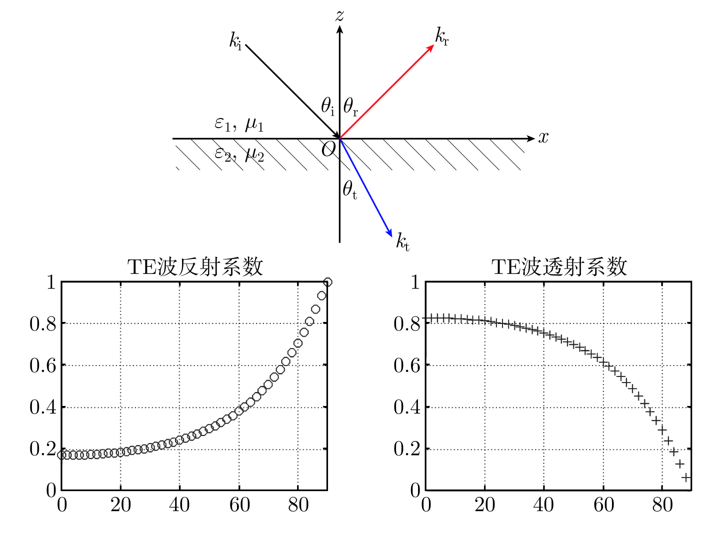
$$\begin{aligned} T =& (Rv_{21} + v_{22})\exp(-\mathrm{i}k_t d) \\ =& \frac{-\mathrm{i}(-1)^N}{2}\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} - \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}(\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}}{\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}(\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}}\right. \\ & \times\left[-\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}(\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}\right] \\ & \left.-\left[\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}(\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}\right]\right\}\exp(-\mathrm{i}k_t d) \\ =& \frac{2\mathrm{i}(-1)^N\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_t}\exp(-\mathrm{i}k_t d)}{\sqrt{\varepsilon_h/\varepsilon_t}(\varepsilon_h/\varepsilon_l)^{N/2} + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_h}(\varepsilon_l/\varepsilon_h)^{N/2}} \end{aligned} \tag{2-126}$$

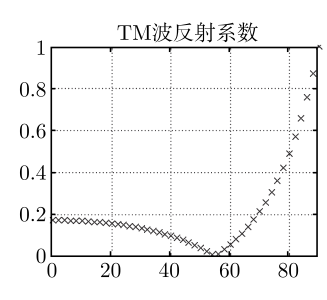
由式 (2-125) 可见, 如果光疏和光密介质的介电系数相差较大, 即比值 $\varepsilon_l/\varepsilon_h$ 小于 1, 且周期层数目 N 也较大, 式 (2-125) 中 $(\varepsilon_l/\varepsilon_h)^N \ll 1$, 因而反射系数 $R \approx -1$. 这一类周期性分层介质可以用作光学器件的高反射膜.

2.6　半空间分层介质反射和透射系数的 MATLAB 计算

2.6.1　半空间界面反射和透射的 Fresnel 公式

本节给出根据半空间 Fresnel 公式用 MATLAB 计算反射和透射系数, 参见 2.2 节. 算例所用频率 $f = 1\times10^6$ Hz, 介质参数为 $\varepsilon_\mathrm{r} = 2.0$、$\mu_\mathrm{r} = 2.0$、$\sigma = 1\times10^{-5}$ S/m、$\sigma_\mathrm{m} = 0$, 计算得到反射和透射系数如图 2-30 所示.





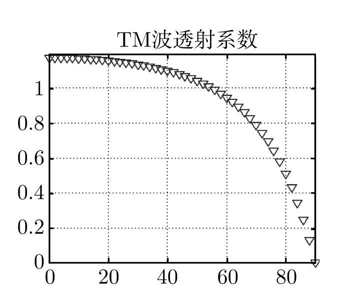


图 2-30　半空间界面的反射和透射系数

需要注意的是, 图 2-30 中 TM 情形的透射系数可能大于 1. 这是因为 TM 情形透射系数定义为透射波磁场 H_t 和入射波磁场 H_i 之比,

$$T^{\mathrm{TM}} = \frac{H_\mathrm{t}}{H_\mathrm{i}}$$

根据平面波的性质, 上半空间 (入射波一侧) 和下半空间中平面波电场和磁场之间的关系为

$$E_\mathrm{i} = \eta_1 H_1, \quad E_t = \eta_2 H_2$$

式中,

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

分别为上、下半空间的波阻抗. 可知, TM 情形透射系数可以表示为

$$T^{\mathrm{TM}} = \frac{H_\mathrm{t}}{H_\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}}$$

考虑到本例介质参数取值 $\varepsilon_\mathrm{r} = 2.0$、$\mu_\mathrm{r} = 2.0$, 有

$$T^{\mathrm{TM}} = \frac{H_\mathrm{t}}{H_\mathrm{i}} = \sqrt{2}\frac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}}$$

所以, 在透射波和入射波电场之比小于 1, 即 $|E_t/E_i| \leqslant 1$ 时, 可能会出现透射系数 $\left|T^{\mathrm{TM}}\right|$ 大于 1.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           本程序计算半空间界面的反射和透射, 给出反射系数和透射系数
%                          随入射角变化的曲线
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
epsion_0=8.85e-12;                       %真空中的介电常数
mur_0=4.0*pi*1.0e-7;                     %真空中的磁导系数
```

```
epsion_r=2;                                   %介质的相对介电常数
mur_r=1.0;                                    %介质的相对磁导系数

omega=2*pi*1.0e6;                             %入射电磁波圆频率
sigma=1.0e-5;                                 %介质电导率
sigmam=0;

epsion=epsion_0*(epsion_r+j*sigma/omega);              %复数介电常数
mur=mur_0*(mur_r+j*sigmam/omega);                      %复磁导系数
k=abs(sqrt(omega2*epsion_0*mur_0));                    %入射波波矢量
kt=abs(sqrt(omega2*epsion*mur));                       %透射波波矢量

for n=0:2:90              %入射角 (0 度表示垂直于界面, 90 度表示掠入射)
    theta=n*pi/180;
    k_z=k*cos(theta);     %入射波矢量在 Z 方向的投影 (Z 为界面法向)
    k_x=k*sin(theta);     %入射波矢量在 X 方向的投影–相位匹配
    kt_z=sqrt(kt2-k_x2);  %透射波矢量在 Z 方向的投影–介质中

    %TE 情形
    p0t_te=mur_0*kt_z/(mur*k_z);
    R_TE=abs((1-p0t_te)/(1+p0t_te));
    T_TE=abs(2/(1+p0t_te));

    %TM 情形
    p0t_tm=epsion_0*kt_z/(epsion*k_z)
    R_TM=abs((1-p0t_tm)/(1+p0t_tm));
    T_TM=abs(2/(1+p0t_tm));

    axis([0,90,0,1.2])
    subplot(2,2,1)
    plot(n,R_TE,'o')
    grid on
    title('TE 波反射系数 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ')
    hold on
```

```
    axis([0,90,0,1])
    subplot(2,2,2)
    plot(n,T_TE,'+')
    grid on
    title('TE 波透射系数 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ')
    hold on
    axis([0,90,0,1])
    subplot(2,2,3)
    plot(n,R_TM,'x')
    grid on
    title('TM 波反射系数 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ')
    hold on
    axis([0,90,0,1])
    subplot(2,2,4)
    plot(n,T_TM,'v')
    grid on
    title('TM 波透射系数 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ')
    hold on
    pause(0.1)
end
```

2.6.2 分层介质反射系数的连分数法

本节给出用 MATLAB 实现连分数方法计算分层介质的反射系数, 参见 2.4.2 节. 如图 2-27 所示, 由 6 个周期构成的分层结构, 设所有介质均为非磁性无耗介质, 介电系数分别为 $\varepsilon_{rh}=4, \varepsilon_{rl}=1$. 介质板厚度为 1cm, 板间距为 1cm. 输入不同频率, 计算得到入射角为 30° 时该分层介质周期结构的反射系数 (模值) 如图 2-31 所示. 可见, 周期结构介质板能够在一定的频率范围内 (4000∼6500MHz) 使反射系数接近于 1, 因而该频段的电磁波不能通过此周期结构.

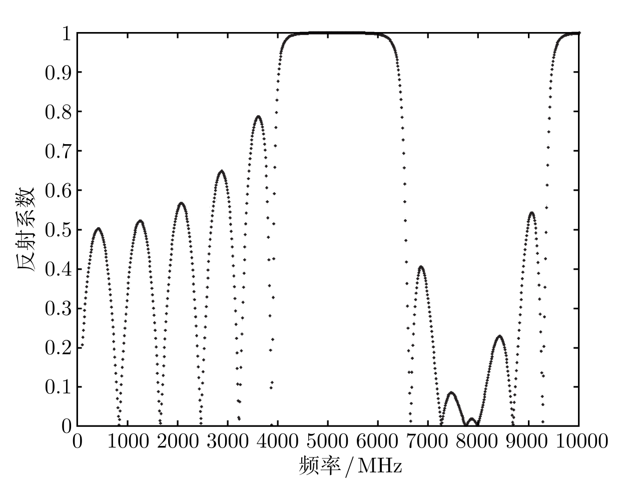


图 2-31　分层介质板的反射系数

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           本程序采用连分数方法计算一定入射角电磁波在
%                  不同频率下分层介质的反射系数
%           0 区
%—————————————————————————————————————
%           1 区
%—————————————————————————————————————
%           。。。
%           。。。
%—————————————————————————————————————
%           l 区
%—————————————————————————————————————
%           l+1 区
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
epsion=8.85e-12*[1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1];           %各区域的相对介电常数
mur=4*pi*1.0e-7*[1,1.,1,1.,1,1.,1,1.,1,1.,1,1.,1];     %各区域的的相对磁导系数
d=[0,-0.01,-0.02,-0.03,-0.04,-0.05,-0.06,-0.07,-0.08,-0.09,-0.10,-0.11,-0.12];
                                                        %分界面的位置
theta=30*pi/180;                                        %入射角
```

```
%选择入射波模式
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');
fid1=fopen('LFS.dat','wt');              %存放反射和透射系数的据件

for f=100:50:10000                       %入射波频率
omega=2*pi*f*1e6;                        %入射波圆频率
k=sqrt(omega 2*epsion.*mur);             %存放各介质区域的波矢量大小矩阵
kx=k(:,1)*sin(theta)                     %入射波矢量在 X 方向的投影 (连续)
kz=sqrt(k.^2-kx.^2);                        %存放各介质区域的波矢量 z 分量大小矩阵
M=size(epsion);                          %epsion 矩阵的列数就是介质区域的数目
N=M(1,2)-1;                              %分界面的数目为介质区域数目减一

if wavetype==1
for n=1:N
p(n)=mur(:,n)*kz(:,n+1)/(mur(:,n+1)*kz(:,n));
                                          %计算 TE 情形各界面的 P 因子
end
elseif wavetype==-1
for n=1:N
p(n)=epsion(:,n)*kz(:,n+1)/(epsion(:,n+1)*kz(:,n));
                                          %计算TM情形各界面的P因子
end
end

for n=1:N
r(n)=(1-p(:,n))/(1+p(:,n));              %计算各分界面的反射系数
end

R=0;                                     %设最下面区域的反射系数为零

for n=N:-1:1                             %利用连分数方法计算最上面区域的反射系数
    A=1/r(:,n);
    B=exp(i*2*kz(:,n+1)*d(:,n));
    C=exp(i*2*kz(:,n)*d(:,n));
```

```
    R=A*C+(1-A^2)*B*C/(A*B+R);
end

%plot(f,abs(R),'*')
plot(f,abs(R),'O')
xlabel(' 频率 MHz','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ');
ylabel(' 反射系数 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ');
hold on
fprintf(fid1,'\n %8d %+12.5E',f,abs(R));  %将频率、反射系数、透射系数写入件
end
fclose(fid1);
```

2.6.3　分层介质反射和透射系数的传播矩阵法

本节给出用 MATLAB 实现传播矩阵方法计算分层介质的反射和透射系数, 参见 2.5 节. 算例参数同 2.5 节. 六层介质板构成的分层结构的反射系数和透射系数 (模值) 随频率的变化如图 2-32 所示. 由于是无耗介质板, 根据能量守恒定律, 在频率一定时反射系数和透射系数的平方和为 1.

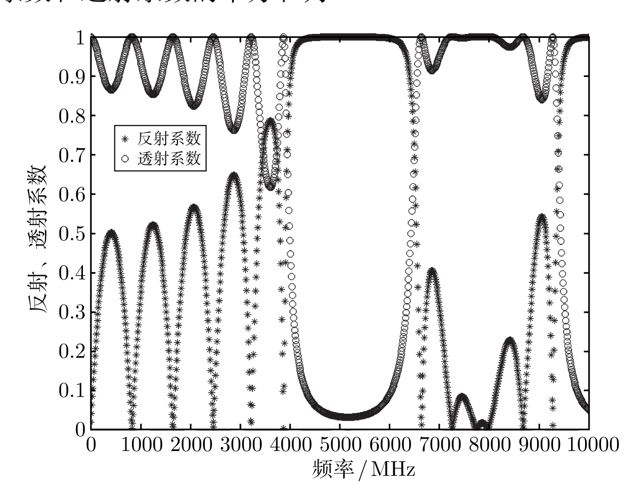


图 2-32　分层介质板的反射和透射系数

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%         用传播矩阵法计算斜入射电磁波时分层介质的反射和透射系数
%           0 区
%—————————————————————————————————————
%           1 区
```

```
%————————————————————————————————————
%                ⋮
%————————————————————————————————————
%               l 区
%————————————————————————————————————
%               l+1 区
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
epsion_0=8.85e-12;
mur_0=4*pi*1.0e-7;
epsion=epsion_0*[1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1];
                                    %各区域的相对介电常数
mur=mur_0*[1,1.,1,1.,1,1.,1,1.,1,1.,1,1.,1];
                                    %各区域的相对磁导系数
sigma=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];  %各区域的电导率
sigmam=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]; %各区域的导磁率
d=[0,-0.01,-0.02,-0.03,-0.04,-0.05,-0.06,-0.07,-0.08,-0.09,-0.10,-0.11,-0.12];
                                    %分界面的位置
theta=30*pi/180;                    %入射角
M=size(epsion);                     %epsion 矩阵的列数就是介质区域的数目
N=M(1,2)-1;                         %分界面的数目为介质区域数目减一

%选择入射波模式
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');

fid1=fopen('RT.dat','wt');          %存放反射和透射系数的据件

for f=10:10:10000                   %入射波频率
    omega=2*pi*f*1e6;               %入射波圆频率 (实际频率为循环变量的 1e6 倍)
    epsion=epsion+j*sigma/(omega*epsion_0);
                                    %复数介电常数
    mur=mur+j*sigmam/(omega*mur_0);
                                    %复磁导系数
```

```
    k=abs(sqrt(omega2*epsion.*mur));     %存放各介质区域的波矢量大小矩阵
    kx=k(:,1)*sin(theta);                %入射波矢量在 X 方向的投影 (连续)
    kz=sqrt(k.^2-kx.^2);                 %存放各介质区域的波矢量 z 分量大小矩
阵

    if wavetype==1
        for n=1:N
        p(n)=mur(:,n+1)*kz(:,n)/(mur(:,n)*kz(:,n+1));
                                         %计算 TE 情形各界面的 P 因子
        end
    elseif wavetype==-1
        for n=1:N
        p(n)=epsion(:,n+1)*kz(:,n)/(epsion(:,n)*kz(:,n+1));
                                         %计算 TM 情形各界面的 P 因子
        end
    end

    for n=1:N
        r(n)=(1-p(:,n))/(1+p(:,n));    %计算各分界面的反射系数
    end

    VV=eye(2);
for n=1:N-1
%计算第一个界面上方附近一点导最后一个界面上方临近一点的传播矩阵
        v=0.5*(1+p(:,n));
        V11=v*exp(-j*kz(:,n+1)*(d(:,n+1)-d(:,n)));
        V12=v*r(:,n)*exp(-j*kz(:,n+1)*(d(:,n+1)-d(:,n)));
        V21=v*r(:,n)*exp(j*kz(:,n+1)*(d(:,n+1)-d(:,n)));
        V22=v*exp(j*kz(:,n+1)*(d(:,n+1)-d(:,n)));
        V=[V11,V12;V21,V22];
        VV=VV*V;
    end
        %计算穿越最后一个界面的传播矩阵
        v1=0.5*(1+p(:,N));
        Vtn11=v1*exp(j*kz(:,N+1)*d(:,N));
```

```
        Vtn12=v1*r(:,N)*exp(j*kz(:,N+1)*d(:,N));
        Vtn21=v1*r(:,N)*exp(-j*kz(:,N+1)*d(:,N));
        Vtn22=v1*exp(-j*kz(:,N+1)*d(:,N));
        Vtn=[Vtn11,Vtn12;Vtn21,Vtn22];

        VV=Vtn*VV;
        %计算分层介质的反射系数和透射系数
    R=(-VV(1,2)/VV(1,1))*exp(j*2*kz(:,1)*d(:,1));

T=(-VV(2,1)*VV(1,2)/VV(1,1)+VV(2,2))*exp(-j*(kz(:,N+1)*d(:,N)-kz(:,1)*d(:,1)));
        %绘出反射系数和透射系数随频率的变化曲线
plot(f,abs(R),'*',f,abs(T),'o')
hold on
fprintf(fid1,'\n %8d %+12.5E %+12.5E',f,abs(R),abs(T));
         %将频率、反射系数、透射系数写入件
end
legend(' 反射系数 ',' 透射系数 ',0)
xlabel(' 频率 MHz','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ');
ylabel(' 反射、透射系数 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ');
fclose(fid1);
```

习　　题

1. 有耗介质的透入深度. (1) 在微波炉的工作频率 (2.5 GHz) 下牛肉的复数介电系数约为 $\varepsilon = 40\times(1+\mathrm{i}0.3)\,\varepsilon_0$. 试计算其透入深度.

(2) 试计算海水在频率 60 Hz 和 10 MHz 下的透入深度, 海水在此频率下的电导率 $\sigma = 4$ mho/m, 介电系数 $\varepsilon = 80\varepsilon_0$.

2. 超导体的一种简单模型是将其当作电子浓度 N 非常高的电子等离子体.

(1) 试证：N 非常大时等离子体的透入深度为

$$d_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{m}{Nq^2\mu_0}}$$

式中, m 和 q 分别为电子质量和电量.

(2) 设 $N = 7\times10^{28}\mathrm{m}^{-3}$, 计算 d_p.

3. 设等离子体的导磁系数为 μ_0, 介电系数为 $\varepsilon = \varepsilon_0\left(1-\omega_\mathrm{p}^2/\omega^2\right)$, 其中 ω_p 为等离子体频率, ω 为电磁波频率. 若均匀等离子体分布在半空间, 平面电磁波自空气入射到等离子体界面, 频率 $\omega = 2\omega_\mathrm{p}$, 试求其全反射临界角 θ_c.

4. 设 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$, 试证在全反射时, TM 和 TE 波之间相对相位改变的差为

$$\Delta=\varphi_{\rm TE}-\varphi_{\rm TM}=2\arctan\left[\frac{\cos\theta\left(\sqrt{\sin^2\theta-n^{-2}}\right)}{\sin^2\theta}\right]$$

全反射时的相位改变可以使线极化波转变为圆极化波, Fresnel 提出的办法如下图. 斜方形玻

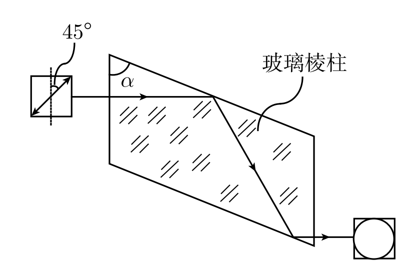


图 2-33　玻璃棱柱使线极化波转变为圆极化波

璃棱柱 ($n=1.6$) 顶角为 α. 设线极化波的极化方向与入射面成 45° 角, 入射方向垂直于棱柱的一端面. 欲使出射波为圆极化的, 试问 α 角应等于多少?

5. 设均匀良导体电导率为 σ, $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$, 占据 $z<0$ 半空间. 平面电磁波从自由空间入射. 试证折射角 $\theta_{\rm t}$ (透射波传播方向与法向夹角) 为

$$\theta_{\rm t}\simeq\arctan\left[\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\sin\theta_{\rm i}\right]$$

即 $\theta_{\rm t}$ 很小, 透射波传播方向几乎与界面垂直.

6. (1) 设平面波垂直入射到介质板, 板的衬底为理想导体, 如图 2-34 所示, 试用连分数方法导出反射系数公式.

(2) 设入射波频率为 900MHz, 介质板的参数为 $\sigma=10^{-2}$S/m, $\mu_{\rm r}=\varepsilon_{\rm r}=1$, 板的厚度 $d=$3mm, 求其反射系数 (Kraus, 2001: 242).

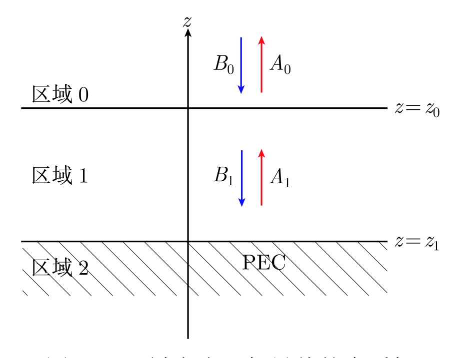


图 2-34　衬底为理想导体的介质板

7. 设平面波斜入射到介质板, 对于单层介质板, 即分层数 $n=1$, 设其衬底为理想导体, 见图 2-34.

(1) 用连分数方法导出 TE 波的反射系数 R 公式.

(2) 对于 TM 波, 用连分数方法导出反射系数 R 公式.

8. 如图 2-35 所示, 对于交替具有较大和较小介电系数的分层介质, 设所有 $\mu=\mu_0$, 以及 $n_h=2.3$, $n_l=1.35$ 和 $n_h d_h=n_l d_l=\lambda/4$, $\lambda_0=5460$ Å$=0.5460\mu$m, 试求反射波与入射波强度之比, 即 $|E_\mathrm{r}/E_\mathrm{i}|^2=$?

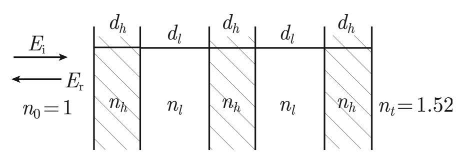


图 2-35　周期分层介质

9. 根据分层介质前向传播矩阵的分析方法, 试证后向传播矩阵为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{l(l+1)}=\frac{1+p_{l(l+1)}}{2}\begin{bmatrix}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)x}\left(d_{l+1}-d_l\right)\right] & R_{l(l+1)}\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)x}\left(d_{l+1}-d_l\right)\right]\\ R_{l(l+1)}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)x}\left(d_{l+1}-d_l\right)\right] & \exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)x}\left(d_{l+1}-d_l\right)\right]\end{bmatrix}$$

(1) 并证明 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{l(l+1)}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{(l+1)l}=\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}_{(l+1)l}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{l(l+1)}=\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 其中 $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 为 2×2 单位矩阵.

(2) 试证明反射和透射系数可由下式计算

$$\begin{bmatrix}R\exp\left(-\mathrm{i}k_z d_0\right)\\ \exp\left(\mathrm{i}k_z d_0\right)\end{bmatrix}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{0t}\cdot\begin{bmatrix}0\\ T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ T\end{bmatrix}$$

式中,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{0t}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{01}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{12}\cdots\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}_{nt}$$

$\overline{\overline{U}}_{nt}$ 代表什么?

10. 水的色散关系为

$$\omega=\sqrt{\frac{gk}{2}}$$

式中, $g=9.8\mathrm{m/s}^2$. 试求水中电磁波相速和群速的表示式 (Kong, 2002: 155).

第 3 章　各向异性介质中的平面波

本章讨论各向异性介质中的平面波特性. 根据各向异性介质本构参数张量, 介绍单轴介质和回旋介质中的本征波, 以及各向异性介质中 Faraday 效应等重要物理现象.

3.1　双各向异性介质

3.1.1　本构关系和能量密度

双各向异性介质的本构关系为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} + \overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}} \cdot \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{B} &= \overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}} \cdot \boldsymbol{E} + \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{3-1}$$

实际介质通常具有对称性, 即

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\varepsilon}}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \\ &\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}} \quad \text{或} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}} \end{aligned} \tag{3-2}$$

电各向异性介质和磁各向异性介质是双各向异性介质的特殊情形.

为了讨论线性、双各向异性介质中的能量密度, 重写式 (1-13),

$$\oiint\limits_{S} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_{V} \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}V = -\iiint\limits_{V} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V \tag{3-3}$$

以下将矢量点乘改用矩阵表示, 即 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{B}$, 式中上标 T 表示矩阵转置. 于是式 (3-3) 中 $\boldsymbol{H} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, 由本构关系 (3-1) 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}} \cdot \boldsymbol{E} + \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} \right) \\ &= \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ &= \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{H} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{H} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

同理有

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

所以式 (3-3) 中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\&=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\&=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H}+\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\&=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}+\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\&=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

上式推导中用到对称性式 (3-2). 回到通常的矢量点乘记号, 上式为

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{3-4}$$

所以式 (3-3) 中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}&=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)\end{aligned}$$

代入式 (3-3) 再用到式 (1-15) 能量密度的定义即可得如式 (1-16) 所示的能量守恒定律,

$$\oiint_{A}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V}W\mathrm{d}V=-\iiint_{V}\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\right)\mathrm{d}V$$

式中, 能流密度和电磁场能量密度表示式和各向同性介质相同, 分别为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$W=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)$$

3.1.2 无耗介质条件

设介质为双各向异性, 即本构关系为式 (3-1), 且所讨论区域中无源, 即 $\boldsymbol{J}=0$, 式 (1-31) 变为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{average}}&=-\omega\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^{*}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right\}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^{*}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)\right\}\end{aligned}\tag{3-5}$$

如果介质为无耗, 即有 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{average}}=0$, 式 (3-5) 变为

$$0=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^{*}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)\right\}$$

将矢量点乘改用矩阵相乘符号, 即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}$, 上标 T 表示矩阵转置, 上式变为

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{H}^{+}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{H}^{+}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)+\left[\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{H}^{+}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)\right]^{*}\right\}\\&=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\left[\left(\boldsymbol{H}^{+}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)-\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{E}^{+}\cdot\boldsymbol{D}\right)\right]\end{aligned}$$

式中, 上标 + 表示矩阵转置共轭. 将本构关系式 (3-1) 代入上式得

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\left[\left(\boldsymbol{H}^{+}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}^{*}\right)-\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{E}^{+}\cdot\boldsymbol{D}\right)\right]\\&=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\Bigg[\boldsymbol{H}^{+}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)^{*}\\&\qquad-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)^{*}+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}+\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

再利用关系式,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}$$

于是得

$$\begin{aligned}0=&\,\boldsymbol{H}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*}\cdot\boldsymbol{E}^{*}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{*}\cdot\boldsymbol{H}^{*}\\&-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{*}\cdot\boldsymbol{E}^{*}-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{*}\cdot\boldsymbol{H}^{*}+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\cdot\boldsymbol{H}\\=&\,\boldsymbol{H}^{+}\cdot\overline{\overline{\zeta}}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{+}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{H}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{+}\cdot\boldsymbol{E}\\&-\boldsymbol{E}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{+}\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{+}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\cdot\boldsymbol{H}\\=&\,\boldsymbol{H}^{+}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}-\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{+}\right)\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}^{+}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}-\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{+}\right)\cdot\boldsymbol{H}\\&+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}-\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{+}\right)\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{+}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}-\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{+}\right)\cdot\boldsymbol{H}\end{aligned}$$

上式对任何 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 均成立, 必须有

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{+},\quad\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{+}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}^{+}\ \text{或}\ \overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{+}\end{aligned}\right\}\tag{3-6}$$

式 (3-6) 是无耗介质本构参数矩阵的特性, 其中后两个等式为等价. 注意：当本构参数为实数, 式 (3-6) 就是式 (3-2).

3.2　介电系数和导磁系数张量

3.2.1　磁化等离子体的介电系数张量

等离子体 (plasma) 是介质中分子、原子电离后的一种特殊状态, 由电子 (带负电) 和正离子组成, 总体呈电中性. 当电磁波在等离子体中传播时, 由于正离子质量远大于电子质量, 所以电磁波入射到等离子体时主要计及电磁波与电子的相互作用. 设时谐因子为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 外加恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 平行于 z 轴. 于是, 根据牛顿定律单个电子在电磁场中的运动方程为 (如图 3-1)

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega m\boldsymbol{v}$$

式中, m 为电子质量. 作用在电子上的电磁力为

$$\boldsymbol{F} = q\left[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B})\right]$$

式中, q 为电子电量, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为电磁波的电场和磁场. 当电子运动速度 $v \ll c$ 时, 电磁波中磁场力的作用可略. 上式中也未计入电子与正离子之间的碰撞所对应的阻尼力, 在稀薄等离子体情形这一近似成立. 由以上二式得到

$$q\left[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\right] = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega m\boldsymbol{v} \tag{3-7}$$

引入参数

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} = \frac{q}{m}\boldsymbol{B}_0, \quad \boldsymbol{E}_\mathrm{a} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{3-8}$$

ω_c 称为外磁场中电子回旋频率. 式 (3-7) 可改写为

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}_\mathrm{a} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} \tag{3-9}$$

从式 (3-9) 可以解得

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_\mathrm{c}^2}\left[\mathrm{i}\omega\boldsymbol{E}_\mathrm{a} - \boldsymbol{E}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} + \frac{(\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c})\,\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}}{\mathrm{i}\omega}\right] \tag{3-10}$$

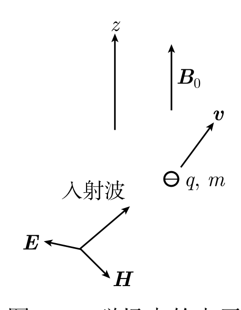


图 3-1　磁场中的电子

式 (3-10) 推导如下. 为了从式 (3-10) 求解出 v, 将式 (3-10) 两端叉乘 $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\omega_\mathrm{c}^2\boldsymbol{v}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\end{aligned}$$

另外, 将式 (3-9) 点乘 $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}$ 得

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}$$

以上二式代入式 (3-9) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}-\frac{1}{\omega^2}\left[\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}-\omega_\mathrm{c}^2\boldsymbol{v}+\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right]\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}-\frac{1}{\omega^2}\left[\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}+\left(\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right]+\frac{\omega_\mathrm{c}^2}{\omega^2}\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

上式移项整理得

$$\left(1-\frac{\omega_\mathrm{c}^2}{\omega^2}\right)\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}-\frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}-\frac{\mathrm{i}}{\omega^3}\left(\boldsymbol{E}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}$$

上式即为式 (3-10). 证毕.

由于介质极化产生的电位移矢量定义为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\tag{3-11}$$

式中, $\boldsymbol{P}$ 为极化矢量, 代表单位体积中的电偶极矩. 对于等离子体

$$\boldsymbol{P}=Nq\boldsymbol{r}\tag{3-12}$$

式中, N 为电子浓度, $q\boldsymbol{r}$ 为单个电子的电偶极矩. 在时谐场情形有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{r}\tag{3-13}$$

式 (3-12)、式 (3-13) 代入式 (3-11) 得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\mathrm{i}\frac{Nq}{\omega}\boldsymbol{v}\tag{3-14}$$

式 (3-10) 代入式 (3-14) 得到

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\right)\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}+\left(\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)\frac{\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right)}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right]\tag{3-15}$$

式中, 参数

$$\omega_{\rm p}=\sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} \tag{3-16}$$

称为等离子体频率, 或等离子体电子震荡频率, 或 Langmuir 频率. 设外磁场沿 z 轴, 即

$$\boldsymbol{B}_0=\hat{\boldsymbol{z}}B_0,\quad \boldsymbol{\omega}_{\rm c}=\hat{\boldsymbol{z}}\frac{q}{m}B_0=\hat{\boldsymbol{z}}\omega_{\rm c} \tag{3-17}$$

将式 (3-17) 代入式 (3-15) 并写成分量形式,

$$\left.\begin{aligned}
D_x&=\varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right)E_x-\frac{{\rm i}\omega_{\rm c}}{\omega}\left(\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right)E_y\right]\\
D_y&=\varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right)E_y+\frac{{\rm i}\omega_{\rm c}}{\omega}\left(\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right)E_x\right]\\
D_z&=\varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right)E_z+\frac{\omega_{\rm c}^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right)E_z\right]=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}\right)E_z
\end{aligned}\right\} \tag{3-18}$$

可见 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间为各向异性. 引入介电系数张量后, 以上本构关系式可写为

$$\boldsymbol{D}=\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3-19}$$

比较式 (3-18)、式 (3-19) 得到介电系数张量为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon & {\rm i}\varepsilon_g & 0\\ -{\rm i}\varepsilon_g & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{3-20}$$

式中,

$$\varepsilon=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2}\right),\quad \varepsilon_g=\varepsilon_0\frac{-\omega_{\rm c}}{\omega}\cdot\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2-\omega_{\rm c}^2},\quad \varepsilon_z=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}\right) \tag{3-21}$$

由此可见, 磁化等离子体为各向异性介质, 其介电系数张量满足关系式 $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{+}$, 即如式 (3-6) 所示无耗条件.

特别, 如果没有外磁场, $B_0=0$, 即 $\omega_{\rm c}=0,\varepsilon_g=0$, 这时

$$\varepsilon=\varepsilon_z=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}\right) \tag{3-22}$$

可见无外磁场时的等离子体为电各向同性介质, 即 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_{\rm plasma}\boldsymbol{E}$, 其介电系数为

$$\varepsilon_{\rm plasma}=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}\right) \tag{3-23}$$

即式 (2-24), 与频率 ω 有关, 属于色散介质.

3.2.2 磁化铁氧体的导磁系数张量

根据固体物理, 铁氧体的磁性和电子自旋相关联. 设电子的自旋磁矩为 $\boldsymbol{m}$, 自旋角动量为 $\boldsymbol{L}$, 二者之间的关系为

$$\boldsymbol{m} = -\gamma' \boldsymbol{L} \tag{3-24}$$

式中, γ' 为电子的旋磁比, 负号是由于电子带负电荷. 在外磁场 $\boldsymbol{B}_t$ 中具有自旋磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的电子所受到的力矩为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_t = \mu_0 \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_t \tag{3-25}$$

其牛顿运动方程为

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{3-26}$$

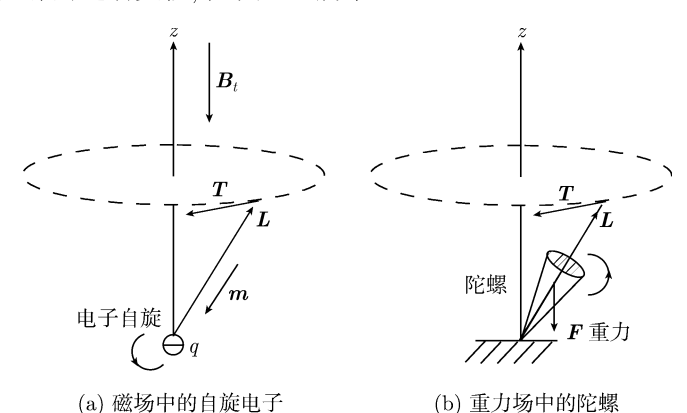
设铁氧体中电子浓度为 N, 介质磁化强度为

$$\boldsymbol{M}_t = N\boldsymbol{m} \tag{3-27}$$

合并以上各式得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t} = -\gamma \boldsymbol{M}_t \times \boldsymbol{H}_t \tag{3-28}$$

式中, $\gamma = \mu_0 \gamma'$. 由于电子具有磁矩和自旋角动量, 在磁场作用下将产生进动. 这一进动现象和陀螺的进动类似, 如图 3-2 所示.



(a) 磁场中的自旋电子　　(b) 重力场中的陀螺

图 3-2　磁场中自旋电子的进动

陀螺的转动具有 “自旋” 角动量, 重力作用下的力矩使其产生进动. 当电磁波在铁氧体中传播, 式 (3-28) 中磁场应是外加恒定磁场和电磁波磁场二者之和.

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H} \exp{(-\mathrm{i}\omega t)} \tag{3-29}$$

式中, $\boldsymbol{H}$ 代表时谐场的磁场幅值. 设 $|\boldsymbol{H}| \ll |\boldsymbol{H}_0|$, 在外磁场和电磁波作用下, 介质磁化强度可表示为

$$\boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{M}\exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad |\boldsymbol{M}| \ll |\boldsymbol{M}_0| \tag{3-30}$$

将以上二式代入式 (3-28), 并略去二阶小量, 得到

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{M}\exp(-\mathrm{i}\omega t) \simeq -\gamma\left[\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{H}\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right] \tag{3-31}$$

式中, 由于 $\boldsymbol{M}_0 \parallel \boldsymbol{H}_0$, 所以 $\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{H}_0 = 0$, 代入式 (3-31) 得

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{M} \simeq -\gamma\left(\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i} + \boldsymbol{M}_\mathrm{i}\times\boldsymbol{H}_0\right) \tag{3-32}$$

引入参数,

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} \simeq -\gamma\boldsymbol{H}_0, \quad \boldsymbol{H}_\mathrm{a} = -\gamma\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i} \tag{3-33}$$

则式 (3-32) 重写为

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}_\mathrm{a} + \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} \tag{3-34}$$

式 (3-34)、式 (3-9) 形式相同, 采用同样求解过程可得

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\left[\mathrm{i}\omega\boldsymbol{H}_\mathrm{a} - \boldsymbol{H}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} + \frac{(\boldsymbol{H}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c})\,\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}}{\mathrm{i}\omega}\right] \tag{3-35}$$

式中, 方括号内第三项中的

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} = \gamma^2\left(\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i}\right)\cdot\boldsymbol{H}_0 = \gamma^2\left(\boldsymbol{H}_0\times\boldsymbol{M}_0\right)\cdot\boldsymbol{H}_\mathrm{i} = 0$$

因而式 (3-35) 变为

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\left(\mathrm{i}\omega\boldsymbol{H}_\mathrm{a} - \boldsymbol{H}_\mathrm{a}\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right) \tag{3-36}$$

引入符号

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \gamma\boldsymbol{M}_0$$

代入式 (3-33) 有

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{a} = -\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$$

于是式 (3-36) 改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \frac{1}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\left[-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{H} + (\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\right] \\ &= \frac{1}{\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2}\left[-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\omega}_0\left(\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c}\cdot\boldsymbol{H}\right) + \omega_0\omega_\mathrm{c}\boldsymbol{H}\right]\end{aligned} \tag{3-37}$$

式 (3-37) 中用到 $\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{c}} = \omega_0\omega_{\mathrm{c}}$. 根据磁感应强度定义,

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{3-38}$$

式 (3-37) 代入式 (3-38) 得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left[\left(1 + \frac{\omega_{\mathrm{c}}\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} \right) \boldsymbol{H} + \frac{\mathrm{i}\omega}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{c}}) \boldsymbol{\omega}_0 \right] \tag{3-39}$$

设外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 沿 z 轴, 即 $\boldsymbol{H}_0 = \hat{\boldsymbol{z}} H_0$, 则

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \hat{\boldsymbol{z}}\gamma M_0 = \hat{\boldsymbol{z}}\omega_0, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{c}} = -\gamma \boldsymbol{H}_0 = -\hat{\boldsymbol{z}}\gamma H_0 = -\hat{\boldsymbol{z}}\omega_{\mathrm{c}}$$

式 (3-39) 的分量式为

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \mu_0 \left[\left(1 + \frac{\omega_{\mathrm{c}}\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} \right) H_x + \frac{\mathrm{i}\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} H_y \right] \\ B_y &= \mu_0 \left[\left(1 + \frac{\omega_{\mathrm{c}}\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} \right) H_y - \frac{\mathrm{i}\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} H_x \right] \\ B_z &= \mu_0 H_z \end{aligned}\right\} \tag{3-40}$$

磁各向异性介质本构关系式为

$$\boldsymbol{B} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} \tag{3-41}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ 为导磁系数张量. 比较式 (3-40)、式 (3-41) 得到

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \begin{bmatrix} \mu & \mathrm{i}\mu_g & 0 \\ -\mathrm{i}\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \tag{3-42}$$

式中,

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_{\mathrm{c}}\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2} \right), \quad \mu_g = \mu_0 \frac{\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2}, \quad \mu_z = \mu_0 \tag{3-43}$$

由此可见, 在有外磁场时铁氧体为磁各向异性介质, 且导磁系数张量 $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ 满足无耗条件 (3-6), 即 $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{+}$.

3.3 相对旋转坐标系中矢量和张量的变换关系

各向异性介质的本构参数和空间坐标系的选取有关. 设 xyz 系 (简称 S 系) 绕坐标原点 O 旋转后得新坐标系 $x'y'z'$ 系 (简称 S$'$ 系), 如图 3-3 所示. 在 S 系和 S$'$ 系中本构关系分别写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{D}' &= \overline{\overline{\varepsilon'}} \cdot \boldsymbol{E}' \end{aligned} \tag{3-44}$$

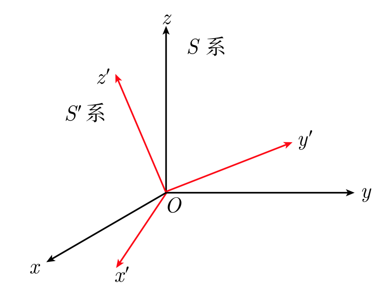


图 3-3　绕坐标原点相对旋转的坐标系

电场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 在 S 系和 S′ 系中的分量式为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}E'_x\\E'_y\\E'_z\end{bmatrix}$$

二者之间的变换关系为

$$\boldsymbol{E}'=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3-45}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 称为变换矩阵. 由于矢量的模值在 S 系和 S′ 系中为不变量, 即 $|\boldsymbol{E}'|=|\boldsymbol{E}|$, 在矩阵表示下即为

$$\boldsymbol{E}'^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3-46}$$

式中, 上标 T 表示矩阵转置. 将式 (3-45) 代入上式得

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3-47}$$

根据矩阵乘积的转置运算有

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}$$

式 (3-47) 变为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}$$

上式对任何矢量 $\boldsymbol{E}$ 成立, 因而其中

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \tag{3-48}$$

$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 为单位矩阵,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

注意到 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$, 这里 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1}$ 为逆矩阵. 于是有

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1} \tag{3-49}$$

式 (3-49) 称为变换矩阵的幺正性, 给出 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 矩阵 9 个元素要求满足的条件. 采用 Einstein 求和记号, 式 (3-48) 又可写为

$$U_{ji}U_{jk}=\delta_{ik},\quad i,k=1,2,3 \tag{3-50}$$

式中, 重叠下标 j 表示 j 从 1 到 3 的求和, 即 $U_{ji}U_{jk} \equiv \sum_{j=1}^{3} U_{ji}U_{jk}$. 式 (3-50) 中 i, k 的不同取值构成 9 个方程, 但其中 $i=1$, $k=2$ 和 $i=2$, $k=1$ 的两个方程彼此相同, 以及 i, $k=1$, 3 和 3, 1; i, $k=2$, 3 和 3, 2 的方程彼此相同. 所以实际上式 (3-50) 只包含 6 个方程. 因此, 矩阵 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 的 9 个元素中只有 3 个独立元素.

电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 也有和式 (3-45) 一样的变换式, 即

$$\boldsymbol{D}' = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \boldsymbol{D}$$

上式和式 (3-45) 代入式 (3-44) 得

$$\boldsymbol{D}' = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \boldsymbol{D} = \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}} \cdot \boldsymbol{E}' = \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \boldsymbol{E}$$

将上式左乘 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1}$ 得

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \boldsymbol{D} = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \boldsymbol{E}$$

即

$$\boldsymbol{D} = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right) \cdot \boldsymbol{E}$$

上式和式 (3-44) 比较可得

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \tag{3-51}$$

以上用到式 (3-49). 同样可以得到

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}} = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}} \tag{3-52}$$

这就是本构参数矩阵在 S 系与 S′ 系之间的变换关系. 式 (3-52) 写成分量式为

$$\varepsilon'_{ij} = U_{mi}\varepsilon_{mk}U_{kj} \tag{3-53}$$

式 (3-53) 用到 Einstein 求和记号. 将式 (3-53) 中下标 i 和 j 交换, 得

$$\varepsilon'_{ji} = U_{mj}\varepsilon_{mk}U_{ki} = U_{kj}\varepsilon_{km}U_{mi} = U_{mi}\varepsilon_{km}U_{kj}$$

如果在 S 系中 $\overline{\overline{\varepsilon}}$ 为对称矩阵, 即 $\varepsilon_{mk} = \varepsilon_{km}$, 上式表明在 S′ 系中 $\overline{\overline{\varepsilon'}}$ 也是对称的, 即 $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ji}$; 反之亦然. 由此可以推论, 当 $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}'}}$ 是对称矩阵时, 经过适当坐标旋转, 总可以找到一个新坐标系, 在此坐标系中 $\overline{\overline{\varepsilon}}$ 成为对角矩阵. 这一坐标系称为主系, 其中三个坐标轴称为晶体的主轴, 在主系中有

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3-54}$$

如果式 (3-54) 中 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$, 这类晶体称为单轴晶体, z 轴称为光轴, 即

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3-55}$$

如果 $\varepsilon_z > \varepsilon$, 称为正单轴晶体; 若 $\varepsilon_z < \varepsilon$, 称为负单轴晶体.

3.4 kDB 系

3.4.1 各向异性介质中平面波方程

考虑双各向异性介质, 其本构关系为式 (3-1), 即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \boldsymbol{E} + \overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}} \cdot \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{B} &= \overline{\overline{\boldsymbol{\zeta}}} \cdot \boldsymbol{E} + \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{3-56}$$

式 (3-56) 以 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 为自变量, 称为 $\boldsymbol{EH}$ 表述. 若改用 $\boldsymbol{BD}$ 表述, 本构关系变为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \boldsymbol{D} + \overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}} \cdot \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{H} &= \overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}} \cdot \boldsymbol{D} + \overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}} \cdot \boldsymbol{B} \end{aligned}\right\} \tag{3-57}$$

无源 Maxwell 的时谐场形式为

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{B} \\ &\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega \boldsymbol{D} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-58}$$

对于平面波, $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 均有相同的时间因子 $\exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)\right]$. 式 (3-58) 中的空间导数算子可以作以下替换:

$$\nabla \to \mathrm{i}\boldsymbol{k} \tag{3-59}$$

于是式 (3-58) 在平面波情形变为

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B} \\ &\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \boldsymbol{D} \\ &\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{D} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-60}$$

若 $\boldsymbol{k}$ 为实数波矢量 (无耗介质), 式 (3-60) 第三、四式表明,

$$\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{D}\perp\boldsymbol{k} \tag{3-61}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都在垂直于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的平面内. 但是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 之间并不一定相互垂直. 一般而言, 各向异性介质中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间不再彼此平行, 所以 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可能不再和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 相互垂直. 因此, 在各向异性介质中将不再用 $\boldsymbol{E}$, 而改用 $\boldsymbol{D}$ 来定义平面波的极化特性.

3.4.2　$\boldsymbol{kDB}$ 系及平面波方程

在讨论各向异性介质中平面波时, 采用以下方式建立 $\boldsymbol{kDB}$ 系, 记其中单位矢为 $\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3$. 首先令

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 /\!/ \boldsymbol{k} \tag{3-62}$$

则 $\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{e}}_3 k$. 在 $\boldsymbol{kDB}$ 系中记

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}_k&=\hat{\boldsymbol{e}}_1B_1+\hat{\boldsymbol{e}}_2B_2+\hat{\boldsymbol{e}}_3B_3\\ \boldsymbol{D}_k&=\hat{\boldsymbol{e}}_1D_1+\hat{\boldsymbol{e}}_2D_2+\hat{\boldsymbol{e}}_3D_3\end{aligned}\right\} \tag{3-63}$$

根据式 (3-60) 第三、四式, 式 (3-63) 中

$$D_3=B_3=0$$

$\boldsymbol{kDB}$ 系中式 (3-57) 写为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_k&=\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k\cdot\boldsymbol{D}_k+\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}_k\cdot\boldsymbol{B}_k\\ \boldsymbol{H}_k&=\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}_k\cdot\boldsymbol{D}_k+\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}_k\cdot\boldsymbol{B}_k\end{aligned}\right\} \tag{3-64}$$

$\boldsymbol{kDB}$ 系中式 (3-60) 第一式写为

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k=\omega\boldsymbol{B}_k=\hat{\boldsymbol{e}}_1\omega B_1+\hat{\boldsymbol{e}}_2\omega B_2 \tag{3-65}$$

式中,

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_1&\hat{\boldsymbol{e}}_2&\hat{\boldsymbol{e}}_3\\0&0&k\\E_1&E_2&E_3\end{vmatrix}=-\hat{\boldsymbol{e}}_1kE_2+\hat{\boldsymbol{e}}_2kE_1$$

可得式 (3-65) 的分量式为

$$\left.\begin{aligned}\omega B_1&=-kE_2=-k\left(\kappa_{21}D_1+\kappa_{22}D_2+\chi_{21}B_1+\chi_{22}B_2\right)\\ \omega B_2&=kE_1=k\left(\kappa_{11}D_1+\kappa_{12}D_2+\chi_{11}B_1+\chi_{12}B_2\right)\end{aligned}\right\} \tag{3-66}$$

同样, 式 (3-60) 第二式的分量式为

$$\left.\begin{aligned}&\omega D_1 = kH_2 = k\left(\gamma_{21}D_1 + \gamma_{22}D_2 + \nu_{21}B_1 + \nu_{22}B_2\right)\\&\omega D_2 = -k\left(\gamma_{11}D_1 + \gamma_{12}D_2 + \nu_{11}B_1 + \nu_{12}B_2\right)\end{aligned}\right\} \tag{3-67}$$

式 (3-67) 为 $\boldsymbol{kDB}$ 系中的平面波方程. 又令

$$u = \frac{\omega}{k} \tag{3-68}$$

为各向异性介质中平面波相速. 将式 (3-66)、式 (3-67) 写成矩阵形式,

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\chi_{11} & \chi_{12}-u\\ \chi_{21}+u & \chi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\\&\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{21} & \nu_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}+u\\ \gamma_{21}-u & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3-69}$$

以上是双各向异性介质中平面波的本征方程. 下面讨论两种特殊情形:

情形一: 电各向异性介质. 式 (3-64) 本构关系变为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}_k = 0, \quad \boldsymbol{E}_k = \overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k \cdot \boldsymbol{D}_k\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}_k = \nu\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}_k = 0, \quad \boldsymbol{H}_k = \nu\boldsymbol{B}_k\end{aligned}\right\} \tag{3-70}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 为单位张量. 式 (3-70) 代入式 (3-69) 得

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & -u\\ u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\\&\nu\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & u\\ -u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3-71}$$

合并以上二式得

$$\begin{bmatrix}u^2-\nu\kappa_{11} & -\nu\kappa_{12}\\ -\nu\kappa_{21} & u^2-\nu\kappa_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} = 0 \tag{3-72}$$

以上电各向异性介质中平面波本征方程的物理含义将在下节中详细讨论.

情形二: 磁各向异性介质. 式 (3-64) 本构关系变为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k = \kappa\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}_k = 0, \quad \boldsymbol{E}_k = \kappa\boldsymbol{D}_k\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}_k = 0, \quad \boldsymbol{H}_k = \overline{\overline{\nu}}_k \cdot \boldsymbol{B}_k\end{aligned}\right\} \tag{3-73}$$

式 (3-69) 可化简为

$$\left.\begin{aligned}\kappa\begin{bmatrix}D_1\\D_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&-u\\u&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\nu_{11}&\nu_{12}\\\nu_{21}&\nu_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&u\\-u&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{3-74}$$

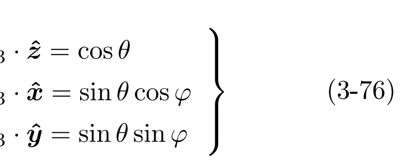
合并以上二式得

$$\begin{bmatrix}u^2-\kappa\nu_{11}&-\kappa\nu_{12}\\-\kappa\nu_{21}&u^2-\kappa\nu_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}=0\tag{3-75}$$

式 (3-75) 和式 (3-72) 有类似形式.

3.4.3　实验室系与 $\boldsymbol{kDB}$ 系之间变换关系

下面考虑实验室坐标系 $\boldsymbol{xyz}$ 和 $\boldsymbol{kDB}$ 系之间的变换. 设 $\boldsymbol{k}$ 矢量在 $\boldsymbol{xyz}$ 系中的方位角为 (θ,φ), 如图 3-4 所示. 如前所述, $\boldsymbol{kDB}$ 系中单位矢记为 $\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3$, 并已确定 $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 平行于 $\boldsymbol{k}$ 矢量, 即有



$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{z}}&=\cos\theta\\\hat{\boldsymbol{e}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{x}}&=\sin\theta\cos\varphi\\\hat{\boldsymbol{e}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{y}}&=\sin\theta\sin\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3-76}$$

图 3-4　实验室 xyz 系和 $\boldsymbol{kDB}$ 系

当 $\theta\neq0$, 选取 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 使

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1=\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_3\times\hat{\boldsymbol{z}}}{\sin\theta}\tag{3-77}$$

$\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 矢量和 z 轴所决定的平面, 即 $\hat{\boldsymbol{e}}_1=-\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, 位于 xoy 面内. 因而,

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{z}}&=\frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_3\times\hat{\boldsymbol{z}})\cdot\hat{\boldsymbol{z}}}{\sin\theta}=0\\\hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{x}}&=\frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_3\times\hat{\boldsymbol{z}})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{\sin\theta}=\frac{(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_3}{\sin\theta}=\frac{\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_3}{\sin\theta}=\sin\varphi\\\hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{y}}&=\frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_3\times\hat{\boldsymbol{z}})\cdot\hat{\boldsymbol{y}}}{\sin\theta}=\frac{(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{y}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_3}{\sin\theta}=\frac{-\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_3}{\sin\theta}=-\cos\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3-78}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 为正交系, 故

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2=\hat{\boldsymbol{e}}_3\times\hat{\boldsymbol{e}}_1\tag{3-79}$$

即 $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}$. 将式 (3-77)、式 (3-76) 代入式 (3-79) 得

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{x}} &= \cos\theta\cos\varphi \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{y}} &= \cos\theta\sin\varphi \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{z}} &= -\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{3-80}$$

下面讨论矢量从一个到另一个坐标系的变换关系. 设矢量在 $\boldsymbol{kDB}$ 系和实验室系分别记为 $\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{kDB}$ 系和 xyz 系是两个相对旋转的坐标系, 按照式 (3-45), 矢量的变换式可以写为

$$\boldsymbol{A}_k = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \boldsymbol{A} \tag{3-81}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 称为变换矩阵, 式 (3-81) 写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{3-82}$$

其分量式为

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= U_{11}A_x + U_{12}A_y + U_{13}A_z \\ A_2 &= U_{21}A_x + U_{22}A_y + U_{23}A_z \\ A_3 &= U_{31}A_x + U_{32}A_y + U_{33}A_z \end{aligned}\right\} \tag{3-83}$$

另一方面, 用矢量符号, 有

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 A_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2 A_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3 A_3 = \hat{\boldsymbol{x}} A_x + \hat{\boldsymbol{y}} A_y + \hat{\boldsymbol{z}} A_z \tag{3-84}$$

用 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 点乘式 (3-84) 得

$$A_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{x}} A_x + \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{y}} A_y + \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{z}} A_z$$

将式 (3-78) 代入上式得

$$A_1 = \sin\varphi A_x - \cos\varphi A_y \tag{3-85}$$

比较式 (3-85) 和式 (3-83) 可得

$$U_{11} = \sin\varphi, \quad U_{12} = -\cos\varphi, \quad U_{13} = 0$$

同样可得 $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 矩阵的其他元素,

$$U_{21}=\cos\theta\cos\varphi,\quad U_{22}=\cos\theta\sin\varphi,\quad U_{23}=-\sin\theta$$
$$U_{31}=\sin\theta\cos\varphi,\quad U_{32}=\sin\theta\sin\varphi,\quad U_{33}=\cos\theta$$

于是,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\begin{bmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi & 0\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{bmatrix}\tag{3-86}$$

可以验证, $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 矩阵满足

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\quad 即\quad \overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1}\tag{3-87}$$

即为幺正矩阵.

按照 3.3 节, 在 xyz 和 $\boldsymbol{kDB}$ 系之间, 本构参数的变换关系为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}_k=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}_k=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}_k=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{3-88}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{-1}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\end{aligned}\right\}\tag{3-89}$$

如果 $\theta=0$, 选取 $\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 分别和 x,y,z 轴一致, 即取 $\theta=0,\varphi=\pi/2$. 于是式 (3-86) 变为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{3-90}$$

代入到式 (3-82) 得 $A_1=A_x,A_2=A_y,A_3=A_z$.

如果 $\theta=\pi$, 选取 $\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 分别和 $x,-y,-z$ 轴一致, 即取 $\theta=\pi,\varphi=\pi/2$. 于是式 (3-86) 变为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\tag{3-91}$$

代入到式 (3-82) 得 $A_1 = A_x, A_2 = -A_y, A_3 = -A_z$.

应用中, $\boldsymbol{kDB}$ 系是与平面波传播方向 (波矢量 $\boldsymbol{k}$) 相关联的坐标系. xyz 系为实验室坐标系, 或者是与各向异性介质主系 (本构参数矩阵为最简形式) 相关联的坐标系.

3.5 单轴介质中平面波

3.5.1 单轴介质本构关系

主系中单轴介质的本构关系为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E}, \quad \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{3-92}$$

改用 $\boldsymbol{DB}$ 表述为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = \overline{\overline{\kappa}} \cdot \boldsymbol{D}, \quad \overline{\overline{\kappa}} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{H} = \nu \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{3-93}$$

式中,

$$\kappa = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \kappa_z = \frac{1}{\varepsilon_z}, \quad \nu = \frac{1}{\mu} \tag{3-94}$$

转换到 $\boldsymbol{kDB}$ 系其本构关系为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_k &= \overline{\overline{\kappa}}_k \cdot \boldsymbol{D}_k \\ \boldsymbol{H}_k &= \nu \boldsymbol{B}_k \end{aligned}$$

式中,

$$\overline{\overline{\kappa}}_k = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{\kappa}} \cdot \overline{\overline{U}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\cos^2\theta + \kappa_z \sin^2\theta & (\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta + \kappa_z\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{3-95}$$

由式 (3-95) 可得 $\boldsymbol{kDB}$ 系中本构矩阵元素为

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa_{11}=\kappa\\
&\kappa_{12}=\kappa_{21}=0\\
&\kappa_{22}=\kappa\cos^2\theta+\kappa_z^2\sin^2\theta\\
&\kappa_{13}=\kappa_{31}=0\\
&\kappa_{23}=\kappa_{32}=(\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta\\
&\kappa_{13}=\kappa\sin^2\theta+\kappa_z\cos^2\theta
\end{aligned}\right\}\tag{3-96}$$

注意, $\boldsymbol{kDB}$ 系中的本构参数与波矢量在 xyz 系中的方位角 θ, φ 有关.

3.5.2 本征方程和本征波

由电各向异性介质本征方程 (3-71) 可得

$$\begin{bmatrix} u^2-\nu\kappa_{11} & -\nu\kappa_{12} \\ -\nu\kappa_{21} & u^2-\nu\kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}=0 \tag{3-97}$$

式中,

$$u=\frac{\omega}{k}\tag{3-98}$$

为平面波相速. 由式 (3-97) 得到

$$\begin{bmatrix} u^2-\nu\kappa_{11} & 0 \\ 0 & u^2-\nu\kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}=0 \tag{3-99}$$

即

$$\left.\begin{aligned}
(u^2-\nu\kappa_{11})D_1=0\\
(u^2-\nu\kappa_{22})D_2=0
\end{aligned}\right\}\tag{3-100}$$

下面讨论式 (3-100) 成立的四种可能情形.

情形一：$D_1=D_2=0$, 这时无电磁波存在.

情形二：$D_1\neq 0, D_2\neq 0$, 但 $u^2-\nu\kappa_{11}=0$ 和 $u^2-\nu\kappa_{22}=0$, 这就要求

$$\kappa_{11}=\kappa_{22}\tag{3-101}$$

将式 (3-96) 代入式 (3-101) 得

$$\kappa=\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta\tag{3-102}$$

欲使上式成立, 只有以下两种可能：其一为 $\kappa_z=\kappa$, 这时单轴介质变为各向同性介质. 其二为 $\theta=0$, 即 $\boldsymbol{k}//\hat{\boldsymbol{z}}$, 平面波沿 z 轴 (单轴介质的对称轴) 传播的特殊情形. 这时由式 (3-96), $\kappa_{11}=\kappa_{22}=\kappa$, 此情形下波的相速为

$$u=\sqrt{\nu\kappa}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

情形三：$D_1 \neq 0$, $D_2 = 0$, 但 $u^2 - \nu\kappa_{11} = 0$, 即 $u = \sqrt{\nu\kappa_{11}}$. 此情形下如式 (3-98) 所示波速为

$$u_{\text{o-wave}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\nu\kappa_{11}} = \sqrt{\nu\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3-103}$$

可见波速与波的传播方向无关. 另外, 考察波的极化特性. 本情形中 $\boldsymbol{D}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_1 D_1$, 由式 (3-93),

$$\boldsymbol{E}_k = \overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k \cdot \boldsymbol{D}_k = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ 0 & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \kappa_{11} D_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \kappa D_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \frac{D_1}{\varepsilon} \tag{3-104}$$

$$\boldsymbol{B}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \frac{k}{\omega} E_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{D_1}{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} D_1 \tag{3-105}$$

$$\boldsymbol{H}_k = \nu \boldsymbol{B}_k = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \frac{D_1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3-106}$$

由此可见, 此情形下 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 彼此平行, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 平行, 且 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和波的传播方向之间相互垂直, 电磁波的传播特性和各向同性介质中完全相同, 如图 3-5 所示. 因而称为寻常波, 或 o 波 (ordinary wave).

情形四：$D_1 = 0, D_2 \neq 0$, 但 $u^2 - \nu\kappa_{22} = 0$, 即 $u = \sqrt{\nu\kappa_{22}}$. 此情形下波的相速为

$$u_{\text{e-wave}} = \sqrt{\nu\kappa_{22}} = \sqrt{\nu\left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right)} \tag{3-107}$$

式 (3-107) 表明, 波速与传播方向 θ 有关. 另外, 考察波的极化特性. 本情形中 $\boldsymbol{D}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_2 D_2$, 由式 (3-93) 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_k = \overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k \cdot \boldsymbol{D}_k &= \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ 0 & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \kappa_{22} D_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3 \kappa_{32} D_2 \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_2 \left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right) D_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3 (\kappa - \kappa_z) \sin\theta\cos\theta D_2 \end{aligned} \tag{3-108}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_k &= -\hat{\boldsymbol{e}}_1 \frac{u}{\nu} D_2 = -\hat{\boldsymbol{e}}_1 \sqrt{\frac{1}{\nu}(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)} D_2 \\ \boldsymbol{H}_k &= -\hat{\boldsymbol{e}}_1 u D_2 = -\hat{\boldsymbol{e}}_1 \sqrt{\nu\left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right)} D_2 \end{aligned} \tag{3-109}$$

式 (3-108) 表明, 电场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的方向不再一致, 电场 $\boldsymbol{E}$ 具有和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 平行的分量, 如图 3-6 所示. 因而平均能流密度矢量 $\text{Re}\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\}/2$ 不再和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 平行, 称为非寻常波, 或 e 波 (extra-ordinary wave).

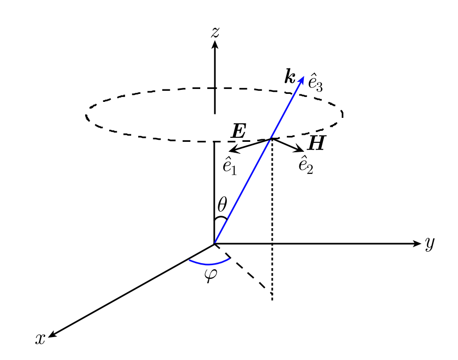


图 3-5　单轴介质中的寻常波 (o 波)

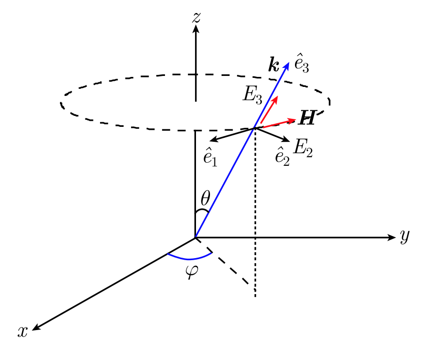


图 3-6　单轴介质中的非寻常波 (e 波)

如上所述, o 波和 e 波是单轴介质中所允许传播的两类波, 也称为单轴介质的本征波. 它们都是线极化波, 但其极化方向 (用 $\boldsymbol{D}$ 描写) 不同. o 波和 e 波的极化方向都垂直于波矢量 $\boldsymbol{k}$. 但 o 波的极化方向垂直于 $\boldsymbol{k}$ 和 z 所决定的平面; 而 e 波的极化方向平行于 $\boldsymbol{k}$ 和 z 所决定的平面.

当电磁波在单轴介质中传播, 若其极化特性不与 o 波或 e 波一致, 便将分解为两个线极化的本征波, 分别以不同相速传播.

3.5.3　$\boldsymbol{k}$ 面概念

o 波和 e 波的色散关系 (3-103)、式 (3-107) 可做以下改写, 令波矢量

$$\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{x}}k_x + \hat{\boldsymbol{y}}k_y + \hat{\boldsymbol{z}}k_z$$

由于单轴介质中 z 为光轴, 介质相对于 z 具有轴对称性, 记 $k_{\mathrm{s}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 为波矢量的横向分量. 注意到 $k_z = k\cos\theta, k_{\mathrm{s}} = k\sin\theta$, 以及 $k^2 = k_z^2 + k_{\mathrm{s}}^2$. 对于 o 波, 由式 (3-103) 有

$$\omega^2 = \nu\kappa k^2 = \nu\kappa\left(k_z^2 + k_{\mathrm{s}}^2\right) = \nu\kappa k_z^2 + \nu\kappa k_{\mathrm{s}}^2 \tag{3-110}$$

即

$$\frac{k_{\mathrm{s}}^2}{\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\nu\kappa}}\right)^2} + \frac{k_z^2}{\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\nu\kappa}}\right)^2} = 1 \tag{3-111}$$

可见 o 波的 $\boldsymbol{k}$ 矢量端点轨迹为圆, 如图 3-7 所示, 其半径为 $\omega/\sqrt{\nu\kappa}$.

对于 e 波, 由式 (3-107) 有

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \nu k^2\left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right)\\ &= \nu\left(\kappa k^2\cos^2\theta + \kappa_z k^2\sin^2\theta\right)\\ &= \nu\left(\kappa k_z^2 + \kappa_z k_{\mathrm{s}}^2\right)\end{aligned} \tag{3-112}$$

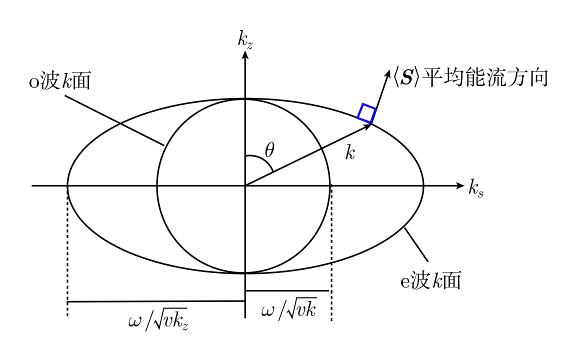


图 3-7　k 空间中 e 波和 o 波的 k 面：正单轴介质

即

$$\frac{k_s^2}{\left(\frac{\omega}{\sqrt{\nu\kappa_z}}\right)^2}+\frac{k_z^2}{\left(\frac{\omega}{\sqrt{\nu\kappa}}\right)^2}=1 \tag{3-113}$$

可见 e 波的 $\boldsymbol{k}$ 矢量端点轨迹为椭圆, 如图 3-7 所示, 其半长轴和半短轴分别为 $\omega/\sqrt{\nu\kappa}$ 和 $\omega/\sqrt{\nu\kappa_z}$, 图中所示为 $\kappa>\kappa_z$ 的正单轴晶体的 k 面. 读者不难给出 $\kappa<\kappa_z$ 时负单轴晶体的 k 面. 将图示 k 面绕 k_z 旋转一周, 便可得到三维 k 空间的 k 面, o 波和 e 波分别为旋转球面和椭球面. 一般情况下色散关系提供了 $\boldsymbol{k}$ 矢量与频率 ω 之间的函数关系, 即

$$f\left(k_x,k_y,k_z,\omega\right)=0 \tag{3-114}$$

由此方程可得 k 空间的 k 面.

下面讨论单轴介质中的相速、群速和平均能流密度. 由于 o 波和各向同性介质中的波相同, 这里只讨论 e 波情形. 设相速 $u=\omega/k$ 的各分量为

$$u_x=\frac{\omega}{k_x},\quad u_y=\frac{\omega}{k_y},\quad u_z=\frac{\omega}{k_z}$$

注意到相速的分量数值上大于沿 $\boldsymbol{k}$ 方向相速.

根据式 (2-23), 波的群速为 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$. 群速的分量为

$$u_{gx}=\frac{\partial\omega}{\partial k_x},\quad u_{gy}=\frac{\partial\omega}{\partial k_y},\quad u_{gz}=\frac{\partial\omega}{\partial k_z} \tag{3-115}$$

k 面方程 (3-114) 也可写成显式形式：

$$\omega=\omega\left(k_x,\ k_y,\ k_z\right) \tag{3-116}$$

实际上 k 面也就是 k 空间的 ω 等值面. 式 (3-116) 取梯度得

$$\nabla\omega=\nabla\omega\left(k_x,k_y,k_z\right)=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial\omega}{\partial k_x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial\omega}{\partial k_y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\omega}{\partial k_z} \tag{3-117}$$

式 (3-117) 和式 (3-115) 比较可见, 梯度 $\nabla\omega$ 的分量就是群速的分量, 梯度 $\nabla\omega$ 的方向就是群速的方向. 由场论知道, 梯度 $\nabla\omega$ 的方向垂直于 ω 等值面, 即 k 面. 所以, 群速的方向就是 k 面的法向, 如图 3-8 所示.

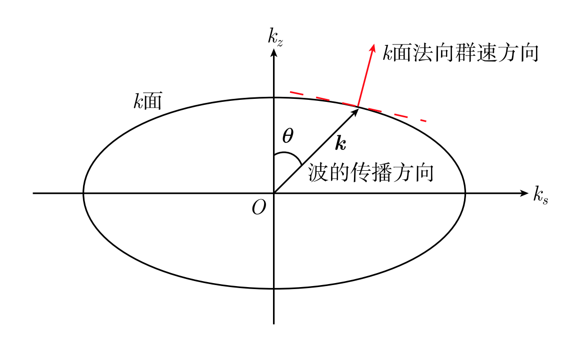


图 3-8　e 波的相速和群速方向

下面考虑平均能流密度矢量 $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}/2$ 的方向. 对于 e 波, 考虑传播方向只有微小差异的两个平面波. 它们在 k 空间中的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}+\delta\boldsymbol{k}$ 的端点在同一个 k 面 (ω 等值面) 上, 如图 3-9 所示. 当微分量 $\delta\boldsymbol{k}\to 0$ 时, $\delta\boldsymbol{k}$ 应当平行于该点 k 面的切向. 由式 (3-60) 有

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*=-\omega\boldsymbol{D}^*$$

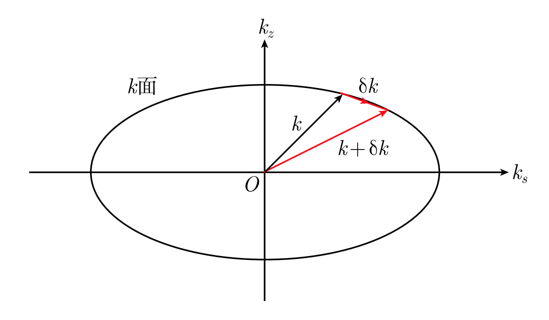


图 3-9　k 空间中 e 波的平均能流密度矢量方向

设波矢量 $\boldsymbol{k}$ 为实数, $\boldsymbol{k}^*=\boldsymbol{k}$. 上式求微分得

$$\left.\begin{aligned}\delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}+\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{E}=\omega\delta\boldsymbol{B}\\ \delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{H}^*=-\omega\delta\boldsymbol{D}^*\end{aligned}\right\}\tag{3-118}$$

注意到在 k 面 (ω 等值面) 上 $\delta\omega=0$. 用 $\boldsymbol{H}^*$ 点乘式 (3-118) 第一式, $\boldsymbol{E}$ 点乘第二式, 二者相减得

$$
\begin{aligned}
2\delta \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) &= \delta\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{k}\times\mathbf{H}^*)-\delta\boldsymbol{H}^*\cdot(\mathbf{k}\times\boldsymbol{E})+\omega\left(\boldsymbol{H}^*\cdot\delta\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}^*\right)\\
&=\omega\left(-\boldsymbol{D}^*\cdot\delta\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{H}^*\cdot\delta\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}^*\right)
\end{aligned}
\tag{3-119}
$$

对于电各向异性介质,

$$
\boldsymbol{D}=\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}
$$

$$
\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}
$$

上式代入式 (3-119), 并将矢量点乘改用矩阵相乘符号, 即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}$, 上标 T 表示矩阵转置, 式 (3-119) 变为

$$
\begin{aligned}
2\delta \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) &= \omega\left[-\left(\boldsymbol{D}^*\right)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{H}^*+\left(\boldsymbol{H}^*\right)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{B}+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{D}^*\right]\\
&=\omega\left[-\left(\overline{\overline{\varepsilon}}^*\cdot\boldsymbol{E}^*\right)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{H}^+\cdot\mu\delta\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}^*\cdot\delta\boldsymbol{E}^*\right]\\
&=\omega\left[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}^*\cdot\delta\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{E}^+\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}^+\cdot\delta\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H}^+\cdot\delta\boldsymbol{H}-\mu\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{H}^*\right]\\
&=\omega\left[\left(\boldsymbol{E}^+\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\delta\boldsymbol{E}\right)^*-\boldsymbol{E}^+\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}^+\cdot\delta\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H}^+\cdot\delta\boldsymbol{H}-\mu\left(\boldsymbol{H}^+\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)^*\right]
\end{aligned}
$$

若单轴介质为无耗, $\overline{\overline{\varepsilon}},\mu$ 均为实数, 且 $\overline{\overline{\varepsilon}}^+=\overline{\overline{\varepsilon}}$. 于是上式变为

$$
\begin{aligned}
2\delta \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) &= \omega\left[\left(\boldsymbol{E}^+\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\delta\boldsymbol{E}\right)^*-\boldsymbol{E}^+\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\delta\boldsymbol{E}+\mu\left(\boldsymbol{H}^+\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)-\mu\left(\boldsymbol{H}^+\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)^*\right]\\
&=-2\mathrm{i}\omega\left(\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{E}^+\cdot\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\delta\boldsymbol{E}\right\}+\mu\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{H}^+\cdot\delta\boldsymbol{H}\right\}\right)
\end{aligned}
\tag{3-120}
$$

式 (3-120) 右端为纯虚数, 因而式 (3-120) 左端实部等于零, 即

$$
\delta\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right\}=0 \tag{3-121}
$$

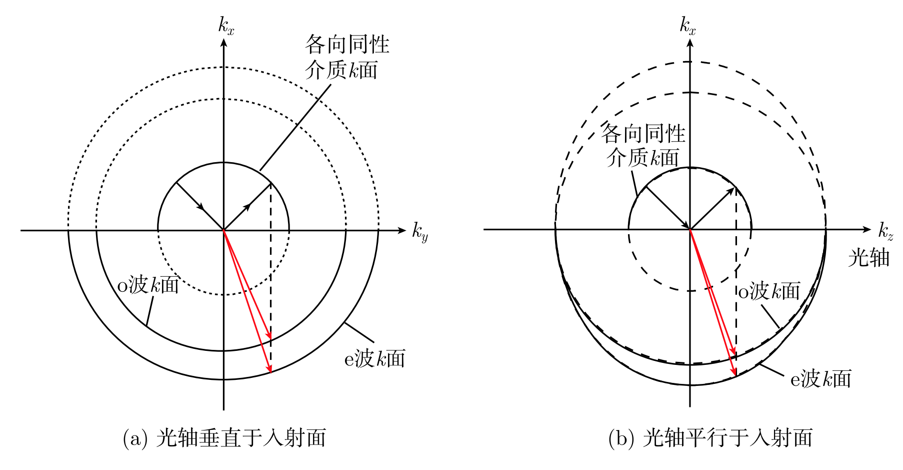
式 (3-121) 表明, 平均能流密度矢量 $\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right\}/2$ 垂直于 $\delta\boldsymbol{k}$, 即垂直于 k 面 (ω 等值面), 亦即平均能流密度矢量方向为 k 面法向, 并不与 $\boldsymbol{k}$ 矢量平行. 这是由于 e 波的电场 $\boldsymbol{E}$ 具有和 $\boldsymbol{k}$ 矢量平行分量的缘故.

3.5.4 双折射现象

应用 k 面和相位匹配原理可以简便分析折射现象. 对于半空间介质在分界面两侧均为各向同性介质情形, 用 k 面分析反射和折射，见图 2-6. 本节用 k 面分析半空间介质在分界面一侧为单轴介质时的双折射现象. 设透射一侧为单轴介质, 且光轴垂直于入射面. 这时 o 波和 e 波的 k 面为不同半径的圆, 如图 3-10(a) 所示. 根据相位匹配原理, 波矢量的切向分量为连续, 所以透射区中 e 波和 o 波的 $\boldsymbol{k}$ 矢量彼此分开.

如果透射区单轴介质的光轴平行于入射面, 且平行于分界面, 这时 o 波和 e 波的 k 面为将分别为圆和椭圆, 如图 3-10(b) 所示. 这时, 透射区中 e 波和 o 波的 $\boldsymbol{k}$

矢量也将彼此分开. 由于单轴介质中 o 波和 e 波均为线极化, 且极化特性不同, 如果入射波的极化和 o 波相同, 则透射波中将只有 o 波; 如果入射波的极化和 e 波相同, 则透射波中将只有 e 波. 如果入射波极化为一般情况, 透射波既有 o 波, 也有 e 波, 便出现双折射.



(a) 光轴垂直于入射面　(b) 光轴平行于入射面

图 3-10　透射区为单轴介质的双折射

3.6　回旋介质中的平面波

3.6.1　回旋介质本构关系

磁化等离子体是回旋介质的一个重要例子. 等离子体处于外磁场中变为电各向异性介质, 在 xyz 系 (“主系”) 中本构关系为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{3-122}$$

且介电系数张量为

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathrm{i}\varepsilon_g & 0 \\ -\mathrm{i}\varepsilon_g & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3-123}$$

式 (3-122) 也可以写为 $\boldsymbol{DB}$ 表述形式,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} &= \nu \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{3-124}$$

式中,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} = \begin{bmatrix} \kappa & \mathrm{i}\kappa_g & 0 \\ -\mathrm{i}\kappa_g & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \tag{3-125}$$

$\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 与 $\bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}}$ 之间关系作为习题, 读者自行证明.

从 xyz 系转换到 $\boldsymbol{kDB}$ 系中, 其本构参数为

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}}_k &= \bar{\bar{\boldsymbol{U}}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa & \mathrm{i}\kappa_g \cos\theta & \mathrm{i}\kappa_g \sin\theta \\ -\mathrm{i}\kappa_g \cos\theta & \kappa\cos^2\theta + \kappa_z \sin^2\theta & (\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta \\ -\mathrm{i}\kappa_g \sin\theta & -(\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta + \kappa_z\cos^2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-126}$$

即

$$\left.\begin{aligned} &\kappa_{11} = \kappa \\ &\kappa_{12} = \mathrm{i}\kappa_g \cos\theta, \quad \kappa_{21} = -\kappa_{12} \\ &\kappa_{13} = \mathrm{i}\kappa_g \sin\theta, \quad \kappa_{31} = -\kappa_{13} \\ &\kappa_{22} = \kappa\cos^2\theta + \kappa_z \sin^2\theta \\ &\kappa_{23} = (\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta, \quad \kappa_{32} = -\kappa_{23} \\ &\kappa_{33} = \kappa\sin^2\theta + \kappa_z\cos^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{3-127}$$

3.6.2 本征方程和本征波

电各向异性介质的本征方程为式 (3-72),

$$\begin{bmatrix} u^2 - \nu\kappa_{11} & -\nu\kappa_{12} \\ -\nu\kappa_{21} & u^2 - \nu\kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3-128}$$

式中, $u = \omega/k$. 式 (3-127) 代入式 (3-128) 得

$$\begin{bmatrix} u^2 - \nu\kappa & -\mathrm{i}\nu\kappa_g \cos\theta \\ \mathrm{i}\nu\kappa_g \cos\theta & u^2 - \nu(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z \sin^2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3-129}$$

式 (3-129) 具有非零解要求系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} u^2 - \nu\kappa & -\mathrm{i}\nu\kappa_g \cos\theta \\ \mathrm{i}\nu\kappa_g \cos\theta & u^2 - \nu(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z \sin^2\theta) \end{vmatrix} = 0 \tag{3-130}$$

解得

$$u^2 = \frac{\nu}{2}\left[\kappa\left(1 + \cos^2\theta\right) + \kappa_z \sin^2\theta \pm \sqrt{(\kappa - \kappa_z)^2 \sin^4\theta + 4\kappa_g^2 \cos^2\theta}\right] \tag{3-131}$$

式 (3-131) 中 $\pm$ 对应于回旋介质中的两种本征波, 称为 I 型波和 II 型波. 由于 $k_z = k\cos\theta$, $k_s = k\sin\theta$, 式 (3-131) 又可写为

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{\nu}{2}\left[\kappa\left(k^2+k_z^2\right)+\kappa_z k_s^2 \pm \sqrt{\left(\kappa-\kappa_z\right)^2 k_s^4 + 4\kappa_g^2 k^2 k_z^2}\right] \\ &= \frac{\nu}{2}\left[\kappa\left(2k_z^2+k_s^2\right)+\kappa_z k_s^2 \pm \sqrt{\left(\kappa-\kappa_z\right)^2 k_s^4 + 4\kappa_g^2 k_z^2\left(k_z^2+k_s^2\right) k_z^2}\right]\end{aligned} \tag{3-132}$$

以上为回旋介质的色散关系.

满足式 (3-130) 后, 式 (3-129) 的两个方程中只有一个独立方程, 即

$$\mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta D_1 + \left[u^2 - \nu\left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right)\right] D_2 = 0 \tag{3-133}$$

因而电位移矢量分量 D_1 和 D_2 之比为

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{-\mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta}{u^2 - \nu\left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right)}$$

将式 (3-131) 代入得

$$\begin{aligned}\frac{D_2}{D_1} &= \frac{-\mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta}{u^2 - \nu\left(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta\right)} \\ &= \frac{-\mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta}{\dfrac{\nu}{2}\left[-\kappa\cos^2\theta - \kappa_z\sin^2\theta + \kappa \pm \sqrt{\left(\kappa-\kappa_z\right)^2\sin^4\theta + 4\kappa_g^2\cos^2\theta}\right]} \\ &= \frac{-\mathrm{i}2\kappa_g\cos\theta}{\left(\kappa-\kappa_z\right)\sin^2\theta \pm \left(\kappa-\kappa_z\right)\sin^2\theta\sqrt{1+\left[\dfrac{2\kappa_g\cos\theta}{\left(\kappa-\kappa_z\right)\sin^2\theta}\right]^2}} \\ &= \frac{-\mathrm{i}2\kappa_g\cos\theta}{\left(\kappa-\kappa_z\right)\sin^2\theta\left\{1 \pm \sqrt{1+\left[\dfrac{2\kappa_g\cos\theta}{\left(\kappa-\kappa_z\right)\sin^2\theta}\right]^2}\right\}}\end{aligned}$$

为了公式形式简明, 引入新变量 ψ, 令

$$\tan 2\psi = \frac{2\kappa_g\cos\theta}{\left(\kappa-\kappa_z\right)\sin^2\theta} \tag{3-134}$$

前式变为

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{-\mathrm{i}\tan 2\psi}{1 \pm \sqrt{1+\tan^2 2\psi}} = \frac{-\mathrm{i}\tan 2\psi}{1 \pm \dfrac{1}{\cos 2\psi}} = \frac{-\mathrm{i}\sin 2\psi}{\cos 2\psi \pm 1} \tag{3-135}$$

式 (3-135) 取 $+$ 为 I 型波, 取 $-$ 为 II 型波, 分别为

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{I}} &= \mathrm{i}\frac{-\sin 2\psi}{\cos 2\psi+1} = -\mathrm{i}\frac{2\sin\psi\cos\psi}{2\cos^2\psi} \\ &= -\mathrm{i}\tan\psi \\ \left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{II}} &= \mathrm{i}\frac{-\sin 2\psi}{\cos 2\psi-1} = -\mathrm{i}\frac{2\sin\psi\cos\psi}{-2\sin^2\psi} \\ &= \mathrm{i}\cot\psi\end{aligned}\right\} \tag{3-136}$$

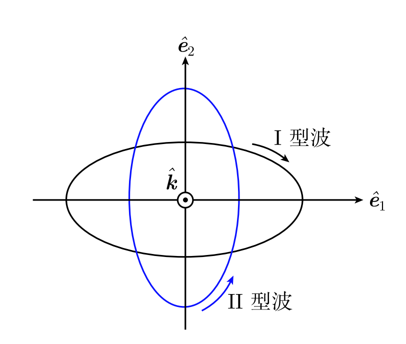


图 3-11　本征波 I 型和 II 型波为相互正交椭圆极化：$0<\theta<\pi$ 情形

以上两个本征波均为椭圆极化波. 设 $\kappa_g>0$ 及 $\kappa>\kappa_z>0$. 当 $0<\theta<\pi$, 由式 (3-134), $-\pi/2<2\psi<\pi/2$, 或 $-\pi/4<\psi<\pi/4$, 则式 (3-136) 表明 I 型波和 II 型波分别为左旋或右旋极化波, 且二者相互正交, 如图 3-11 所示, 其极化特性和波的传播方向 θ 有关, 如表 3-1 所示. 当 $\kappa_g=0$, 由式 (3-125) 可见介质退化为单轴晶体. 这时 $\psi=0$, 两个本征波均退化为线极化波.

表 3-1　两个本征波的极化特性

波传播方向 θ	$0\sim\pi/2$	$\pi/2\sim\pi$
ψ	$\pi/4\sim 0$	$0\sim -\pi/4$
I 型波	左旋	右旋
II 型波	右旋	左旋

下面讨论波的传播方向 θ 等于 0, $\pi/2$ 和 π 的几个特殊情形, 设 $\kappa>\kappa_z>0$.

情形一：$\theta=\pi/2$, 波的传播方向和 z 轴垂直, 由式 (3-134) 有 $\psi=0$. 由式 (3-136) 有

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{I}} = -\mathrm{i}\tan\psi = 0,$$

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{II}} = \mathrm{i}\cot\psi = \infty$$

即 I 型和 II 型均为线极化波, 且 I 型波 $D_2=0, D_1\neq 0$; II 型波 $D_1=0, D_2\neq 0$, 二者相互垂直, 如图 3-12 所示. 由式 (3-131), 相速分别为

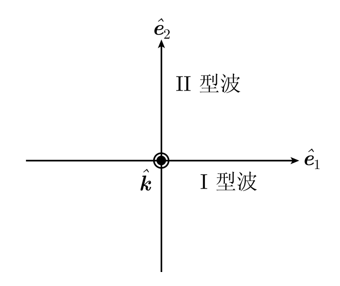


图 3-12　本征波 I 型和 II 型波为线极化：$\theta=\pi/2$ 情形

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{\nu}{2}\left[\kappa\left(1+\cos^2\theta\right)+\kappa_z\sin^2\theta \pm \sqrt{\left(\kappa-\kappa_z\right)^2\sin^4\theta+4\kappa_g^2\cos^2\theta}\right] \\ &= \frac{\nu}{2}\left[\kappa+\kappa_z \pm \sqrt{\left(\kappa-\kappa_z\right)^2}\right] = \frac{\nu}{2}\left[\kappa+\kappa_z \pm (\kappa-\kappa_z)\right]\end{aligned}$$

即

$$\left.\begin{aligned} u_{\rm I} &= \sqrt{\frac{\nu}{2}\left[\kappa+\kappa_z+(\kappa-\kappa_z)\right]} = \sqrt{\nu\kappa} \\ u_{\rm II} &= \sqrt{\frac{\nu}{2}\left[\kappa+\kappa_z-(\kappa-\kappa_z)\right]} = \sqrt{\nu\kappa_z} \end{aligned}\right\} \tag{3-137}$$

情形二：$\theta=0$, 波沿 z 轴正方向传播, 由式 (3-134) 有 $\psi=\pi/4$, 代入式 (3-136) 得

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\rm I} = -{\rm i}\tan\psi = -{\rm i}, \quad \left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\rm II} = {\rm i}\cot\psi = {\rm i} \tag{3-138}$$

可见 I 型波为左旋圆极化, II 型波为右旋圆极化, 如图 3-13(a) 所示. 由式 (3-131), 相速分别为

$$u_{\rm I}^2 = \frac{\nu}{2}(2\kappa+2\kappa_g) = \nu(\kappa+\kappa_g)$$

$$u_{\rm II}^2 = \frac{\nu}{2}(2\kappa-2\kappa_g) = \nu(\kappa-\kappa_g)$$

即

$$u_{\rm I} = \sqrt{\nu(\kappa+\kappa_g)}, \quad u_{\rm II} = \sqrt{\nu(\kappa-\kappa_g)} \tag{3-139}$$

且 $u_{\rm I} > u_{\rm II}$.

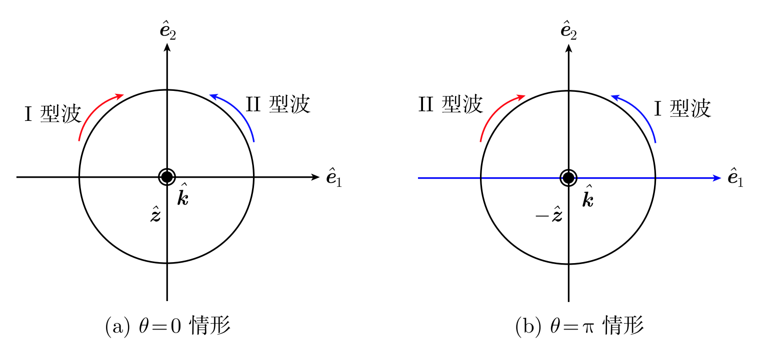


图 3-13　本征波 I 型和 II 型波为圆极化

情形三：$\theta=\pi$, 波沿 z 轴负方向传播, 由式 (3-134) 有 $\psi=-\pi/4$, 代入式 (3-136) 得

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\rm I} = -{\rm i}\tan\psi = {\rm i}, \quad \left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\rm II} = {\rm i}\cot\psi = -{\rm i} \tag{3-140}$$

可见 I 型波为右旋圆极化, II 型波为左旋圆极化, 如图 3-13(b) 所示, 正好和 $\theta=0$ 情形相反. 注意到 $\theta=\pi$ 和 $\theta=0$ 两种情形下波的传播方向正好相反, 波的左、右旋极化是相对于波的传播方向而言, 从实验室坐标 xyz 系看, I 型 (或 II 型) 波在 $\theta=\pi$ 和 $\theta=0$ 两种情形下 $\boldsymbol{D}$ 矢量环绕 z 轴的旋转方向彼此相同.

当 $\theta=\pi$, 由式 (3-131) 得到本征波相速为

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{I}} &= \sqrt{\nu\left(\kappa+\kappa_g\right)} \\ u_{\mathrm{II}} &= \sqrt{\nu\left(\kappa-\kappa_g\right)} \end{aligned}\right\} \tag{3-141}$$

和式 (3-139) 相同, 仍有 $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$.

3.6.3　Faraday 效应

设回旋介质板厚度为 z_0, 介电系数张量见式 (3-123), 分界面垂直于 z 轴, 线极化平面波垂直入射. 下面分别讨论平面波沿 z 轴 $\theta=0$ 和逆 z 轴 $\theta=\pi$ 入射的两种情形.

情形一**:** 平面波沿 z 轴入射, 即 $\theta=0$. 按照式 (3-90), 取 $\hat{\boldsymbol{e}}_1=\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{e}}_2=\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{e}}_3=\hat{\boldsymbol{z}}$, 如图 3-14 所示. 设 $z=0$ 处入射波为 x 方向线极化, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}|_{z=0} &= \hat{\boldsymbol{x}}D_0=\hat{\boldsymbol{e}}_1D_0 \\ &= \frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right)+\frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right) \end{aligned} \tag{3-142}$$

当波透入到回旋介质板沿 z 轴传播, 根据式 (3-138), 回旋介质中的两个本证波分别为 I 型左旋圆极化和 II 型右旋圆极化, 所以式 (3-142) 中将线极化分解为右旋和左旋圆极化波.

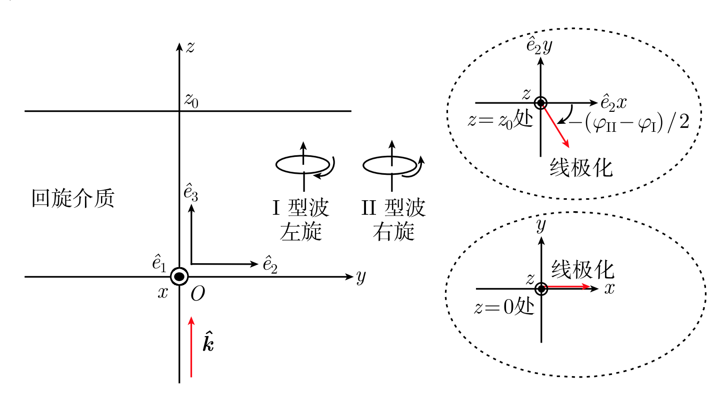


图 3-14　平面波垂直入射到回旋介质板：$\theta=0$ 情形

由式 (3-139) 知, 当 $\kappa>\kappa_g>0$ 时相速 $u_{\mathrm{I}}=\sqrt{\nu\left(\kappa+\kappa_g\right)}$ 大于 $u_{\mathrm{II}}=\sqrt{\nu\left(\kappa-\kappa_g\right)}$. 平面波在回旋介质板中从 $z=0$ 传播到 z_0, I 型波和 II 型波传播所需时间分别为 z_0/u_{I} 和 z_0/u_{II}. 传播时间彼此不同, 因而有不同相移 φ_{I} 和 φ_{II}, 在介质板 $z=z_0$ 处的场变为

$$\boldsymbol{D}|_{z=z_0}=\frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right)\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right)+\frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right)\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right) \tag{3-143}$$

式 (3-143) 等号右端第一项为 II 型右旋圆, 第二项为 I 型左旋圆, 两个本征波的附加相位移动分别为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{II}} &= k_{\mathrm{II}} z_0 = \frac{\omega}{u_{\mathrm{II}}} z_0 = \frac{\omega z_0}{\sqrt{\nu\left(\kappa - \kappa_g\right)}} \\ \varphi_{\mathrm{I}} &= k_{\mathrm{I}} z_0 = \frac{\omega}{u_{\mathrm{I}}} z_0 = \frac{\omega z_0}{\sqrt{\nu\left(\kappa + \kappa_g\right)}}\end{aligned}\right\} \tag{3-144}$$

由于 $\kappa > \kappa_g$, 所以 $\varphi_{\mathrm{II}} > \varphi_{\mathrm{I}}$. 重写式 (3-143) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}|_{z=z_0} &= \hat{\boldsymbol{e}}_1 \frac{D_0}{2}\left[\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right) + \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right)\right] + \hat{\boldsymbol{e}}_2 \frac{\mathrm{i}D_0}{2}\left[\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right)\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_1\, D_1|_{z=z_0} + \hat{\boldsymbol{e}}_2\, D_2|_{z=z_0}\end{aligned} \tag{3-145}$$

所以在 $z = z_0$ 处电位移矢量两个分量之比为

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{z=z_0} = \frac{\mathrm{i}\left[\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right)\right]}{\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right) + \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right)} = -\tan\left(\frac{\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{I}}}{2}\right) \tag{3-146}$$

由此可见, 在 $z = z_0$ 处出射波的电场两个分量为同相, 因而仍为线极化. 但是, 与 $z = 0$ 处入射波极化相比, 经过传播距离 z_0 后, 极化方向有一个旋转角 $-(\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{I}})/2$, 如图 3-14 内右侧小图所示. 极化的旋转方向朝向 I 型波 (左旋) 的旋转方向. 这是由于 $u_{\mathrm{I}} > u_{\mathrm{II}}$ 的缘故.

情形二：设波沿 $-z$ 方向入射, 即 $\theta = \pi$, 这时取 $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{e}}_2 = -\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{e}}_3 = -\hat{\boldsymbol{z}}$, 如图 3-15 所示. 入射点 $z = z_0$ 处的波仍为 x 方向极化, 即

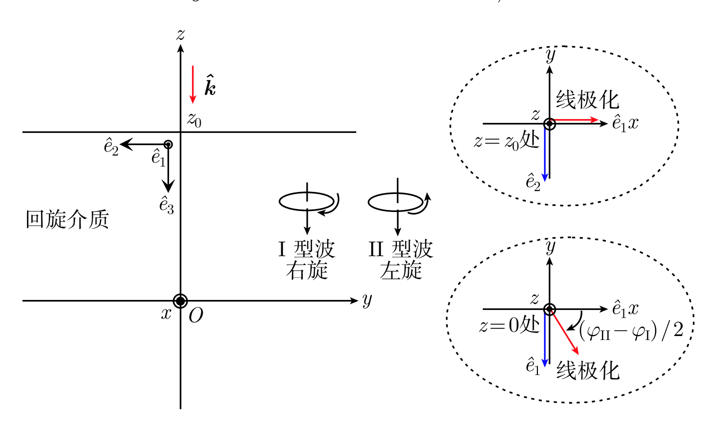


图 3-15 平面波垂直入射到回旋介质板：$\theta = \pi$ 情形

$$\boldsymbol{D}|_{z=z_0} = \hat{\boldsymbol{x}} D_0 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 D_0 = \frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right) + \frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right) \tag{3-147}$$

线极化波分解为两个圆极化波, 其中第一项为右旋圆极化 (I 型), 第二项为左旋圆极化 (II 型). 波从 $z = z_0$ 传播到 $z = 0$ 的出射点处有了附加相移, 变为

$$\boldsymbol{D}\,|_{z=0} = \frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right)\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right) + \frac{D_0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{e}}_2\right)\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right) \tag{3-148}$$

式中, 第一项为 I 型波 (右旋圆), 第二项为 II 型波 (左旋圆), 上式整理得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\,|_{z=0} &= \hat{\boldsymbol{e}}_1\frac{D_0}{2}\left[\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right) + \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right)\right] + \hat{\boldsymbol{e}}_2\frac{\mathrm{i}D_0}{2}\left[\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right)\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_1 D_1\,|_{z=0} + \hat{\boldsymbol{e}}_2 D_2\,|_{z=0}\end{aligned} \tag{3-149}$$

即

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{Z=0} = \frac{\mathrm{i}\left[\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right)\right]}{\exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}\right) + \exp\left(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{II}}\right)} = \tan\left(\frac{\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{I}}}{2}\right) \tag{3-150}$$

由此可见, 在 $z = 0$ 处出射波的两个分量为同相, 因而仍为线极化. 但极化方向旋转角度为 $(\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{I}})/2$. 由于 $u_{\mathrm{I}} > u_{\mathrm{II}}$, 极化的旋转方向朝向 I 型波 (右旋) 的旋转方向, 如图 3-15 内右侧小图所示.

注意到 $\theta = \pi$ 和 $\theta = 0$ 情形波的传播方向正好相反, 而波的左、右旋极化是相对于波的传播方向 $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{e}_3$ 而言, 所以 $\theta = \pi$ 和 $\theta = 0$ 两种情形下 I 型 (或 II 型) 波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量实际旋转方向彼此相同. 换言之, 无论电磁波是沿 z 轴, 或是逆 z 轴穿过回旋介质板, 从 xyz 系看线极化波极化面的旋转方向都相同, 旋转角度也一样.

电磁波经过回旋介质时线极化波电位移矢量极化方向发生旋转的现象称为 Faraday 旋转. 对于磁化等离子体, 电子绕磁力线作圆周运动是产生这一效应的原因. 当铁氧体处于外磁场中, 电子自旋绕磁场的进动是产生 Faraday 效应的原因. 应用磁各向异性本构参数张量可对磁化铁氧体进行同样分析.

波的单向隔离器是 Faraday 效应应用的一个例子. 选取介质板厚度 d, 使电磁波穿过板后极化面旋转 45°, 即满足

$$\frac{\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{I}}}{2} = \frac{\omega d}{\sqrt{\nu\left(\kappa - \kappa_g\right)}} - \frac{\omega d}{\sqrt{\nu\left(\kappa + \kappa_g\right)}} = \frac{\pi}{4}$$

在 $z = 0$ 处放置一个水平偏振片, 在 $z = d$ 处放置 45° 偏振片, 如图 3-16 所示. 这样, 当波从 $z = 0$ 入射, 通过水平偏振片后进入到回旋介质板成为水平线极化波. 在回旋介质板中传播距离 d 后其极化面旋转 45°(设相对于波传播方向为左旋), 刚好允许通过 $z = d$ 处的 45° 偏振片, 如图 3-16 内小图所示. 反之, 如果波从 $z = d$ 入射进入到介质板, 通过 45° 偏振片后进入到回旋介质板成为 45° 的斜向线极化波. 在回旋介质板中逆 z 轴传播距离 d 后其极化面旋转 45°(相对于波传播方向为右旋), 在到达 $z = 0$ 处其极化面成为垂直极化, 不允许通过 $z = 0$ 处的水平偏振片, 如图 3-16 内下方小图所示. 简言之, 该介质板只允许波从左方通过, 而阻断来自右方的波通过. 这一原理被用于微波和光学器件中制成波的单向隔离器.

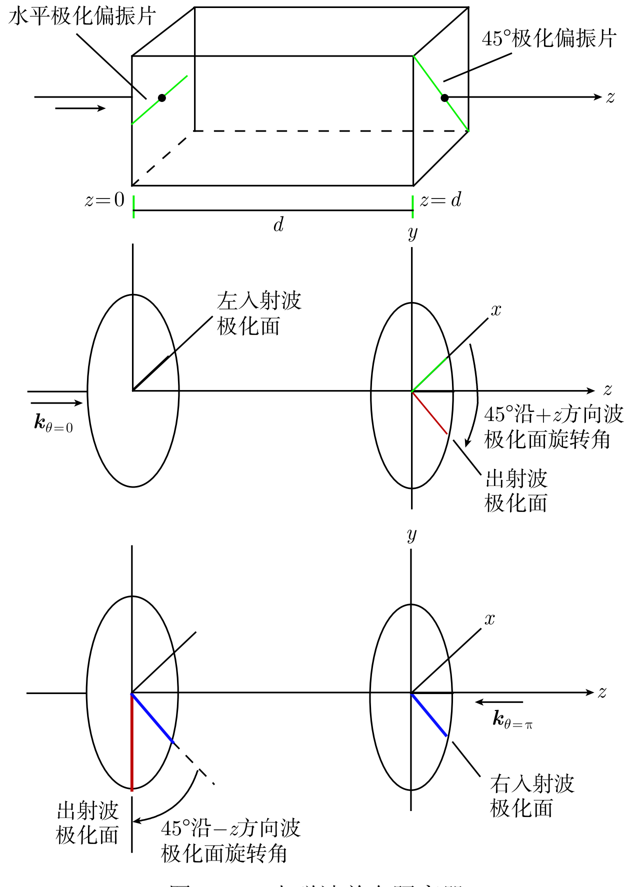


图 3-16　电磁波单向隔离器

3.7　双各向异性介质中的平面波

设双各向异性介质在 xyz 主系中具有以下本构关系：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \begin{bmatrix}\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa & 0\\ 0 & 0 & \kappa_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{D} + \begin{bmatrix}\chi & 0 & 0\\ 0 & \chi & 0\\ 0 & 0 & \chi_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{H} &= \begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & \gamma_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{D} + \begin{bmatrix}\nu & 0 & 0\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & \nu_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{B}\end{aligned}\right\} \tag{3-151}$$

一种磁电材料例如氧化铬具有此特性. 根据式 (3-89), 转换到 $\boldsymbol{kDB}$ 系其本构参数

变为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=\begin{bmatrix}\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta\\ 0 & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa^2\sin^2\theta+\kappa_z\cos^2\theta\end{bmatrix}\tag{3-152}$$

其他本构参数如 $\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}_k,\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}_k,\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}_k$ 也有类似形式. 将相应本构参数代入式 (3-72) 得到

$$\begin{bmatrix}\kappa_\theta\left(u^2\nu+\nu_\theta\chi\gamma-\kappa\nu\nu_\theta\right) & u\kappa_\theta\left(\nu_\theta\chi-\nu\gamma_\theta\right)\\ u\kappa\left(\nu_\theta\gamma-\nu\chi_\theta\right) & \kappa\left(u^2\nu_\theta+\nu\chi_\theta\gamma_\theta-\kappa_\theta\nu\nu_\theta\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=0\tag{3-153}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned}\kappa_\theta&=\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta\\ \nu_\theta&=\nu\cos^2\theta+\nu_z\sin^2\theta\\ \chi_\theta&=\chi\cos^2\theta+\chi_z\sin^2\theta\\ \gamma_\theta&=\gamma\cos^2\theta+\gamma_z\sin^2\theta\end{aligned}\right\}\tag{3-154}$$

由式 (3-153) 可解出本征波的相速和电位移矢量 $\boldsymbol{D}_k$, 运算较麻烦. 下面讨论几种特殊情形.

情形一：无耗介质, 设 $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}},\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}},\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}},\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}$ 均为实数, 由无耗条件 (3-6) 有 $\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}$. 由式 (3-153) 可得本征波的相速, 同时 $\boldsymbol{D}_k$ 两个分量之比 D_2/D_1 也为实数, 因此两个本征波均为线极化波.

当波沿 z 轴传播, 即 $\theta=0$, 由式 (3-154) 可得 $\kappa_\theta=\kappa,\nu_\theta=\nu,\chi_\theta=\chi,\gamma_\theta=\gamma$. 式 (3-153) 变为

$$\begin{bmatrix}u^2+\chi\gamma-\kappa\nu & u\left(\chi-\gamma\right)\\ u\left(\gamma-\chi\right) & u^2+\chi\gamma-\kappa\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=0$$

由无耗条件有 $\chi=\gamma$, 上式变为

$$\begin{bmatrix}u^2-\kappa\nu+\chi^2 & 0\\ 0 & u^2-\kappa\nu+\chi^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=0$$

上式具有非零解的条件是 $u^2-\kappa\nu+\chi^2=0$, 即本征波相速 $u^2=\kappa\nu-\chi^2$. 这时 D_2,D_1 可取任意值, 表示本征波为任意极化. $\theta=0$ 时的本征波属于简并情况. 注意, 必须满足条件 $\kappa\nu>\chi^2$, 否则波速 u 为虚数, 不能传播.

情形二：无耗介质, 设 $\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}},\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}$ 均为虚数, 并记 $\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}\to\mathrm{i}\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}$. 由无耗条件 (3-6) 有 $\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}=-\mathrm{i}\overline{\overline{\boldsymbol{\chi}}}$. 另设 $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}},\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}$ 为实数, 则由式 (3-153) 可得本征波的相速, 同时 $\boldsymbol{D}_k$ 两个分量之比 D_2/D_1 为复数, 所以二本征波为椭圆极化波.

当波沿 z 轴传播, 即 $\theta=0$, 由式 (3-154) 可得 $\kappa_\theta=\kappa,\nu_\theta=\nu,\chi_\theta=\chi,\gamma_\theta=\gamma$. 并记 $\chi\to\mathrm{i}\chi$, $\gamma=-\mathrm{i}\chi$, 式 (3-153) 变为

$$\begin{bmatrix} u^2-\kappa\nu+\chi^2 & \mathrm{i}2\chi u \\ -\mathrm{i}2\chi u & u^2-\kappa\nu+\chi^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}=0 \tag{3-155}$$

式 (3-155) 有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} u^2-\kappa\nu+\chi^2 & \mathrm{i}2\chi u \\ -\mathrm{i}2\chi u & u^2-\kappa\nu+\chi^2 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\left(\chi^2+u^2-\kappa\nu\right)^2-4\chi^2u^2=0$$

所以

$$u^2\mp 2\chi u+\left(\chi^2-\kappa\nu\right)=0 \tag{3-156}$$

解之得本征波相速

$$u=\pm\chi\pm\sqrt{\kappa\nu}$$

如果 $\sqrt{\kappa\nu}>\chi$, 取上式中 $u=\sqrt{\kappa\nu}\pm\chi$, 即

$$u_{\mathrm{I}}=\sqrt{\kappa\nu}+\chi,\quad u_{\mathrm{II}}=\sqrt{\kappa\nu}-\chi \tag{3-157}$$

显然, $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$. 式 (3-156) 代入式 (3-155) 得

$$\pm 2\chi uD_1-\mathrm{i}2\chi uD_2=0$$

所以 $\boldsymbol{D}_k$ 两个分量之比为

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{I}}=+\mathrm{i},\quad \left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{II}}=-\mathrm{i} \tag{3-158}$$

可见, I 型波 (取 +) 为右旋圆极化, II 型波 (取 −) 为左旋圆极化.

如果波逆 z 轴传播, 即 $\theta=\pi$, 由式 (3-154) 可得 $\kappa_\theta=\kappa,\nu_\theta=\nu$, $\chi_\theta=\chi,\gamma_\theta=\gamma$, 并记 $\chi\to\mathrm{i}\chi$, $\gamma=-\mathrm{i}\chi$, 这时本征方程、本证波相速和极化特性均与 $\theta=0$ 时相同, 即 I 型波为右旋圆极化波, II 型波为左旋圆极化波, 且 $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$.

对于厚度为 d 的双各向异性介质板, 当线极化波沿 z 方向进入到此介质板后将分解为具有不同相速的右旋圆极化波 (I 型波) 和左旋圆极化波 (II 型波). 在传播距离 d 后电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的极化方向发生旋转, 由于 $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$, 极化面向右旋转, 如图 3-17(a) 所示. 当波逆 z 方向入射, 仍然是 I 型波右旋圆极化和 II 型波左旋圆极化, 且 $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$, 使得极化面向右旋转, 如图 3-17(b) 所示. 由图可见, 两种情形下极化面的旋转方向在实验室坐标 xyz 系中彼此相反.

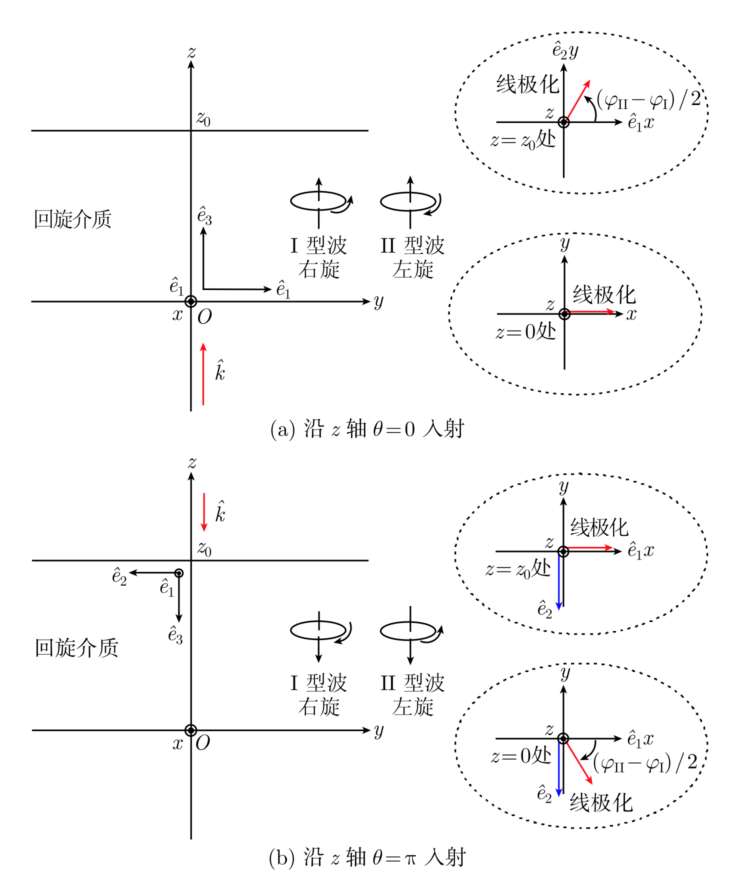


图 3-17　线极化波穿过双各向异性介质板时极化面的旋转

比较上述 $\theta=\pi$ 和 $\theta=0$ 两个传播方向, 双各向异性介质的本征方程 (3-153) 中矩阵非对角元素不变. 而在回旋介质中, 对于 $\theta=\pi$ 和 $\theta=0$ 两个传播方向本征方程 (3-129) 中矩阵的非对角元素要改变符号. 这一差别的物理含义可说明如下: 对于回旋介质, 当一线极化波沿 z 方向穿过回旋介质板, 板的适当厚度使极化方向旋转了 45°. 在波反过来逆 z 方向穿过回旋介质板时, 将使极化方向又旋转 45°, 往返总共旋转 90°. 但是, 对于双各向异性介质板, 如果线极化波沿 z 方向和逆 z 方向往返传播将使波的极化方向旋转回到其初始位置, 因而总共旋转角度为零. 可见, 在双各向异性介质中的极化旋转和回旋介质中的 Faraday 旋转之间有本质区别. 由于这一差别, 前者称为旋光效应, 以区别于回旋介质中的 Faraday 效应.

3.8　双各向同性介质中的平面波

双各向同性介质的本构关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} + \xi \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{B} &= \zeta \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{3-159}$$

设式 (3-159) 中 ξ,ζ 为虚数, 改记 $\xi \to \mathrm{i}\xi$. 如果介质为无耗, 根据无耗条件 (3-6) 有 $\zeta = -\mathrm{i}\xi$. 上式变为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} + \mathrm{i}\xi \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{B} &= -\mathrm{i}\xi \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{3-160}$$

在 $\boldsymbol{DB}$ 表述中本构关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \kappa \boldsymbol{D} + \chi \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{H} &= \gamma \boldsymbol{D} + \nu \boldsymbol{B} \end{aligned}\right\} \tag{3-161}$$

式 (3-161) 和式 (3-160) 的参数关系为

$$\kappa = \frac{\mu}{\mu\varepsilon - \xi^2}, \quad \nu = \frac{\varepsilon}{\mu\varepsilon - \xi^2}, \quad \chi = \frac{-\mathrm{i}\xi}{\mu\varepsilon - \xi^2}, \quad \gamma = \frac{\mathrm{i}\xi}{\mu\varepsilon - \xi^2}$$

或者令 $\gamma = \mathrm{i}\beta, \chi = -\mathrm{i}\beta$, $\beta = \dfrac{\xi}{\mu\varepsilon - \xi^2}$, 式 (3-161) 改写为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \kappa \boldsymbol{D} - \mathrm{i}\beta \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{i}\beta \boldsymbol{D} + \nu \boldsymbol{B} \end{aligned}\right\} \tag{3-162}$$

这一类介质也称为手征介质 (chiral media). 实际上双各向同性介质可以看做双各向异性介质 (3-151) 或式 (3-57) 的特殊情形. 对于各向同性介质, $\boldsymbol{kDB}$ 系中本构参数与 xyz 系相同. 令式 (3-151) 中 $\kappa_z = \kappa, \nu_z = \nu, \chi_z = \chi, \gamma_z = \gamma$, 由式 (3-154) 有 $\kappa_\theta = \kappa, \nu_\theta = \nu$, $\chi_\theta = \chi, \gamma_\theta = \gamma$. 于是本构方程 (3-153) 变为

$$\begin{bmatrix} u^2 + \chi\gamma - \kappa\nu & u(\chi - \gamma) \\ u(\gamma - \chi) & u^2 + \chi\gamma - \kappa\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} u^2 + \beta^2 - \kappa\nu & -2\mathrm{i}u\beta \\ 2\mathrm{i}u\beta & u^2 + \beta^2 - \kappa\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3-163}$$

式 (3-163) 和式 (3-155) 相似. 式 (3-163) 具有非零解要求系数矩阵的行列式等于零, 由此可得

$$(\beta^2 + u^2 - \kappa\nu)^2 - 4\beta^2 u^2 = 0$$

即

$$u^2 \mp 2\beta u + \left(\beta^2 - \kappa\nu\right) = 0 \tag{3-164}$$

所以本征波相速 $u=\pm\beta\pm\sqrt{\kappa\nu}$. 若 $\sqrt{\kappa\nu}>\beta$, 取为 $u=\sqrt{\kappa\nu}\pm\beta$, 或

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{I}}&=\sqrt{\kappa\nu}+\beta=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu\varepsilon-\xi^2}+\frac{\xi}{\mu\varepsilon-\xi^2}=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}+\xi}{\mu\varepsilon-\xi^2}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}-\xi}\\ u_{\mathrm{II}}&=\sqrt{\kappa\nu}-\beta=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}-\xi}{\mu\varepsilon-\xi^2}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}+\xi}\end{aligned}\right\} \tag{3-165}$$

以上 I 型波取 +, II 型波取 −. 注意式 (3-163) 只有一个独立方程,

$$\left(u^2+\beta^2-\kappa\nu\right)D_1-2\mathrm{i}u\beta D_2=0$$

将式 (3-165) 代入得

$$\pm 2\beta u D_1-2\mathrm{i}\beta u D_2=0$$

式中, 取 + 为 I 型波, 取 − 为 II 型波. 所以本征波 $\boldsymbol{D}_k$ 的两个分量之比为

$$\left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{I}}=+\mathrm{i},\quad \left.\frac{D_2}{D_1}\right|_{\mathrm{II}}=-\mathrm{i} \tag{3-166}$$

即 I 型波 (取 +) 为右旋圆极化, II 型波 (取 −) 为左旋圆极化. 由式 (3-165) 可见, 当 $\sqrt{\kappa\nu}>\beta$, $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$. 显然, 当线极化波入射到手征介质板, 出射时仍为线极化, 但极化方向发生旋转. 这一现象和双各向异性介质板类似, 但和 Faraday 旋转不同.

习　　题

1. 设单轴介质本构关系为 $\boldsymbol{E}=\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}\cdot\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}=\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}\cdot\boldsymbol{B}$.

(1) 若在主坐标系系中本构矩阵为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}=\begin{bmatrix}\kappa&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&\kappa_z\end{bmatrix}\quad 和\quad \overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}=\begin{bmatrix}\nu&0&0\\0&\nu&0\\0&0&\nu_z\end{bmatrix}$$

试求 $\boldsymbol{kDB}$ 系中 $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}_k$ 和 $\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}_k$ 的元素 κ_{ij} 和 ν_{ij}. 【提示】: 应用对称关系 $\kappa_{ij}=\kappa_{ji}$ 和 $\nu_{ij}=\nu_{ji}$.

(2) 试证：二本征波的相速分别为

$$u_{\mathrm{I}}=\sqrt{\kappa\left(\nu\cos^2\theta+\nu_z\sin^2\theta\right)}$$
$$u_{\mathrm{II}}=\sqrt{\nu\left(\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta\right)}$$

式中, θ 为波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴之间的夹角.

(3) 试证：二本征波的 k 面均为椭圆,

$$\frac{k_z^2}{\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\kappa\nu}}\right)^2}+\frac{k_s^2}{\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\kappa\nu_z}}\right)^2}=1,\quad \text{I 型波}$$

$$\frac{k_z^2}{\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\kappa\nu}}\right)^2}+\frac{k_s^2}{\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\kappa_z\nu}}\right)^2}=1,\quad \text{II 型波}$$

2. 双轴介质本构关系为 $\boldsymbol{E}=\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}\cdot\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}=\nu\boldsymbol{B}$, 设主坐标系中

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}=\begin{bmatrix}\kappa_x & 0 & 0\\ 0 & \kappa_y & 0\\ 0 & 0 & \kappa_z\end{bmatrix}$$

(1) 利用变换矩阵 $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$, 求出 $\boldsymbol{kDB}$ 系中 $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}=\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23}\\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33}\end{bmatrix}$ 的元素 κ_{11}、κ_{22} 及 $\kappa_{12}=\kappa_{21}$ 与 κ_x、κ_y、κ_z 的关系.

(2) 求证二本征波的相速为

$$u_{\text{I,II}}^2=\frac{\nu}{2}\left[(\kappa_{11}+\kappa_{22})\pm\sqrt{(\kappa_{11}-\kappa_{22})^2+4\kappa_{12}^2}\right]$$

3. 对于电子等离子体, 若外加恒磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 沿 z 轴, 其介电系数张量为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon & \mathrm{i}\varepsilon_g & 0\\ -\mathrm{i}\varepsilon_g & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}$$

如果将本构关系写为 $\boldsymbol{E}=\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}\cdot\boldsymbol{D}$, 试证:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{-1}=\begin{bmatrix}\kappa & \mathrm{i}\kappa_g & 0\\ -\mathrm{i}\kappa_g & \kappa & 0\\ 0 & 0 & \kappa_z\end{bmatrix}$$

式中,

$$\kappa=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-\varepsilon_g^2},\quad \kappa_g=\frac{-\varepsilon_g}{\varepsilon^2-\varepsilon_g^2},\quad \kappa=\frac{1}{\varepsilon_z}$$

4. 在 100~300km 之间有一个厚 200km 的电离层, 该层具有均匀电子浓度 $N=1.12\times10^{11}\mathrm{m}^{-3}$. 地球磁场为垂直, 强度为 $B_0=10^{-4}\mathrm{Wb/m}^2$. 设垂直入射通过该层的无线电波频率为 14MHz. 试求通过该层时的 Faraday 旋转角.

5. 对于导电单轴介质, 设 $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{new}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$, 且

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}\quad \text{和}\quad \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}=\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{bmatrix}$$

(1) 求此介质中寻常波和非寻常波的相速 (色散关系).

(2) 设此介质板的 y 轴垂直于板面, 且平面波沿 y 方向入射, 即

$$\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{x}} D_0 \exp\left(\frac{\mathrm{i}\omega y}{\sqrt{\nu\kappa}}\right) + \hat{\boldsymbol{z}} D_e \exp\left(\frac{\mathrm{i}\omega y}{\sqrt{\nu\kappa_z}}\right)$$

式中, $\nu = 1/\mu$, $\kappa = 1/\varepsilon_{\text{new}}$ 和 $\kappa_a = 1/\varepsilon_{\text{new,z}}$, 若 $\varepsilon_z = \varepsilon$, $\sigma_z \ll \sigma$, 试说明: 对于任何极化特性的入射波, 这种介质板都将其转变为线极化波.

6. 对于铁氧体, 若外加恒磁场沿 z 轴, 其本构关系为 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H}$, 式中, 导磁率张量为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \begin{bmatrix} \mu & +\mathrm{i}\mu_g & 0 \\ -\mathrm{i}\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}$$

若将本构关系写为 $\boldsymbol{H} = \overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}} \cdot \boldsymbol{B}$, 则

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} = \begin{bmatrix} \nu & +\mathrm{i}\nu_g & 0 \\ -\mathrm{i}\nu_g & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix}$$

$\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}$ 与 $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ 各元素之间关系和习题 3 相似. 参照 3.6 节, 讨论平面电磁波在上述铁氧体中沿 z 方向传播时的本征波 (左旋和右旋圆极化波) 的相速, 以及由此而引起的 Faraday 旋转效应.

【提示】　详细讨论可参考 Sodha, Srivastava, 1981.

第 4 章　波导和空腔

本章讨论几种基本波导和谐振腔中的电磁波特性, 给出波导中波的传播常数和腔体谐振频率计算公式. 用微扰方法分析波导衰减常数和腔体 Q 值, 并给出腔壁形状和腔内介质参数变化对谐振频率影响的估算公式.

4.1　平行导体平板波导

4.1.1　模型和方程

二平行理想导体平板位于 $x=0$ 和 $x=d$, 如图 4-1 所示. 设板间为均匀各向同性介质 (μ,ε). 平板沿 y 方向宽度为 w, 且 $w \gg d$, 因而边缘效应可以忽略. 以下分析中取 $\partial/\partial y=0$, Maxwell 方程可区分为对 z 轴的 TE(E_y, H_x, H_z 不为零) 和 TM(H_y, E_x, E_z 不为零) 波. TE 波方程为

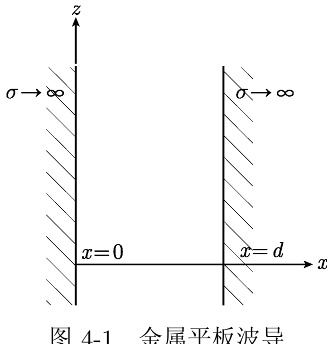


图 4-1　金属平板波导

$$\left.\begin{aligned} &H_x=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}\\ &H_z=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}\\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\mu\varepsilon\right)E_y=0 \end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} E_y|_{x=0}=0\\ E_y|_{x=d}=0 \end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

TM 波方程和边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &E_x=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}\\ &E_z=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial H_y}{\partial x}\\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\mu\varepsilon\right)H_y=0 \end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

$$\left.\begin{aligned} E_z|_{x=0} &= \left.\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ E_z|_{x=d} &= \left.\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|_{x=d} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-4}$$

可见, TE 和 TM 波的方程有对偶性; 但在理想导体表面, 二者的边界条件不具有对偶性, 故 TE 和 TM 的解不具有对偶关系.

4.1.2　TE 模

对于 TE 波, 满足边界条件 (4-2) 的波动方程解为

$$E_y = E_0 \sin(k_x x) \exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-5}$$

式中,

$$k_x = \frac{m\pi}{d}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{4-6}$$

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = k^2 \tag{4-7}$$

式 (4-6)、式 (4-7) 分别称为导行条件和色散关系. 式 (4-5) 右端因子 $\exp(\mathrm{i}k_z z)$ 表示波导中沿 z 方向传播的波, k_z 为传播常数; 对于 m 的不同整数取值称为 TE_m 模. 图 4-2 给出 $m = 1, 2, 3$ 几种模的场幅值分布.

由式 (4-1) 可得 TE_m 模的磁场为

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{k_z}{\omega\mu}E_0 \sin k_x x \cdot \exp(\mathrm{i}k_z z) \\ H_z &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{k_x}{\mathrm{i}\omega\mu}E_0 \cos k_x x \cdot \exp(\mathrm{i}k_z z) \end{aligned}\right\} \tag{4-8}$$

下面讨论导行模的截止频率. 由色散关系 (4-7) 及导行条件 (4-6) 有

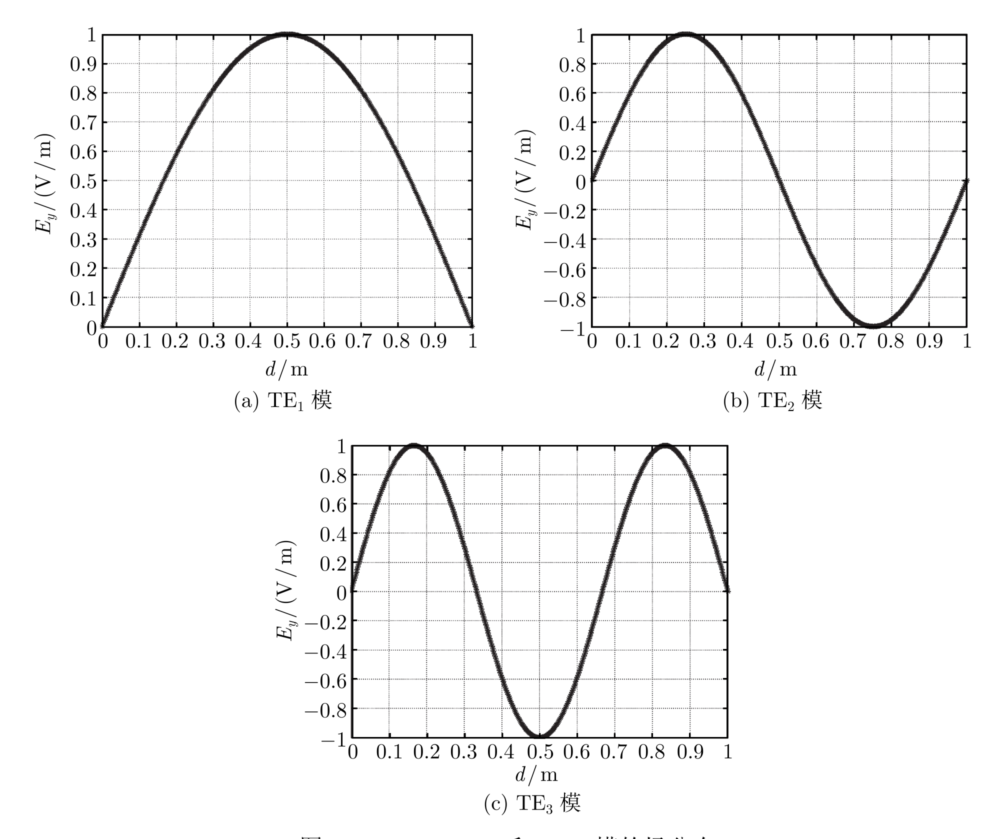
$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} \tag{4-9}$$

由式 (4-9) 可见, 对于 m 的一定取值, 使 k_z 为零的频率为

$$\omega_{\mathrm{c}m} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{m\pi}{d}, \quad f_{\mathrm{c}m} = \frac{m}{2d\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4-10}$$

称为截止频率. 当 $\omega < \omega_{\mathrm{c}m}$ 时, k_z 为虚数, 波沿 z 方向呈指数衰减, 为倏逝波. 也可以定义截止波数为

$$k_{\mathrm{c}m} = \omega_{\mathrm{c}m}\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{m\pi}{d} \tag{4-11}$$



(a) TE_1 模　(b) TE_2 模　(c) TE_3 模

图 4-2　TE_1、TE_2 和 TE_3 模的场分布

于是式 (4-9) 可写为

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{c}m}^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2}$$

或者对于如式 (4-11) 所示截止波数, 还可定义截止波长为

$$k_{\mathrm{c}m} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{c}m}}, \quad \lambda_{\mathrm{c}m} = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{c}m}}$$

于是式 (4-9) 又可写为

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{c}m}^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathrm{c}m}}\right)^2}$$

TE_m 模的最低阶为 $m = 1$, 这时

$$k_{\mathrm{c}1} = \frac{\pi}{d}, \quad \lambda_{\mathrm{c}1} = 2d, \quad \omega_{\mathrm{c}1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{\pi}{d}, \quad f_{\mathrm{c}1} = \frac{1}{2d\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4-12}$$

波导中沿 z 方向传播波的相速和群速. 由式 (4-9), 相速为

$$v_{\text{phase}}=\frac{\omega}{k_z}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{\mathrm{c}m}}{\omega}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2}} \tag{4-13}$$

群速为

$$v_{\text{group}}=\frac{1}{\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right)}=\frac{\partial k_z}{\partial\omega}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{\mathrm{c}m}}{\omega}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2} \tag{4-14}$$

由式 (4-13) 和式 (4-14) 得到

$$v_{\text{phase}}v_{\text{group}}=\frac{1}{\mu\varepsilon} \tag{4-15}$$

对于导行模 $k>k_{\mathrm{c}m}$, 群速恒小于介质中光速 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, 而相速则大于介质中光速. 这是因为介质中光速 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是指平面波的传播速度. 在平行平板波导中波沿 z 方向的传播可以理解为平面波在两个平行平板之间往返反射曲折前进, 因而沿 z 方向的相位传播速度会大于光速.

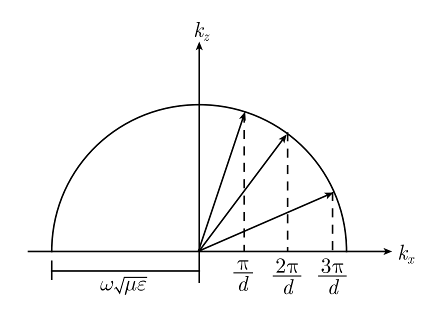


图 4-3　导行条件的 k 空间解释

导行条件 (4-6) 可以用 k 空间图示解释. 以 k_x, k_z 为坐标轴, 如图 4-3 所示, 色散关系 (4-7) 对应于半圆周, 其半径由工作频率确定. 导行条件 (4-6) 要求 k_x 分量等于 π/d 的整数倍, 二者联立决定了该频率下可传播导行波的模. 图 4-3 表示在给定频率所容许传播的几种导行模.

4.1.3　TM 模

对于 TM 波, 满足边界条件 (4-4) 的波动方程解为

$$H_y=H_0\cos(k_x x)\exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-16}$$

相应 TM_m 模的电场为

$$\left.\begin{aligned}E_x&=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{k_z}{\omega\varepsilon}H_0\cos k_x x\exp(\mathrm{i}k_z z)\\E_z&=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial H_y}{\partial x}=\frac{k_x}{\mathrm{i}\omega\mu}H_0\sin k_x x\exp(\mathrm{i}k_z z)\end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

式中,

$$k_x=\frac{m\pi}{d},\quad m=0,1,2,\cdots \tag{4-18}$$

关于 TM 波色散关系, 导行条件和截止频率的讨论和公式同 TE 波.

4.1.4　主模

特别当式 (4-18) 中 $m = 0$ 时, $k_x = 0, k_z = k$, $E_z = 0$, 平行平板中只有 E_x, H_y 横向场分量, 所以 TM_0 模也称为横电磁 (TEM) 波. 由式 (4-10) 可见, TEM 模的截止频率为零, 是平行平板波导的主模或基模, 其场分布为

$$\left.\begin{aligned} H_y &= H_0 \exp(\mathrm{i}kz) \\ E_x &= \frac{H_0}{\eta} \exp(\mathrm{i}kz) \end{aligned}\right\} \tag{4-19}$$

式中, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质特征阻抗. 式 (4-19) 表明, TEM 模的电场和磁场之间关系和自由空间中的平面波相同, 满足一维 Maxwell 方程,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

由式 (4-10) 可得 TM 和 TE 模按照截止频率顺序排列为

$$\begin{aligned} &\mathrm{TM}_0\,(\mathrm{TEM}), \quad \mathrm{TM}_1, \quad \mathrm{TM}_2, \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\;\; \mathrm{TE}_1, \quad\; \mathrm{TE}_2, \cdots \end{aligned}$$

所以, 使波导中传输单一主模 (基模) TM_0(TEM) 的工作频率范围为

$$0 < \omega < \omega_{\mathrm{c1}} \tag{4-21}$$

式中, 一阶模 TM_1 与 TE_1 的截止频率为

$$\omega_{\mathrm{c1}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\pi}{d}$$

4.2　平行平板中导行波的激励和衰减

4.2.1　波的激励

设平行平板波导中 $z = 0$ 处有 y 方向面电流, 如图 4-4 所示,

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{y}} J_{\mathrm{s}}(x) \tag{4-22}$$

该电流将向两侧辐射电磁波. 根据边界条件在 $z = 0$ 两侧磁场切向分量出现不连续.

$$H_x|_{z=0^+} - H_x|_{z=0^-} = J_{\mathrm{s}}(x) \tag{4-23}$$

可见, 由 y 方向面电流所激励波为 TE 波 $(E_y, H_x, H_z \neq 0)$, 设为

$$E_y = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \left(\sin \frac{m\pi x}{d}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_z z\right), & z \geqslant 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} E_m \left(\sin \frac{m\pi x}{d}\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_z z\right), & z < 0 \end{cases} \tag{4-24}$$

式 (4-24) 已满足 $z=0$ 电场切向分量连续的边界条件.

$$E_y\Big|_{z=0^+} = E_y\Big|_{z=0^-} \tag{4-25}$$

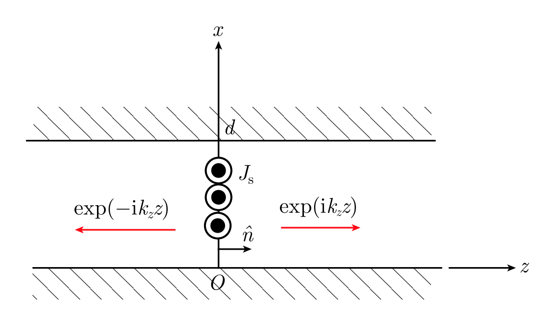


图 4-4　平行平板中的面电流

TE 波磁场 H_x 为

$$H_x = \frac{-1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\mathrm{i}k_z}{\mathrm{i}\omega\mu} E_m \left(\sin \frac{m\pi x}{d}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_z z\right), & z \geqslant 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}k_z}{\mathrm{i}\omega\mu} E_m \left(\sin \frac{m\pi x}{d}\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_z z\right), & z < 0 \end{cases} \tag{4-26}$$

式 (4-26) 代入边界条件 (4-23) 得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2k_z}{\omega\mu} E_m \sin \frac{m\pi x}{d} = J_{\mathrm{s}}(x) \tag{4-27}$$

利用函数系 $\sin(m\pi x/d)$ 的正交性, 即

$$\int_0^d \sin \frac{m\pi x}{d} \sin \frac{n\pi x}{d} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{d}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

式 (4-27) 两端乘以 $\sin(n\pi x/d)$ 并积分可得式 (4-26) 中各阶模的幅值,

$$E_m = -\frac{\omega\mu}{k_z d} \int_0^d J_{\mathrm{s}}(x) \sin \frac{m\pi x}{d} \mathrm{d}x \tag{4-28}$$

考虑面电流的一个特例. 设 $J_{\mathrm{s}}(x)$ 为位于 $z=0$ 的线电流, 如图 4-5 所示, 即

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{y}}I_0\delta(x-a) \tag{4-29}$$

式 (4-29) 代入式 (4-28) 得

$$E_m=-\frac{\omega\mu}{k_z d}\int_0^d I_0\delta(x-a)\sin\frac{m\pi x}{d}\mathrm{d}x=-\frac{\omega\mu I_0}{k_z d}\sin\frac{m\pi a}{d} \tag{4-30}$$

式中,

$$k_z=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}=\sqrt{k^2-k_{\mathrm{c}m}^2} \tag{4-31}$$

由式 (4-31) 可见, 当激励电流频率 ω 一定时, 所激励的波有两类：当 $(m\pi/d)<\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, k_z 为实数, 为导行模; 当 $(m\pi/d)>\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, k_z 为虚数, 为倏逝波.

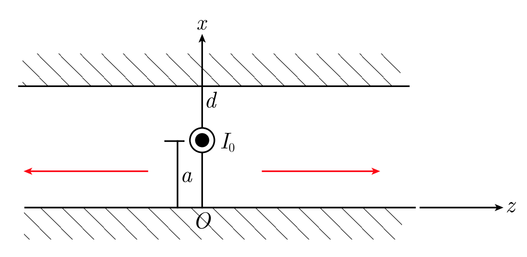


图 4-5 平行平板中的线电流

4.2.2 波导中能量传输

对于 $z>0$ 区域, 平行平板中 TE 波的复数 Poynting 矢量的 z 分量为

$$S_z=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)=-\frac{1}{2}E_yH_x^* \tag{4-32}$$

将式 (4-24) 和式 (4-26) 代入式 (4-32), 并利用正弦函数的正交性得到宽为 w 的平行平板中平均功率流为

$$\begin{aligned}
P&=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^d\mathrm{d}x\int_0^w E_yH_x^*\mathrm{d}y\right\}\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^d\mathrm{d}x\int_0^w\mathrm{d}y\left[\sum_{m=1}^{\infty}E_m\left(\sin\frac{m\pi x}{d}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_zz\right)\right]\\
&\quad\cdot\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_z}{\omega\mu}E_m\left(\sin\frac{m\pi x}{d}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_zz\right)\right]^*\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{wd}{2}\sum_{m=1}^{\infty}|E_m|^2\left(\frac{k_z^*}{\omega\mu}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(k_z-k_z^*\right)z\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4-33}$$

对于倏逝波, $k_z = \mathrm{i}\alpha_z$ 为纯虚数, 式 (4-33) 中

$$\left(\frac{k_z^*}{\omega\mu}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(k_z - k_z^*\right)z\right] = \frac{-\mathrm{i}\alpha_z}{\omega\mu}\exp\left(-2\alpha_z z\right) \tag{4-34}$$

其实部为零. 所以式 (4-33) 中所有倏逝波的贡献为零. 式 (4-33) 的求和只包含导行模的贡献, 即有

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{TE}} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{wd}{2}\sum_{m=1}^{M}|E_m|^2\frac{k_z}{\omega\mu} \\ &= \frac{wd}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{m=1}^{M}|E_m|^2\sqrt{1-\left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2} \end{aligned} \tag{4-35}$$

式中, 求和上限 M 为导行波的最高模, $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, k_{cm} = m\pi/d$. 上式表明, 各导行模独立传输平均能流, 倏逝波对平均能流没有贡献, 不同模之间没有耦合.

4.2.3　用微扰法计算衰减常数

如果波导壁是理想导体, 且其中介质为完全无耗, 则波导中输运的能流将没有衰减. 实际上, 波导中波衰减的物理原因有两方面：其一是由于波导壁不是理想导体, 其二是由于波导中介质具有损耗. 衰减常数的计算通常采用微扰法. 设波导中波的衰减不十分大, 导行波 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H} \propto \exp(\mathrm{i}k_z z)$, 且式中 z 方向波数 k_z 变为复数, 即 $k_z = \beta + \mathrm{i}\alpha$, 其中, α 为衰减常数. 所以, 场沿 z 方向呈指数衰减,

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H} \propto \exp(-\alpha z)$$

沿 z 方向平均传输功率 $\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)$ 的衰减为

$$P_{\mathrm{f}} \propto \exp(-2\alpha z)$$

根据能量守恒, 单位长度的平均传输功率等于单位长度内的能量衰减, 即

$$P_{\mathrm{d}} = -\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial z} = 2\alpha P_{\mathrm{f}} \tag{4-36}$$

由式 (4-36) 可得

$$\alpha = \frac{P_{\mathrm{d}}}{2P_{\mathrm{f}}} \tag{4-37}$$

式 (4-37) 给出衰减常数和平均传输功率 P_{f}、损耗功率 P_{d} 之间的关系.

微扰法计算衰减常数 α 的步骤如下：

(1) 由理想导体壁波导获得波导内场分布的精确解 (未扰动场);

(2) 用精确解计算平均传输功率 P_{f};

(3) 用精确解的场分布结合良导体阻抗边界条件计算平均损耗功率 P_{d};

(4) 用式 (4-37) 计算衰减常数 α.

由式 (4-16), 平行平板波导中 TM_m 波沿 z 方向平均能流为

$$\begin{aligned}\langle S_z\rangle &= \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{E_x H_y^*\right\}\\ &= \frac{1}{2}\frac{k_z}{\omega\varepsilon}\left|H_m\right|^2\cos^2\frac{m\pi x}{d}\end{aligned} \tag{4-38}$$

如图 4-6 所示平行平板间宽为 w 面积的传输功率为

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{f}} &= \int_0^d \mathrm{d}x\int_0^w \langle S_z\rangle \mathrm{d}y\\ &= \frac{wd}{4}\tfrac{k_z}{\omega\varepsilon}(1+\delta_{0m})|H_m|^2\end{aligned} \tag{4-39}$$

式中,

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 0, & m\neq 0\\ 1, & m=0\end{cases} \tag{4-40}$$

图 4-6 平行平板中的功率传输

另外, 根据 2.2 节所述良导体边界条件可以计算单位面积的损耗功率. 宽为 w, 长 1 米波导壁的平均损耗功率为

$$P_{\mathrm{d}} = \int_0^w p_{\mathrm{d}}\big|_{x=0}\mathrm{d}y + \int_0^w p_{\mathrm{d}}\big|_{x=d}\mathrm{d}y = w\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}|H_m|^2 \tag{4-41}$$

式中, 考虑了平行平板上下板面的损耗. 式 (4-39) 和式 (4-41) 代入式 (4-37) 得

$$\alpha^{\mathrm{TM_m}} = \frac{P_{\mathrm{d}}}{2P_{\mathrm{f}}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2\sigma}}\frac{1}{1+\delta_{0m}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2}} \tag{4-42}$$

特别, 当 $m=0$, 即 TEM 模情形, 这时 $k_{\mathrm{c}0}=0$, 式 (4-42) 变为

$$\alpha^{\mathrm{TEM}} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2\sigma}} \tag{4-43}$$

同理, 对 TE_m 波有

$$\alpha^{\mathrm{TE_m}} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2\sigma}}\frac{2\left(\dfrac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{k_{\mathrm{c}m}}{k}\right)^2}} \tag{4-44}$$

以上公式给出波导壁为非理想导体所引起的衰减常数.

下面讨论由于介质损耗引起的衰减. 当波导中介质为有耗, 则介电系数变为复数 (傅君眉, 冯恩信, 2000: 124; Guru, Hiziroglu, 2002: 459),

$$\varepsilon_{\text{new}} = \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega} \tag{4-45}$$

如式 (4-31) 所示传播常数 k_z 相应变为

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\left(\varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right) - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} = \beta + \mathrm{i}\alpha \tag{4-46}$$

对于弱导电介质 $\sigma/(\omega\varepsilon) \ll 1$, 式 (4-46) 近似有

$$\begin{aligned}
\beta + \mathrm{i}\alpha &= \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(1 + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2\left(1 + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \\
&= \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \\
&\simeq \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}\left(1 + \mathrm{i}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)
\end{aligned} \tag{4-47}$$

其实部为

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}$$

与理想导体平行平板波导情况相同. 式 (4-47) 的虚部为

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\beta = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}k_z \\
&= \frac{\sigma k}{2\omega\varepsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2} \\
&= \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1 - \left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2}
\end{aligned} \tag{4-48}$$

以上公式给出由于波导中介质损耗引起的衰减. 所得公式适用于 TE 和 TM 模. 由能量关系得到的衰减常数 (4-37) 可见, 如果同时考虑波导壁和介质损耗, 可以将两项衰减常数式相加.

4.3　理想导体板上介质层波导 (平板镜像波导)

4.3.1　分层介质中导行波基本方程

设分层介质模型如图 4-7 所示, 中间设为区域 0. 注意图 4-7 中分层介质的标示和第 2 章有所不同. 这里 x 轴垂直于分层介质分界面. 分层介质波导中的导行波可以区分为对 z 轴的 TE 和 TM 波, 沿 z 轴的传播因子为 $\exp(\mathrm{i}k_z z)$.

图 4-7 分层介质中的导行波

TE 波 $(\partial/\partial y=0)$ 在区域 l 中的场为

$$\left.\begin{aligned}
E_{ly}&=[A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}x)+B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x)]\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
H_{lx}&=\frac{-1}{\mathrm{i}\omega\mu_l}\frac{\partial E_{ly}}{\partial z}=\frac{-k_z}{\omega\mu_l}[A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}x)+B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x)]\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
H_{lz}&=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_l}\frac{\partial E_{ly}}{\partial x}=\frac{k_x}{\omega\mu_l}[A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}x)-B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x)]\exp(\mathrm{i}k_z z)
\end{aligned}\right\}\tag{4-49}$$

式中, A_l 为右行波幅值, B_l 为左行波幅值, k_z 在分界面为连续. 色散关系为

$$k_{lx}^2+k_z^2=k_l^2=\omega^2\mu_l\varepsilon_l\tag{4-50}$$

和第 2 章分层介质的讨论一样, 根据分层介质界面电场和磁场切向分量 E_y、H_z 连续的边界条件, 在区域 l 和 $l+1$ 分界面 $x=x_l$ 处有

$$\left.\begin{aligned}
&A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}x_l)+B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x_l)\\
&=A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l\right)+B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l\right)\\
&A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}x_l)-B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x_l)\\
&=p_{l(l+1)}\left[A_{l+1}\exp\left(\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l\right)-B_{l+1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l\right)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{4-51}$$

式中,

$$p_{l(l+1)}=p_{l(l+1)}^{\mathrm{TE}}=\frac{\mu_l k_{(l+1)x}}{\mu_{l+1}k_{lx}}\tag{4-52}$$

和第 2 章同样推导可得递推公式,

$$\frac{A_l}{B_l}=\frac{\exp(-\mathrm{i}2k_{lz}x_l)}{R_{l(l+1)}}+\frac{[1-(1/R_{l(l+1)}^2)]\exp[-\mathrm{i}2(k_{(l+1)z}+k_{lz})x_l]}{(1/R_{l(l+1)})\exp(-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}x_l)+\dfrac{A_{l+1}}{B_{l+1}}}$$

式中,

$$R_{l(l+1)}=\frac{1-p_{l(l+1)}}{1+p_{l(l+1)}}$$

将式 (4-51) 第二式乘以 -1, 同样推导可得

$$\frac{B_l}{A_l}=\frac{\exp\left(\mathrm{i}2k_{lz}x_l\right)}{R_{l(l+1)}}+\frac{\left[1-(1/R_{l(l+1)}^2)\right]\exp\left[\mathrm{i}2\left(k_{(l+1)z}+k_{lz}\right)x_l\right]}{(1/R_{l(l+1)})\exp(\mathrm{i}2k_{(l+1)z}x_l)+\dfrac{B_{l+1}}{A_{l+1}}} \tag{4-53}$$

以上为向左递推关系. 注意到在最右端区域 M 中没有左行波, 由此出发, 应用式 (4-53) 可以从最右端区域 M 递推到区域 0 的幅值比, 即

$$\frac{B_M}{A_M}=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{B_1}{A_1}\Rightarrow\frac{B_0}{A_0}\quad 记\quad \frac{B_0}{A_0}=R_{0+} \tag{4-54}$$

式中,

$$R_{0+}=\frac{B_0}{A_0}=\frac{\exp\left(\mathrm{i}2k_{0x}x_1\right)}{R_{01}}+\frac{\left[1-\left(1/R_{01}^2\right)\right]\exp\left[\mathrm{i}2\left(k_{1x}+k_{0x}\right)x_1\right]}{(1/R_{01})\exp\left(\mathrm{i}2k_{1x}x_1\right)+\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)} \tag{4-55}$$

也可以将式 (4-51) 等号左右交换, 重写为

$$\left.\begin{aligned}&A_{l+1}\exp\left[\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l\right]+B_{l+1}\exp\left[-\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l\right]\\=&A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}d_l)+B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x_l)\\&A_{l+1}\exp[\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l]-B_{l+1}\exp[-\mathrm{i}k_{(l+1)x}x_l]\\=&p_{(l+1)l}\left[A_l\exp(\mathrm{i}k_{lx}d_l)-B_l\exp(-\mathrm{i}k_{lx}x_l)\right]\end{aligned}\right\} \tag{4-56}$$

式中,

$$p_{(l+1)l}=p_{(l+1)l}^{\mathrm{TE}}=\frac{1}{p_{l(l+1)}^{\mathrm{TE}}}=\frac{\mu_{l+1}k_{lx}}{\mu_l k_{(l+1)x}} \tag{4-57}$$

由此可得递推公式,

$$\frac{A_{l+1}}{B_{l+1}}=\frac{\exp(-\mathrm{i}2k_{(l+1)z}x_l)}{R_{(l+1)l}}+\frac{\left[1-(1/R_{(l+1)l}^2)\right]\exp\left[-\mathrm{i}2(k_{lz}+k_{(l+1)z})x_l\right]}{(1/R_{(l+1)l})\exp(-\mathrm{i}2k_{lz}x_l)+\dfrac{A_l}{B_l}} \tag{4-58}$$

式中,

$$R_{(l+1)l}=\frac{1-p_{(l+1)l}}{1+p_{(l+1)l}}=\frac{1-\dfrac{1}{p_{l(l+1)}}}{1+\dfrac{1}{p_{l(l+1)}}}=-\frac{1-p_{l(l+1)}}{1+p_{l(l+1)}}=-R_{l(l+1)}$$

以上为向右递推关系. 由于在最左端区域 $(-N)$ 中没有右行波, 由此出发, 从最左端区域 $(-N)$ 可得递推得到区域 0 的幅值比, 即

$$\frac{A_{-N}}{B_{-N}}=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{A_{-1}}{B_{-1}}\Rightarrow\frac{A_0}{B_0}\quad \text{记}\quad \frac{A_0}{B_0}=R_{0-} \tag{4-59}$$

式中,

$$R_{0-}=\frac{A_0}{B_0}=\frac{\exp(-\mathrm{i}2k_{0x}x_0)}{R_{0(-1)}}+\frac{\left[1-(1/R_{0(-1)}^2)\right]\exp\left[-\mathrm{i}2(k_{(-1)x}+k_{0x})x_0\right]}{(1/R_{0(-1)})\exp[-\mathrm{i}2k_{(-1)x}x_0]+\left(\dfrac{A_{-1}}{B_{-1}}\right)} \tag{4-60}$$

由式 (4-59) 递推所得 R_{0-} 与区域 0 左侧分层介质参数有关. 而由式 (4-54) 递推所得 R_{0+} 与区域 0 右侧分层介质参数有关. 显然, 式 (4-59) 和式 (4-54) 的结果应满足以下等式:

$$R_{0+}R_{0-}=1 \tag{4-61}$$

式 (4-61) 称为导行条件. 它给出传播常数与分层介质参数的关系.

对于 TM 波, H_y,E_x,E_z 不为零. 根据对偶关系可以得到同样形式的递推公式, 只是式 (4-52)、式 (4-57) 改换为

$$\begin{aligned}p_{l(l+1)}&=p_{l(l+1)}^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon_l k_{(l+1)x}}{\varepsilon_{l+1}k_{lx}},\\ p_{(l+1)l}&=p_{(l+1)l}^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon_{l+1}k_{lx}}{\varepsilon_l k_{(l+1)x}}=\frac{1}{p_{l(l+1)}^{\mathrm{TM}}}\end{aligned} \tag{4-62}$$

在上述一般公式基础上, 以下分析两种重要情形: 理想导体板上介质层波导和介质板波导.

4.3.2　理想导体板上介质层波导: TE 模

理想导体板上介质层波导 (又称平板镜像波导) 如图 4-8 所示, 设板的厚度为 d, 即 $x_1=d$. 考虑 TE 波, 在区域 0 和区域 1 电场分别为

$$\left.\begin{aligned}&E_{0y}=[A_0\exp(\mathrm{i}k_{0x}x)+B_0\exp(-\mathrm{i}k_{0x}x)]\exp(\mathrm{i}k_zz),\quad 0\leqslant x\leqslant d\\ &E_{1y}=E_1\exp(\mathrm{i}k_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_zz)=E_1\exp(-\alpha_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_zz),\quad x>d\end{aligned}\right\} \tag{4-63}$$

相应磁场可以由式 (4-1) 求得, 即

$$H_x=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z},\quad H_z=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

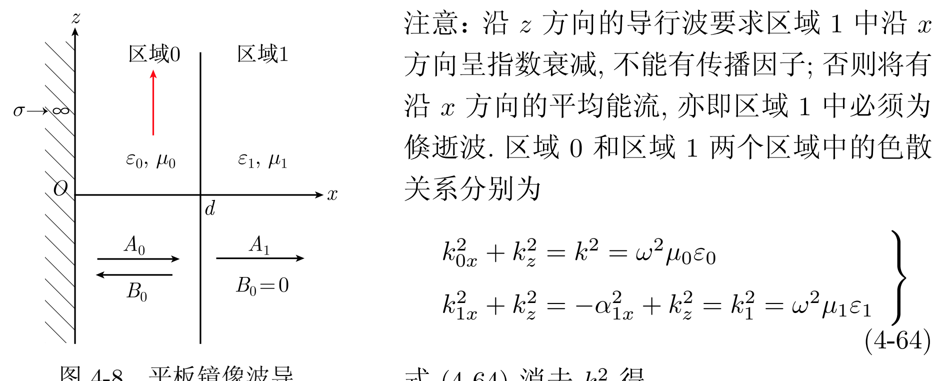


图 4-8　平板镜像波导

注意：沿 z 方向的导行波要求区域 1 中沿 x 方向呈指数衰减, 不能有传播因子; 否则将有沿 x 方向的平均能流, 亦即区域 1 中必须为倏逝波. 区域 0 和区域 1 两个区域中的色散关系分别为

$$\left.\begin{aligned} &k_{0x}^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \\ &k_{1x}^2+k_z^2=-\alpha_{1x}^2+k_z^2=k_1^2=\omega^2\mu_1\varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \tag{4-64}$$

式 (4-64) 消去 k_z^2 得

$$(\alpha_{1x}d)^2+(d_{0x}d)^2=(k^2-k_1^2)d^2=\omega^2(\mu_0\varepsilon_0-\mu_1\varepsilon_1)d^2 \tag{4-65}$$

由 $x=0$ 处理想导体边界条件得

$$E_{0y}|_{x=0}=0\Rightarrow A_0+B_0=0 \tag{4-66}$$

式 (4-66) 代入式 (4-59) 得

$$R_{0-}=\frac{A_0}{B_0}=-1 \tag{4-67}$$

另外, 由于区域 1 中无左行波, $B_1=0$, 代入式 (4-55)($x=d$ 右边界) 得到

$$R_{0+}=\frac{B_0}{A_0}=R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{0x}d) \tag{4-68}$$

式中,

$$R_{01}=\frac{1-p_{01}}{1+p_{01}},\quad p_{01}=p_{01}^{\mathrm{TE}}=\frac{\mu_0k_{1x}}{\mu_1k_{0x}}=\frac{\mathrm{i}\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1k_{0x}} \tag{4-69}$$

即

$$R_{01}=\frac{1-\mathrm{i}\dfrac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1k_{0x}}}{1+\mathrm{i}\dfrac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1k_{0x}}}$$

由于上式满足 $|R_{01}|=1$, 因而可令

$$R_{01}=\frac{1-\mathrm{i}\dfrac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1k_{0x}}}{1+\mathrm{i}\dfrac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1k_{0x}}}=\exp(\mathrm{i}2\varphi_{01}) \tag{4-70}$$

式中,

$$2\varphi_{01}=-2\arctan\left(\frac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1k_{0x}}\right) \tag{4-71}$$

称为 Goos-Hänchen 相移, 或全反射相移. 式 (4-70) 代入式 (4-68) 得

$$R_{0+} = \exp\left[\mathrm{i}\left(2\varphi_{01} + 2k_{0x}d\right)\right] \tag{4-72}$$

将式 (4-67)、式 (4-72) 代入导行条件 (4-61) 式 $R_{0+}R_{0-} = 1$, 得

$$-\exp\left[\mathrm{i}\left(2\varphi_{01} + 2k_{0x}d\right)\right] = 1 \tag{4-73}$$

由此可得

$$2\varphi_{01} + 2k_{0x}d = (2m-1)\pi, \quad m = 1, 2, \cdots \tag{4-74}$$

式 (4-71) 代入式 (4-74) 得

$$\frac{\mu_0\alpha_{1x}d}{\mu_1 k_{0x}d} = \tan(-\varphi_{01}) = \tan\left(k_{0x}d - (2m-1)\frac{\pi}{2}\right) = -\cot\left(k_{0x}d\right) \tag{4-75}$$

即

$$\alpha_{1x}d = -\frac{\mu_1}{\mu_0}(k_{0x}d)\cot(k_{0x}d) \tag{4-76}$$

以上为导行条件在理想导体板上介质层波导的具体形式 (TE 波).

式 (4-76) 与式 (4-65) 的联立求解可以采用图解法, 如图 4-9 所示, 圆弧为色散关系 (4-65), 其半径为 $\omega d\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 - \mu_1\varepsilon_1}$; 式 (4-76) 所得为一组类似余切的曲线. 二曲线的交点就是式 (4-76)、式 (4-65) 的解. 非线性联立方程 (4-76)、式 (4-65) 的求解也可以用数值方法. 由此可求得 TE_m 模的 k_{0x}, α_{1x} 和传播常数 k_z. 由于 α_{1x}(及 $\alpha_{1x}d$) 应当大于零, 如图 4-9 所示二曲线的交点所在位置的范围为

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi < k_{0x}d < m\pi \tag{4-77}$$

与之对应的为 TE_m 模.

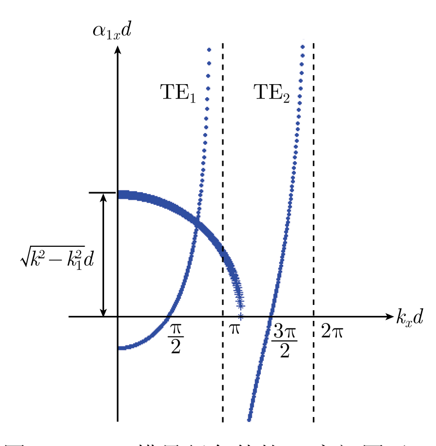


图 4-9 TE 模导行条件的 k 空间图示

当 $\alpha_{1x}d = 0$, 对应于波导截止情形, 代入式 (4-76) 得 $\cot(k_{0x}d) = 0$, 即

$$k_{0x}d = \frac{2m-1}{2}\pi \tag{4-78}$$

为图 4-9 中曲线横轴上的交点. 式 (4-78) 代入式 (4-65) 得 TE_m 模的截止频率,

$$\omega_{cm} = \frac{(2m-1)\pi}{2d\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 - \mu_1\varepsilon_1}}, \quad m = 1, 2, \cdots \tag{4-79}$$

或者截止波数

$$k_{cm}=\omega_{cm}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{(2m-1)\pi}{2d\sqrt{1-\dfrac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

由此可见, 理想导体板上介质层波导结构要求 $\mu_0\varepsilon_0>\mu_1\varepsilon_1$, 即介质层参数应大于外部介质 (例如空气) 参数. 且当介质层参数 $\mu_0\varepsilon_0$ 接近 $\mu_1\varepsilon_1$ 时具有较大的截止波数, 或较高截止频率.

将式 (4-67) 代入式 (4-63) 得 TE_m 模的场分布为

$$E_{0y}=2\mathrm{i}A_0\sin k_{0x}x\exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-80}$$

由 $x=d$ 处边界条件 $E_{0y}|_{x=d}=E_{1y}|_{x=d}$ 可得

$$2\mathrm{i}A_0\sin k_{0x}d=E_1\exp\left(-\alpha_{1x}d\right) \tag{4-81}$$

式 (4-81) 代入式 (4-80) 得

$$\left.\begin{aligned}&E_{0y}=[E_1\exp(-\alpha_{1x}d)]\frac{\sin k_{0x}x}{\sin k_{0x}d}\exp(\mathrm{i}k_z z), \quad 0\leqslant x<d\\&E_{1y}=E_1\exp(-\alpha_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_z z), \quad x>d\end{aligned}\right\} \tag{4-82}$$

TE_1 和 TE_2 的场分布见图 4-10, 图中设介质层厚度 $d=0.1\mathrm{m}$.

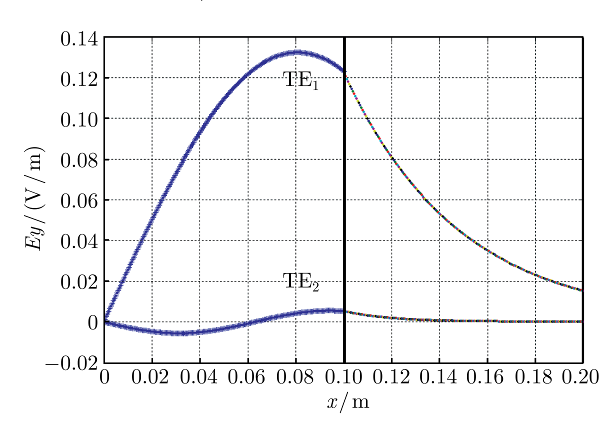


图 4-10　TE 模电场幅值分布

4.3.3　理想导体板上介质层波导: TM 模

对于 TM_m 模, 它的磁场为

$$\left.\begin{aligned}&H_{0y}=[A_0\exp(\mathrm{i}k_{0x}x)+B_0\exp(-\mathrm{i}k_{0x}x)]\exp(\mathrm{i}k_z z), \quad 0\leqslant x\leqslant d\\&H_{1y}=H_1\exp(\mathrm{i}k_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_z z)=H_1\exp(-\alpha_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_z z), \quad x>d\end{aligned}\right\} \tag{4-83}$$

相应电场可以由式 (4-3) 求得, 即

$$E_x = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

由导行条件 (4-61) $R_{0+}R_{0-}=1$, 并注意到

$$\left.\begin{aligned} R_{0-} &= \frac{A_0}{B_0} = +1 \\ R_{0+} &= \frac{B_0}{A_0} = R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{0x}d) \end{aligned}\right\} \tag{4-84}$$

式中,

$$R_{01} = \frac{1-p_{01}}{1+p_{01}}, \quad p_{01} = p_{01}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_0 k_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}} = \frac{\mathrm{i}\varepsilon_0\alpha_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}}$$

和 TE 波一样, 由上式有 $|R_{01}|=1$, 因而又可以写成

$$R_{01} = \frac{1-\mathrm{i}\dfrac{\varepsilon_0\alpha_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}}}{1+\mathrm{i}\dfrac{\varepsilon_0\alpha_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}}} = \exp(\mathrm{i}2\varphi_{01}), \quad 2\varphi_{01} = -2\arctan\left(\frac{\varepsilon_0\alpha_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}}\right) \tag{4-85}$$

式 (4-84) 和式 (4-85) 代入导行条件 (4-61) $R_{0+}R_{0-}=1$, 得

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(2\varphi_{01}+2k_{0x}d\right)\right] = 1$$

由此得

$$2\varphi_{01}+2k_{0x}d = 2m\pi, \quad m=0,1,2,\cdots$$

所以

$$\frac{\varepsilon_0\alpha_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}} = -\tan\varphi_{01} = \tan(k_{0x}d - m\pi) = \tan(k_{0x}d)$$

或

$$\alpha_{1x}d = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}(k_{0x}d)\tan(k_{0x}d) \tag{4-86}$$

式 (4-86) 和色散关系 (4-65) 的联立解可用图解法, 如图 4-11 所示, 即可求得 TM_m 模的 k_{0x}, α_{1x} 和传播常数 k_z. 或者也可以用数值方法求解. 由图 4-11 可见, $\alpha_{1x}\geqslant 0$ 的条件要求

$$m\pi < k_{0x}d < \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

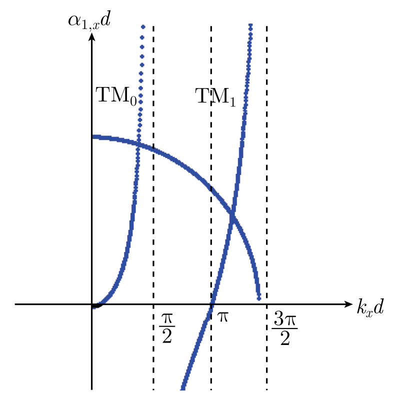


图 4-11 TM 模导行条件的 k 空间图示

由 $\alpha_{1x}=0$ 代入式 (4-86) 得 $\tan(k_{0x}d)=0$, 即

$$k_{0x}d = m\pi$$

为图 4-11 中曲线横轴上的交点. 上式代入式 (4-65) 得 TM_m 的截止频率为

$$\omega_{cm} = \frac{m\pi}{d\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 - \mu_1\varepsilon_1}}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{4-87}$$

或者截止波数为

$$k_{cm} = \omega_{cm}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{m\pi}{d\sqrt{1 - \dfrac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

TM 的最低模式 (基模) 为 TM_0, 其截止频率为零. 所以工作于单一 TM_0 模的工作频率范围是

$$0 < \omega < \frac{\pi}{2d\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 - \mu_1\varepsilon_1}}$$

上式右端是 TE_1 模的截止频率.

将 $B_0 = A_0$ 代入式 (4-83) 可得区域 0 中 TM_m 模的磁场为

$$H_{0y} = 2A_0 \cos k_{0x}x \exp(\mathrm{i}k_z z)$$

再利用 $x = d$ 处边界条件 $H_{0y}|_{x=d} = H_{1y}|_{x=d}$ 可得

$$2A_0 \cos k_{0x}d = H_1 \exp(-\alpha_{1x}d)$$

所以

$$H_{0y} = H_1 \frac{\exp(-\alpha_{1x}d)}{\cos k_{0x}d} \cos k_{0x}x \exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-88}$$

区域 1 的场式 (4-83) 为

$$H_{1y} = H_1 \exp(-\alpha_{1x}x) \exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-89}$$

在给定频率和模的阶数 m 后式 (4-89) 中 k_{0x}, α_{1x} 由图 4-11 的图解法或数值方法可求得. TM_0 和 TM_1 的磁场分布如图 4-12 所示, 图中设介质层厚度 $d = 0.1\mathrm{m}$.

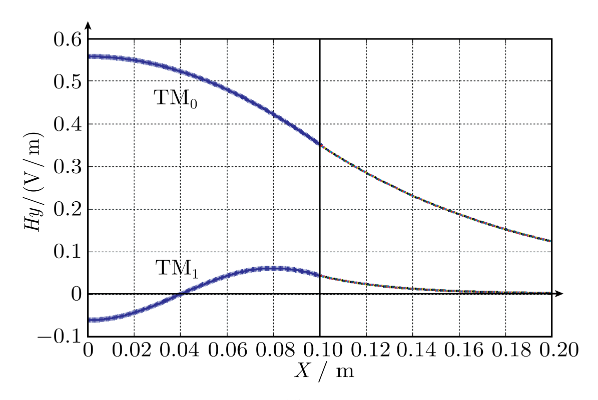


图 4-12　TM 模磁场幅值分布

4.4 介质板波导 (平面介质波导)

4.4.1 TE 模

对称介质板波导如图 4-13 所示, 介质板厚度为 d, 设区域 1 和区域 (-1) 的介质相同. 在此情形 TE 和 TM 波具有对偶性. 首先讨论 TE 波的解. 对于导行模, 图中区域 (-1) 和区域 1 中的场 E_y 沿 x 和 $-x$ 方向必然呈指数衰减, 为倏逝波. 各个区域中的场为

$$\left.\begin{aligned}
&E_{0y}=[A_0\exp(\mathrm{i}k_{0x}x)+B_0\exp(-\mathrm{i}k_{0x}x)]\exp(\mathrm{i}k_zz),\quad 0\leqslant x\leqslant d\\
&E_{1y}=E_1\exp(\mathrm{i}k_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_zz)=E_1\exp(-\alpha_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_zz),\quad x>d\\
&E_{(-1)y}=E_{(-1)}\exp(-\mathrm{i}k_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_zz)=E_{(-1)}\exp(\alpha_{1x}x)\exp(\mathrm{i}k_zz),\quad x<0
\end{aligned}\right\}\tag{4-90}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned}
&k_{0x}^2+k_z^2=k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\\
&-\alpha_{1x}^2+k_z^2=k_1^2=\omega^2\mu_1\varepsilon_1
\end{aligned}\right\}\tag{4-91}$$

称为色散关系. 式 (4-91) 消去 k_z 得

$$(k_{0x}d)^2+(\alpha_{1x}d)^2=(k_0^2-k_1^2)d^2=\omega^2(\mu_0\varepsilon_0-\mu_1\varepsilon_1)d^2\tag{4-92}$$

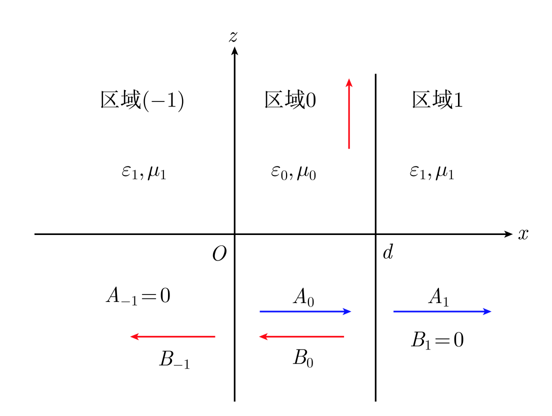


图 4-13 平面介质波导

由于区域 1 中没有左行波, $B_1=0$, 利用递推公式 (4-55) 可得

$$B_{0+}=\frac{B_0}{A_0}=R_{01}\exp(\mathrm{i}2k_{0x}d)\tag{4-93}$$

式中,

$$R_{01} = \frac{1-p_{01}}{1+p_{01}}, \quad p_{01} = p_{01}^{\mathrm{TE}} = \frac{\mu_0 k_{1x}}{\mu_1 k_{0x}} = \frac{\mathrm{i}\mu_0 \alpha_{1x}}{\mu_1 k_{0x}}$$

$$R_{01} = \frac{1-\mathrm{i}\dfrac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1 k_{0x}}}{1+\mathrm{i}\dfrac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1 k_{0x}}} = \exp(\mathrm{i}2\varphi_{01}), \quad \varphi_{01} = -\arctan\left(\frac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1 k_{0x}}\right) \tag{4-94}$$

式 (4-94) 代入式 (4-93) 得

$$R_{0+} = \exp\left[\mathrm{i}(2\varphi_{01} + 2k_{0x}d)\right] \tag{4-95}$$

φ_{01} 称为 Goos-Hänchen 相移, 或全反射相移.

同样, 区域 (-1) 中没有右行波, $A_{-1}=0$, 由式 (4-60) 有

$$R_{0-} = \frac{A_0}{B_0} = R_{0(-1)} = \frac{1-p_{0(-1)}}{1+p_{0(-1)}} \tag{4-96}$$

式中,

$$p_{0(-1)} = p_{0(-1)}^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{p_{(-1)0}} = \frac{\mathrm{i}\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1 k_{0x}}$$

上式代入式 (4-96) 得

$$R_{0-} = \exp(\mathrm{i}2\varphi_{01}) \tag{4-97}$$

将式 (4-95)、式 (4-97) 代入导行条件 $R_{0+}R_{0-}=1$ 得

$$\exp\left[\mathrm{i}(2k_{0x}d + 4\varphi_{01})\right] = 1 \tag{4-98}$$

即

$$2k_{0x}d + 4\varphi_{01} = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{4-99}$$

式 (4-94) 代入式 (4-99) 得

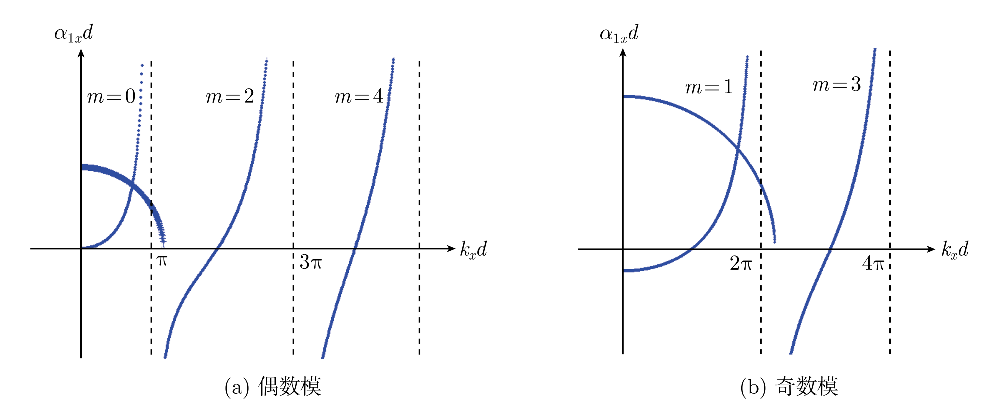
$$\frac{\mu_0\alpha_{1x}}{\mu_1 k_{0x}} = -\tan\varphi_{01} = \tan\left(\frac{k_{0x}d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{k_{0x}d}{2}\right), & m = 0, 2, 4, \cdots \\ -\cot\left(\dfrac{k_{0x}d}{2}\right), & m = 1, 3, 5, \cdots \end{cases} \tag{4-100}$$

或

$$\alpha_{1x}d = \begin{cases} \dfrac{2\mu_1}{\mu_0}\left(\dfrac{k_{0x}d}{2}\right)\tan\left(\dfrac{k_{0x}d}{2}\right), & m = 0, 2, 4, \cdots \\ -\dfrac{2\mu_1}{\mu_0}\left(\dfrac{k_{0x}d}{2}\right)\cot\left(\dfrac{k_{0x}d}{2}\right), & m = 1, 3, \cdots \end{cases} \tag{4-101}$$

以上为介质板波导 TE 波的导行条件.

色散关系 (4-92) 和导行条件 (4-101) 的联立求解可用图解法, 如图 4-14 所示, 区分为 (a) 偶数模和 (b) 奇数模情形. 色散关系和导行条件两组曲线的交点即为联立方程的解, 由此可求得 TE_m 模的 k_{0x}, α_{1x} 和传播常数 k_z. 式 (4-101) 与式 (4-92) 的求解也可以用数值方法. 当工作频率增高, 色散关系圆弧的半径增大, 因而对应可传播导行模的数目也增加.



(a) 偶数模　　(b) 奇数模

图 4-14　TE 模导行条件的 k 空间图解

对于给定频率 ω, 导行波要求区域 1 中波呈指数衰减, 即 $\alpha_{1x}d > 0$. 当 $\alpha_{1x} = 0$ 时出现截止. 由图 4-14 可见, $\alpha_{1x}d > 0$ 所对应的 $k_{0x}d$ 取值范围为 (TE_m)

$$m\pi < k_{0x}d < (m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{4-102}$$

当 $\alpha_{1x}d = 0$, 代入式 (4-100) 有

$$\tan\left(\frac{k_{0x}d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) = 0 \quad 即 \quad k_{0x}d = m\pi$$

上式代入色散关系 (4-92) 可求 TE_m 的截止频率.

$$\omega_{cm}^{\mathrm{TE}} = \frac{m\pi}{d\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 - \mu_1\varepsilon_1}}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{4-103}$$

相应截止波数为

$$k_{cm} = \omega_{cm}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{m\pi}{d\sqrt{1 - \dfrac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

为了得到 TE_m 的场分布, 首先由式 (4-93) 和式 (4-95) 可得

$$B_0 = A_0 R_{0+} = A_0 \exp\left[\mathrm{i}2\left(k_{0x}d + \varphi_{01}\right)\right]$$

代入式 (4-90) 得区域 0 的场为

$$\begin{aligned} E_{0y} &= \left[A_0 \exp\left(\mathrm{i}k_{0x}x\right) + B_0 \exp\left(-\mathrm{i}k_{0x}x\right)\right] \exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \\ &= \left[A_0 \exp(\mathrm{i}k_{0x}x) + A_0 \exp\left[\mathrm{i}2\left(k_{0x}d + \varphi_{01}\right)\right] \exp(-\mathrm{i}k_{0x}x)\right] \exp(\mathrm{i}k_z z) \\ &= 2A_0 \exp\left[\mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \cos\left(k_{0x}x - k_{0x}d - \varphi_{01}\right) \exp(\mathrm{i}k_z z) \end{aligned}$$

又由式 (4-99),

$$k_{0x}d = m\pi - 2\varphi_{01}$$

所以

$$\begin{aligned} E_{0y} &= 2A_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(k_{0x}d + \varphi_{01}\right)\right] \cos\left(k_{0x}x - k_{0x}d - \varphi_{01}\right) \exp(\mathrm{i}k_z z) \\ &= 2A_0 \cos\left(k_{0x}x - \frac{k_{0x}d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) \exp\left[\mathrm{i}k_z z + \mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \end{aligned} \tag{4-104}$$

在给定频率和模的阶数 m 后式 (4-104) 中 k_{0x}, α_{1x} 可用图 4-14 图解法或数值方法求得, φ_{01} 则由式 (4-99) 求得. 根据边界条件和式 (4-90)、式 (4-104), 在 $x = 0$ 和 d 处有

$$E_{(-1)} = 2A_0 \exp\left[\mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \cos\left(\frac{k_{0x}d}{2} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

$$E_1 \exp(-\alpha_{1x}d) = 2A_0 \exp\left[\mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \cos\left(\frac{k_{0x}d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right)$$

代入式 (4-90) 可得区域 1 和 (-1) 中的场分布,

$$\left.\begin{aligned} E_{1y} &= E_1 \exp(-\alpha_{1x}x) \exp(\mathrm{i}k_z z) \\ &= 2A_0 \exp(\alpha_{1x}d - \alpha_{1x}x) \exp\left[\mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \cos\left(\frac{k_{0x}d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) \exp(\mathrm{i}k_z z) \\ &= 2A_0 \exp(\alpha_{1x}d - \alpha_{1x}x) \cos\left(\frac{k_{0x}d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) \exp\left[\mathrm{i}k_z z + \mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \\ E_{(-1)y} &= E_{(-1)} \exp(\alpha_{1x}x) \exp(\mathrm{i}k_z z) \\ &= 2A_0 \exp(\alpha_{1x}x) \cos\left(\frac{k_{0x}d}{2} + \frac{m\pi}{2}\right) \exp\left[\mathrm{i}k_z z + \mathrm{i}(k_{0x}d + \varphi_{01})\right] \end{aligned}\right\} \tag{4-105}$$

式 (4-104)、式 (4-105) 所给场分布当 $m = 0,\ 1$ 时如图 4-15 所示, 图中设介质层厚度 $d = 0.1\mathrm{m}$.

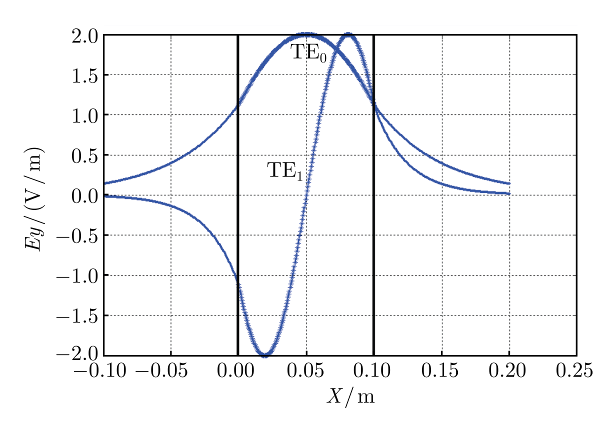


图 4-15　TE_0 和 TE_1 模的幅值分布

4.4.2　TM 模

由于如图 4-13 所示介质板波导 TM 与 TE 波的方程和边界都有对偶性, 所以 TM 与 TE 模也具有对偶性. 这时, 色散关系 (4-92) 不变. 利用对偶关系

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon \to \mu, \quad \mu \to \varepsilon$$

TM 波导行条件可根据式 (4-101) 经过对偶替换后为

$$\alpha_{1x} d = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{k_{0x} d}{2}\right)\tan\left(\dfrac{k_{0x} d}{2}\right), & m = 0, 2, 4, \cdots \\ -\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{k_{0x} d}{2}\right)\cot\left(\dfrac{k_{0x} d}{2}\right), & m = 1, 3, \cdots \end{cases} \tag{4-106}$$

色散关系和导行条件的联立求解用图解法, 和 TE 模的图 4-14 相同. TM_m 模截止频率公式与 TE_m 模 (4-103) 相同.

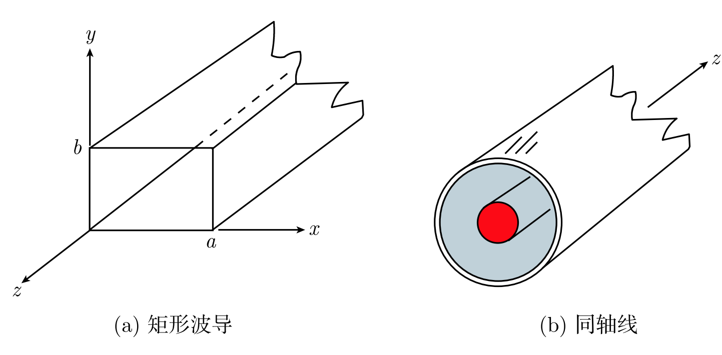
4.5　金属矩形波导

4.5.1　基本方程和 TM、TE 波分解

常用金属波导有矩形波导, 圆形波导和同轴线, 如图 4-16 所示.

设理想导体波导管沿 z 方向为均匀截面, 沿 z 和 $-z$ 方向导行波传播因子为 $\exp(\pm \mathrm{i} k_z z)$, 其中 k_z 为传播常数. 这时, 对 z 的求导可以用 $\pm \mathrm{i} k_z$ 代替. 将 Maxwell 旋度方程中场量及算子分解为纵向 (沿 z 方向) 和横向 (垂直于 z 方向) 分量,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_z+\boldsymbol{E}_s=\hat{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{E}_z+\boldsymbol{E}_s\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}_z+\boldsymbol{H}_s=\hat{\boldsymbol{z}}H_z+\boldsymbol{H}_s\\ \nabla&=\nabla_z+\nabla_s=\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}+\nabla_s\end{aligned}\right\}\tag{4-107}$$



(a) 矩形波导　　(b) 同轴线

图 4-16　金属波导

式中, 下标 s 表示横向分量. 设波导中介质为均匀各向同性, 于是, 无源时谐场 Maxwell 旋度方程可写为

$$\left.\begin{aligned}\left(\nabla_s+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{E}_z+\boldsymbol{E}_s)=\mathrm{i}\omega\mu(\boldsymbol{H}_s+\boldsymbol{H}_z)\\ \left(\nabla_s+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{H}_z+\boldsymbol{H}_s)=-\mathrm{i}\omega\varepsilon(\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_z)\end{aligned}\right\}\tag{4-108}$$

式 (4-108) 左端旋度项可进一步写为

$$\left(\nabla_s+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{H}_z+\boldsymbol{H}_s)=\nabla_s\times\boldsymbol{H}_s+\nabla_s\times\boldsymbol{H}_z+\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_s}{\partial z}+\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_z}{\partial z}$$

式中, 第一项为 z 分量, 第二、三项为 s 分量, 第四项等于零. 因而式 (4-108) 可区分为横向和纵向分量,

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_s&=\nabla_s\times\boldsymbol{E}_z+\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}_s}{\partial z}\\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_s&=\nabla_s\times\boldsymbol{H}_z+\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_s}{\partial z}\\ \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_z&=\nabla_s\times\boldsymbol{E}_s\\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_z&=\nabla_s\times\boldsymbol{H}_s\end{aligned}\right\}\tag{4-109}$$

由式 (4-109) 第一、二式消去 $H_{\rm s}$ 得

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}_{\rm s} &= \nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{H}_z+\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{E}_z+\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\rm s}}{\partial z}\right)\\
&= \nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{H}_z+\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{\boldsymbol{z}}\times(\nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{E}_z)+\hat{\boldsymbol{z}}\times\left(\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\rm s}}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}
$$

应用以下等式：

$$
\hat{\boldsymbol{z}}\times(\nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{E}_z)=\nabla_{\rm s}(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{E}_z)-(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla_{\rm s})\boldsymbol{E}_z=\nabla_{\rm s}E_z
$$

$$
\hat{\boldsymbol{z}}\times\left(\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\partial E_{\rm s}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\rm s}}{\partial z}
$$

$$
\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_{\rm s}}{\partial z^2}=-k_z^2\boldsymbol{E}_{\rm s}
$$

可得

$$
\boldsymbol{E}_{\rm s}=\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\left[\nabla_{\rm s}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)+\mathrm{i}\omega\mu\nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{H}_z\right] \tag{4-110}
$$

同样有

$$
\boldsymbol{H}_{\rm s}=\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\left[\nabla_{\rm s}\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)+\mathrm{i}\omega\mu\nabla_{\rm s}\times\boldsymbol{E}_z\right] \tag{4-111}
$$

以上二式表明横向分量可以用纵向分量表示．所以理想导体波导中的导行波可以区分为 $\mathrm{TM}_z(H_z=0,E_z\neq 0)$ 和 $\mathrm{TE}_z(E_z=0,H_z\neq 0)$ 波.

将式 (4-110)、式 (4-111) 代入式 (4-109) 得

$$
\left.\begin{aligned}
\left[\nabla_{\rm s}^2+\left(\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2\right)\right]E_z=0\\
\left[\nabla_{\rm s}^2+\left(\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2\right)\right]H_z=0
\end{aligned}\right\} \tag{4-112}
$$

式 (4-112) 表明, TM 与 TE 波纵向分量均满足 Helmholtz 方程.

对于理想导体波导壁, 如图 4-17 所示, 边界条件为

$$
\text{TM：}\quad E_z|_{\rm wall}=0 \tag{4-113}
$$

$$
\text{TE：}\quad \left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right|_{\rm wall}=0 \tag{4-114}
$$

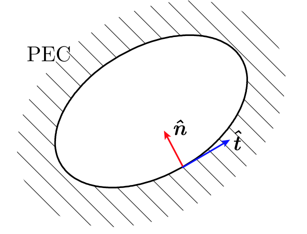


图 4-17　理想波导壁边界

式 (4-114) 的证明如下：在理想导体边界面处电场切向分量为零, $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\rm s}|_{\rm wall}=0$, 由式 (4-110) 可得

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_{\rm s} \propto \hat{\boldsymbol{n}} \times \left[\nabla_{\rm s}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + {\rm i}\omega\mu\nabla_{\rm s} \times \boldsymbol{H}_z\right] = 0 \tag{4-115}$$

用 $\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{t}}$ 分别表示波导壁表面的法向和切向单位矢, 如图 4-17 所示. 式 (4-115) 中

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_{\rm s}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla_{\rm s} E_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{n}} \times \left(\hat{\boldsymbol{n}}\frac{\partial E_z}{\partial n} + \hat{\boldsymbol{t}}\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) \\
&= 0 + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \\
\hat{\boldsymbol{n}} \times ({\rm i}\omega\mu\nabla_{\rm s} \times \boldsymbol{H}_z) &= {\rm i}\omega\mu\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{\nabla}_{\rm s} \times \boldsymbol{H}_z) \\
&= {\rm i}\omega\mu\left[\boldsymbol{\nabla}_{\rm s}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_z) - (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_{\rm s}) H_z\right] \\
&= {\rm i}\omega\mu\left[0 - \frac{\partial H_z}{\partial n}\right] = -{\rm i}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial n}
\end{aligned}$$

代入式 (4-115) 即得式 (4-114). 证毕.

由于理想导体边界面处边界条件 (4-113)、式 (4-114) 不具有对偶性, 所以对于 TM 波和 TE 波, 式 (4-112) 的解不具有对偶关系.

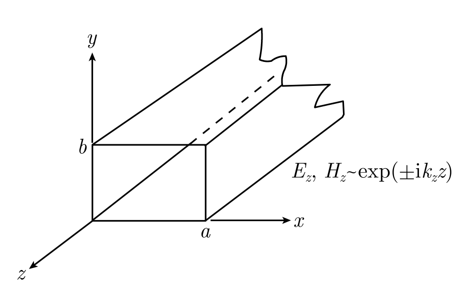


图 4-18　矩形波导

4.5.2　矩形波导

设矩形波导沿 x 和 y 方向宽度分别为 a 和 b, 如图 4-18 所示. 先考虑 TM 波 $(H_z = 0, E_z \neq 0)$. 由式 (4-112) 和边界条件 (4-113) 可得分离变量法的解为

$$E_z = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \exp({\rm i}k_z z) \tag{4-116}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned}
&k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad mn = 1, 2, \cdots \\
&k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{4-117}$$

式 (4-117) 第一式为导行条件, 第二式为色散关系. 注意对于 TM 模 $m, n \neq 0$.

场的横向分量和纵向分量之间关系 (4-110)、式 (4-111) 在直角坐标系中为

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathrm{i}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\
E_y &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathrm{i}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\
H_x &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - \mathrm{i}\omega\mu\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\\
H_y &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + \mathrm{i}\omega\mu\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-118}$$

对于 TM 波, $H_z = 0$, 式 (4-116) 代入式 (4-118) 可得

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{\mathrm{i}k_x k_z}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)}E_0\cos k_x x\sin k_y y\cdot\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
E_y &= \frac{\mathrm{i}k_y k_z}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)}E_0\sin k_x x\cos k_y y\cdot\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
H_x &= \frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon k_y}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)}E_0\sin k_x x\cos k_y y\cdot\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
H_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon k_x}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)}E_0\cos k_x x\sin k_y y\cdot\exp(\mathrm{i}k_z z)
\end{aligned}\right\} \tag{4-119}$$

由式 (4-117) 得到

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

由传播常数 $k_z = 0$ 得出 TM_{mn} 的截止频率为

$$\omega_{\mathrm{c},mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{4-120}$$

截止波数为

$$k_{\mathrm{c},mn} = \omega_{\mathrm{c},mn}\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

当工作频率 $\omega < \omega_{\mathrm{c},mn}$ 时, k_z 为虚数, TM_{mn} 模为倏逝波. 由于 TM 模 $m, n \neq 0$, 所以 TM 波的最低模为 TM_{11}. 若 $a = 3\mathrm{cm}$, $b = 1.5\mathrm{cm}$, 波导中为空气 (真空), 则 $\omega_{11} =, 70.2\times10^9\mathrm{Hz}$, 或 $f_{11} = 11.2\times10^9\mathrm{Hz} = 11.2\mathrm{GHz}$.

下面讨论 TE_{mn} 波 ($E_z = 0, H_z \neq 0$). 式 (4-112) 满足边界条件 (4-114) 的解为

$$H_z = H_0\cos k_x x\cos k_y y\exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-121}$$

式中,

$$k_x = \frac{m\pi}{a},\quad k_y = \frac{n\pi}{b},\quad mn = 0, 1, 2, \cdots \tag{4-122}$$

由式 (4-118) 得波导中场的横向分量为

$$
\left.\begin{aligned}
H_x &= \frac{-\mathrm{i}k_x k_z}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \cdot \exp(\mathrm{i}k_z z)\\
H_y &= \frac{\mathrm{i}k_y k_z}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \cdot \exp(\mathrm{i}k_z z)\\
E_x &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu k_y}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \cdot \exp(\mathrm{i}k_z z)\\
E_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu k_x}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \cdot \exp(\mathrm{i}k_z z)
\end{aligned}\right\} \tag{4-123}
$$

截止频率公式同式 (4-120). 注意, 对于 TE 模, m 与 n 均可等于零, 但二者不能同时为 0. 如果 $m = n = 0$, 只是静场情形的解, 对于导行波将不考虑 TE_{00} 模.

4.5.3 矩形波导的主模

设 $a > b$, 由式 (4-120) 得截止频率最低的模 (主模) 为 TE_{10},

$$
\omega_{\mathrm{c},10} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\pi}{a} \tag{4-124}
$$

或截止波数为

$$
k_{\mathrm{c},10} = \omega_{\mathrm{c},10}\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\pi}{a}
$$

或截止波长为

$$
\lambda_{\mathrm{c},10} = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{c},10}} = 2a
$$

即主模的截止波长等于波导长边的 2 倍. TE_{10} 模的场分量为

$$
\left.\begin{aligned}
H_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
H_x &= \frac{-\mathrm{i}k_z a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(\mathrm{i}k_z z)\\
E_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(\mathrm{i}k_z z)
\end{aligned}\right\} \tag{4-125}
$$

场分布如图 4-19 所示.

图 4-19 TE_{10} 波的电磁场分布

将截止频率公式 (4-120) 改写为

$$
\omega_{\mathrm{c},mn}\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{m^2 + n^2\left(\frac{a}{b}\right)^2}
$$

采用主模 TE_{10} 的截止频率式 (4-124) 归一后上式又可写为

$$\frac{\omega_{c,mn}}{\omega_{c,10}} = \sqrt{m^2 + n^2\left(\frac{a}{b}\right)^2} \tag{4-126}$$

设矩形波导边长 $a = 2b$, 对于 m 和 n 的不同取值由上式可得相对截止频率如表 4-1 所示, 表中按照相对截止频率顺序排列. 表 4-1 的图示如图 4-20 所示. 由表可见, 当 $a = 2b$ 时 TE_{20} 和 TE_{01} 以及 TE_{40} 和 TE_{02} 模具有相同的截止频率, 这一现象称为简并. 在 $a = 2b$ 情形, 保证矩形波导中传播单一主模的工作频率范围选择是

$$\omega_{c,10} < \omega < \left(\omega_{c,20} \text{ 或 } \omega_{c,01}\right) \tag{4-127}$$

单一主模的频率 (波长) 范围如图 4-20 所示. 如果工作频率等于 3 倍 $\omega_{c,10}$ 时, 将允许 $TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11}, TE_{21}, TM_{21}, TE_{30}$ 多种模式的传播. 矩形波导中前 30 种传播模的场分布见 Lee 等 (1985) 或 Balanis(1989: 365).

表 4-1　当 $a = 2b$ 时各阶模的归一化截止频率

m	1	2	0	1	2	3	3	4	0
n	0	0	1	1	1	0	1	0	2
传播模	TE_{10}	TE_{20}	TE_{01}	TE_{11}, TM_{11}	TE_{21}, TM_{21}	TE_{30}	TE_{31}, TM_{31}	TE_{40}	TE_{02}
$\omega_{c,mn}/\omega_{c,10}$	1	2	2	2.236	2.828	3	3.606	4	4

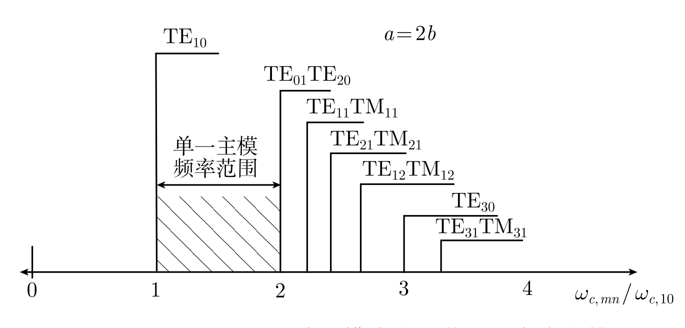


图 4-20　当 $a = 2b$ 时波导模式按照截止频率大小排列

4.6　金属圆波导

4.6.1　基本方程和分离变量解

金属圆波导如图 4-21 所示. 场的纵向场分量 Helmholtz 方程 (4-112) 在圆柱坐标中的形式为

$$
\left.\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+k_\rho^2\right]E_z=0\\
\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+k_\rho^2\right]H_z=0
\end{aligned}\right\}\tag{4-128}
$$

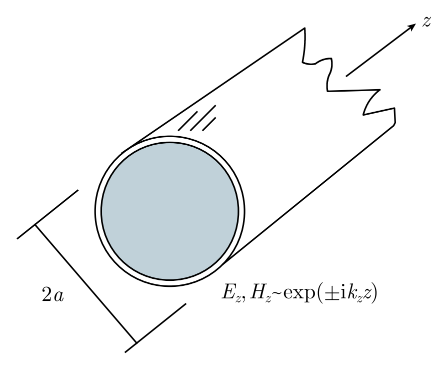


图 4-21　圆形波导

式中,

$$k_\rho^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2\tag{4-129}$$

设式 (4-128) 的分离变量解为

$$E_z=B(\xi)\varPhi(\varphi)\tag{4-130}$$

式中,

$$\xi=k_\rho\rho$$

将式 (4-130) 代入式 (4-128) 后分离为以下两个常微分方程:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\varPhi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-m^2\varPhi\\
&\left[\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)+\left(1-\frac{m^2}{\xi^2}\right)\right]B(\xi)=0
\end{aligned}\tag{4-131}
$$

以上分别为谐振动方程和 Bessel 方程. 它们的解为

$$
\begin{aligned}
\varPhi(\varphi)&=\sin m\varphi,\quad \cos m\varphi\\
B(\xi)&=J_m(\xi),\quad N_m(\xi)
\end{aligned}\tag{4-132}
$$

式中, $J_m(\xi),N_m(\xi)$ 分别为 Bessel 函数和 Neumann 函数. 也可以是二者的线性组合, 即

$$\exp(+\mathrm{i}m\varphi) = \cos m\varphi + \mathrm{i}\sin m\varphi$$

$$\exp(-\mathrm{i}m\varphi) = \cos m\varphi - \mathrm{i}\sin m\varphi$$

$$H_m^{(1)}(\xi) = J_m(\xi) + \mathrm{i}N_m(\xi)$$

$$H_m^{(2)}(\xi) = J_m(\xi) - \mathrm{i}N_m(\xi)$$

$H_m^{(1)}(\xi)$、$H_m^{(2)}(\xi)$ 分别为第一类、第二类 Hankel 函数. 圆柱函数的渐近特性如表 4-2 所示. 当 $\xi\to\infty$, $J_m(\xi)$ 与余弦相近, $N_m(\xi)$ 与正弦相近, 而 $H_m^{(1)}(\xi)$ 和 $H_m^{(2)}(\xi)$ 则与指数函数相近. 当 $\xi\to 0$, 除 $J_m(\xi)$ 以外, 其他函数在此为奇点. 金属圆波导在 $\rho\to 0$ 处场值为有限, 所以圆柱函数中只能选取 $J_m(\xi)$. 表中 Γ 函数当变量 n 为整数时其值为

$$\Gamma(n+1) = n!$$

特别当 $n=0$ 和 1 时为 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$.

表 4-2 圆柱函数的渐近公式

圆柱函数	$\xi\to 0$		$\xi\to\infty$
	$m=0$	$\mathrm{Re}(m)>0$	
$J_m(\xi)$	1	$\dfrac{(\xi/2)^m}{\Gamma(m+1)}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi\xi}}\cos\left(\xi-\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$N_m(\xi)$	$\dfrac{2}{\pi}\ln(\xi)$	$-\dfrac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\dfrac{2}{\xi}\right)^m$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi\xi}}\sin\left(\xi-\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$H_m^{(1)}(\xi)$	$\mathrm{i}\dfrac{2}{\pi}\ln(\xi)$	$-\mathrm{i}\dfrac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\dfrac{2}{\xi}\right)^m$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi\xi}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\xi-\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$
$H_m^{(2)}(\xi)$	$-\mathrm{i}\dfrac{2}{\pi}\ln(\xi)$	$\mathrm{i}\dfrac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\dfrac{2}{\xi}\right)^m$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi\xi}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi-\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

4.6.2 TM 模

横向场分量和纵向分量的关系 (4-110)、式 (4-111) 在柱坐标系中为

$$\left.\begin{aligned}
E_\rho &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\mathrm{i}\omega\mu\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right)\\
E_\varphi &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\mathrm{i}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\\
H_\rho &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{\partial H_z}{\partial\rho}-\mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}\right)\\
H_\varphi &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}+\mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{4-133}$$

考虑 TM 波 ($E_z \neq 0, H_z = 0$), 由式 (4-130)、式 (4-132) 得

$$E_z = J_m(k_\rho \rho)\left\{\begin{array}{c}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{array}\right\}\exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-134}$$

式中, 花括号表示对 φ 的函数关系可以是正弦或余弦函数. 式 (4-134) 代入式 (4-133) 得

$$\left.\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{\mathrm{i}k_z k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} J'_m(k_\rho\rho)\left\{\begin{array}{c}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{array}\right\}\exp(\mathrm{i}k_z z) \\
E_\varphi &= \frac{\mathrm{i}k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_\rho\rho)\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi \\ -\sin m\varphi\end{array}\right\}\exp(\mathrm{i}k_z z) \\
H_\rho &= \frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_\rho\rho)\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi \\ -\sin m\varphi\end{array}\right\}\exp(\mathrm{i}k_z z) \\
H_\varphi &= \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} J'_m(k_\rho\rho)\left\{\begin{array}{c}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{array}\right\}\exp(\mathrm{i}k_z z)
\end{aligned}\right\} \tag{4-135}$$

式中, $J'_m(\xi)$ 代表 Bessel 函数对 ξ 求导. 计算时可以应用 Bessel 函数导数公式,

$$\left.\begin{aligned}
J'_n(\xi) &= J_{n-1}(\xi) - \frac{n}{x}J_n(\xi) \\
J'_n(\xi) &= -J_{n+1}(\xi) + \frac{n}{\xi}J_n(\xi) \\
J'_0(\xi) &= -J_1(\xi)
\end{aligned}\right\} \tag{4-136}$$

由边界条件, 在 $\rho = a$ 处 E_z, E_φ 等于零, 即要求

$$J_m(k_\rho a) = 0 \tag{4-137}$$

式 (4-137) 给出 k_ρ 的取值, 是圆柱波导的导行条件. 表 4-3 给出 Bessel 函数及其导数的根. m 阶 Bessel 函数的第 n 个根记为 ξ_{mn}, 如表 4-3 所示, 即 $J_m(\xi_{mn}) = 0$. 所以由式 (4-137), 对于 TM 波有

$$k_\rho a = \xi_{mn}, \quad k_\rho^{\mathrm{TM}} = \frac{\xi_{mn}}{a} \tag{4-138}$$

由导行条件 (4-137) 和色散关系 (4-129) 可得

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_\rho^2} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\xi_{mn}}{a}\right)^2} \tag{4-139}$$

表 4-3　Bessel 函数及其导数的根

m	$J_m(\xi_{mn})=0$				$J'_m(\xi'_{mn})=0$			
	ξ_{m1}	ξ_{m2}	ξ_{m3}	ξ_{m4}	ξ'_{m1}	ξ'_{m2}	ξ'_{m3}	ξ'_{m4}
0	2.405	5.520	8.654	11.792	3.832	7.016	10.174	13.324
1	3.832	7.016	10.174	13.324	1.841	5.331	8.536	11.706
2	5.135	8.417	11.620	14.796	3.054	6.706	9.970	13.170
3	6.380	9.761	13.015	16.223	4.201	8.015	11.346	14.586
4	7.588	11.065	14.373	17.616	5.318	9.282	12.682	15.964

由 $k_z=0$ 可得 TM_{mn} 模的截止频率,

$$\omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TM}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\xi_{mn}}{a} \tag{4-140}$$

相应的截止波数为

$$k_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TM}}=\omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TM}}\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TM}}}=\frac{\xi_{mn}}{a}$$

或者截止波长为

$$\lambda_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TM}}=\frac{2\pi a}{\xi_{mn}} \tag{4-141}$$

4.6.3　TE 模

同样可得金属圆波导中 TE 波 $(H_z\neq 0, E_z=0)$ 的解为

$$H_z=J_m\left(k_\rho\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\exp(\mathrm{i}k_z z) \tag{4-142}$$

其色散关系和式 (4-129) 相同. 场的横向分量为

$$\left.\begin{aligned}
H_\rho&=\frac{\mathrm{i}k_z k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}J'_m\left(k_\rho\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
H_\varphi&=\frac{\mathrm{i}k_z}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\frac{m}{\rho}J_m\left(k_\rho\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ -\sin m\varphi\end{Bmatrix}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
E_\rho&=\frac{\mathrm{i}\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\frac{m}{\rho}J_m\left(k_\rho\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ -\sin m\varphi\end{Bmatrix}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
E_\varphi&=\frac{-\mathrm{i}\omega\mu k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}J'_m\left(k_\rho\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-143}$$

边界条件要求在 $\rho=a$ 处 E_φ 等于零, 得出导行条件为

$$J'_m(k_\rho a)=0 \tag{4-144}$$

m 阶 Bessel 函数导数的第 n 个根记为 ξ'_{mn}, 如表 4-3 所示, 即 $J'_m(\xi'_{mn}) = 0$. 式 (4-144) 中

$$k_\rho a = \xi'_{mn}, \quad k_\rho^{\mathrm{TE}} = \frac{\xi'_{mn}}{a} \tag{4-145}$$

由导行条件 (4-144) 和色散关系 (4-129) 可得

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_\rho^2} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\xi'_{mn}}{a}\right)^2} \tag{4-146}$$

由 $k_z = 0$ 可得 TE_{mn} 模的截止频率,

$$\omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\xi'_{mn}}{a} \tag{4-147}$$

相应的截止波数为

$$k_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TE}} = \omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TE}}\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TE}}} = \frac{\xi'_{mn}}{a}$$

或者截止波长为

$$\lambda_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{TE}} = \frac{2\pi a}{\xi'_{mn}} \tag{4-148}$$

TE_{mn} 和 TM_{mn} 模的下标 m 表示沿 φ 方向场大小相间的变化次数, 下标 n 则表示沿 ρ 方向的变化次数. $m = 0$ 为轴对称情况, 即 TE_{0n} 和 TM_{0n} 模. 对于 TM_{0n} 模, $H_z = E_\varphi = H_\rho = 0$, 以及

$$\left.\begin{aligned}
E_z &= J_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
E_\rho &= \frac{\mathrm{i}k_z k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}J'_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
H_\varphi &= \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}J'_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-149}$$

式中, k_ρ 如式 (4-138). 对于 TE_{0n} 模, $E_z = H_\varphi = E_\rho = 0$, 以及

$$\left.\begin{aligned}
H_z &= J_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
H_\rho &= \frac{\mathrm{i}k_z k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}J'_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
E_\varphi &= \frac{-\mathrm{i}\omega\mu k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}J'_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-150}$$

式中, k_ρ 如式 (4-145).

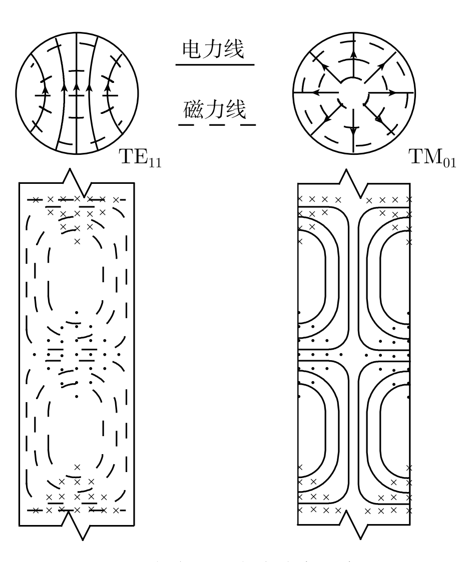
4.6.4 导行模的截止顺序和主模

波导中各种模式可以按照截止频率或波长来排列顺序. 对于矩形波导, 各模式的排列顺序和边长 a 与 b 的相对值有关. 但金属圆波导中各模式截止的顺序是固定的. 根据式 (4-141)、式 (4-148) 和表 4-3, 按照截止波长排列的顺序见表 4-4(应嘉年等, 1994: 96).

表 4-4 金属圆波导中各模式截止的顺序

顺序	Bessel 函数及其导数的根 ξ_{mn},ξ'_{mn}	截止波长	模式
1	$\xi'_{11}=1.841$	$3.4126a$	TE_{11}
2	$\xi_{01}=2.405$	$2.6127a$	TM_{01}
3	$\xi'_{21}=3.054$	$2.0572a$	TE_{21}
4	$\xi'_{01}=\xi_{11}=3.832$	$1.6398a$	TE_{01}, TM_{11}
5	$\xi'_{31}=4.201$	$1.4956a$	TE_{31}
6	$\xi_{21}=5.136$	$1.2235a$	TM_{21}
7	$\xi'_{41}=5.318$	$1.1816a$	TE_{41}
8	$\xi'_{12}=5.331$	$1.1785a$	TE_{12}

由表 4-4 可见, TE_{11} 模具有最低截止频率, 是圆波导的主模 (基模). 其次是 TM_{01} 模, 再次是 TE_{21} 模. 随后 TE_{01} 和 TM_{11} 二者有相同的截止频率. 截止频率最低的两种模式 TE_{11} 和 TM_{01} 为实际中多用, 其场分布见图 4-22. 金属圆波导中前 30 种传播模的场分布见 Lee 等 (1985) 或 Balanis(1989: 480).



(a) 电力线和磁力线分布示意

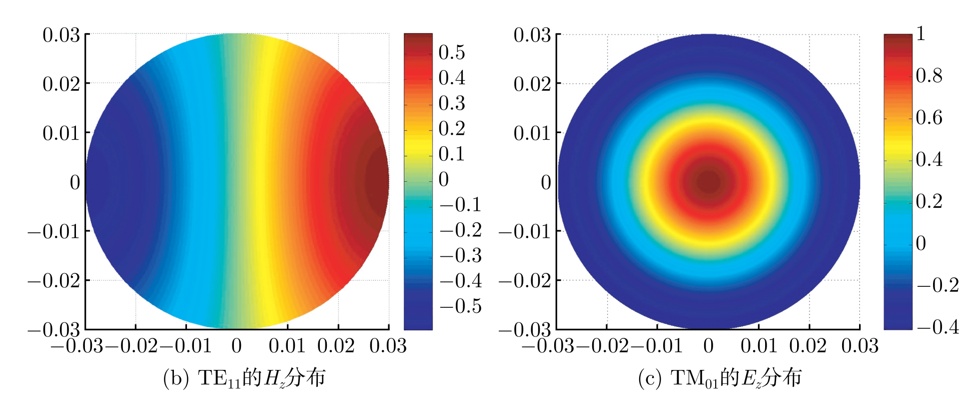


图 4-22　圆波导中 TE_{11} 和 TM_{01} 模的场分布

4.7　介质圆波导

4.7.1　场分量和边界条件

设介质圆波导半径为 a, 介质参数为 μ_1, ε_1, 周围介质为 μ_2, ε_2, 如图 4-23 所示. 实际应用的光纤就属于介质圆波导. 与金属圆波导不同的是, 为了方程的解满足 $\rho = a$ 处边界条件, 介质圆波导中一般不可区分为 TE 和 TM 波, 而要求 E_z 和 H_z 同时出现, 即为 TE 和 TM 混合导行模.

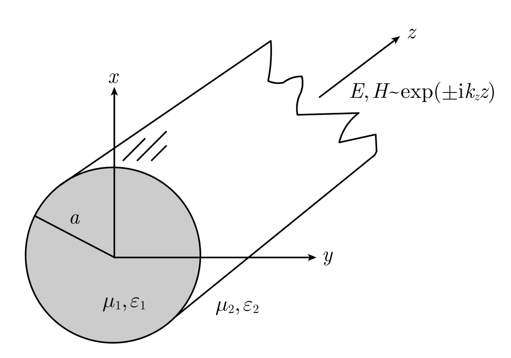


图 4-23　介质圆柱波导

设柱内 $\rho < a$ 区域 E_z 和 H_z 的解为 Bessel 函数,

$$\left.\begin{aligned} E_{1z} &= AJ_m(k_{1\rho}\rho)\cos(m\varphi)\exp(\mathrm{i}k_z z) \\ H_{1z} &= BJ_m(k_{1\rho}\rho)\sin(m\varphi)\exp(\mathrm{i}k_z z) \end{aligned}\right\} \tag{4-151}$$

式中, E_z 和 H_z 分别用 cos 和 sin 函数是为了满足边界条件, 也可以是 sin 和 cos

函数. 其色散关系为

$$k_z^2 + k_{1\rho}^2 = k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \tag{4-152}$$

柱外 $\rho > a$ 区域 E_z 和 H_z 的解要用 Hankel 函数, 这是由于导行波要求 $\rho > a$ 区域电磁场沿 ρ 方向呈指数衰减, 即倏逝波. 令 $k_{2\rho} = \mathrm{i}\alpha_{2\rho}$, 则有

$$\left.\begin{aligned} E_{2z} &= CH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}\rho\right)\cos\left(m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \\ H_{2z} &= DH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}\rho\right)\sin\left(m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \end{aligned}\right\} \tag{4-153}$$

其色散关系为

$$k_z^2 - \alpha_{2\rho}^2 = k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \tag{4-154}$$

由色散关系 (4-152)、式 (4-154) 可得

$$k_{1\rho}^2 + \alpha_{2\rho}^2 = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2\left(\mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2\right) \tag{4-155}$$

场的横向分量 $E_\varphi, E_\rho, H_\varphi, H_\rho$ 由式 (4-133) 确定. 在 $\rho < a$ 区域为

$$\left.\begin{aligned} E_{1\varphi} &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{1z}}{\partial\varphi} - \mathrm{i}\omega\mu_1\frac{\partial H_{1z}}{\partial\rho}\right) \\ &= \frac{1}{k_{1\rho}^2}\left[-\frac{\mathrm{i}k_z m}{\rho}AJ_m\left(k_{1\rho}\rho\right) - \mathrm{i}\omega\mu_1 k_\rho BJ_m'\left(k_{1\rho}\rho\right)\right]\sin\left(m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \\ H_{1\varphi} &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} + \mathrm{i}\omega\varepsilon_1\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right) \\ &= \frac{1}{k_{1\rho}^2}\left[\frac{\mathrm{i}k_z m}{\rho}BJ_m\left(k_\rho\rho\right) + \mathrm{i}\omega\varepsilon_1 k_{1\rho}AJ_m'\left(k_{1\rho}\rho\right)\right]\cos\left(m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \end{aligned}\right\} \tag{4-156}$$

这里没有写出 E_ρ, H_ρ 分量. 在 $\rho > a$ 区域为

$$\left.\begin{aligned} E_{1\varphi} &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \mathrm{i}\omega\mu_1\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right) \\ &= \frac{-1}{\alpha_{1\rho}^2}\left[-\frac{\mathrm{i}k_z m}{\rho}CH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{1\rho}\rho\right) + \omega\mu_1\alpha_{1\rho}DH_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{1\rho}\rho\right)\right]\sin\left(m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \\ H_{1\varphi} &= \left(\frac{1}{\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - k_z^2}\right)\left(\mathrm{i}k_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} + \mathrm{i}\omega\varepsilon_1\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right) \\ &= \frac{-1}{\alpha_{1\rho}^2}\left[\frac{\mathrm{i}k_z m}{\rho}DH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{1\rho}\rho\right) - \omega\varepsilon_1\alpha_{1\rho}CH_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{1\rho}\rho\right)\right]\cos\left(m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \end{aligned}\right\} \tag{4-157}$$

在 $\rho = a$ 处电场和磁场切向为连续的边界条件为

$$E_{1z}\big|_{\rho=a} = E_{2z}\big|_{\rho=a},\ H_{1z}\big|_{\rho=a} = H_{2z}\big|_{\rho=a}$$

$$E_{1\varphi}\big|_{\rho=a} = E_{2\varphi}\big|_{\rho=a},\ H_{1\varphi}\big|_{\rho=a} = H_{2\varphi}\big|_{\rho=a}$$

给出以下关于系数 A, B, C, D 的联立方程：

$$\left.\begin{aligned}
&AJ_m\left(k_{1\rho}a\right)=CH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\\
&BJ_m\left(k_{1\rho}a\right)=DH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\\
&A\frac{mk_z}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}J_m\left(k_{1\rho}a\right)+B\frac{\omega\mu}{k_{1\rho}^a}J_m'\left(k_{1\rho}a\right)\\
&=-C\frac{k_zm}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)-D\frac{\mathrm{i}\omega\mu_2}{\alpha_{1\rho}^a}H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\\
&A\frac{\omega\varepsilon_1}{k_{1\rho}a}J_m'\left(k_{1\rho}a\right)+B\frac{mk_z}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}J_m\left(k_{1\rho}a\right)\\
&=-C\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}{\alpha_{2\rho}a}H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)-D\frac{mk_z}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)
\end{aligned}\right\}\tag{4-158}$$

以上方程的解给出介质圆波导的导行条件. 下面分为 $m=0$ 和 $m\geqslant 1$ 两种情形讨论.

4.7.2　$m=0$ 轴对称模：TM_{0n} 和 TE_{0n} 模

若 $m=0$, 表示场沿 φ 方向没有变化, 为轴对称情形. 这时介质圆柱内外场的纵向分量 (4-151) 和式 (4-153) 变为

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
&E_{1z}=AJ_0(k_{1\rho}\rho)\exp(\mathrm{i}k_zz)\\
&H_{1z}=0
\end{aligned}\right.\qquad(\rho<a)\\
&\left\{\begin{aligned}
&E_{2z}=CH_0^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}\rho)\exp(\mathrm{i}k_zz)\\
&H_{2z}=0
\end{aligned}\right.\qquad(\rho>a)
\end{aligned}\tag{4-159}$$

式中, 磁场纵向分量为零, 所以这是对于 z 的 TM 波. 场的横向分量如式 (4-156)、式 (4-157). 当 $m=0$, 边界条件式 (4-158) 变为

$$\left.\begin{aligned}
&AJ_0(k_{1\rho}a)=CH_0^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a)\\
&Ap_{10}^{\mathrm{TM}}J_0'(k_{1\rho}a)=CH_0^{(1)'}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a),\quad p_{21}^{\mathrm{TM}}=\frac{\mathrm{i}\varepsilon_1\alpha_{2\rho}}{\varepsilon_2k_{1\rho}}
\end{aligned}\right\}\tag{4-160}$$

欲使式 (4-160) 中 A 和 C 有非零解的条件是其系数行列式等于零,

$$\begin{vmatrix}
J_0(k_{1\rho}a) & -H_0^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a)\\
p_{21}^{\mathrm{TM}}J_0'\left(k_{1\rho}a\right) & -H_0^{(1)'}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a)
\end{vmatrix}=0$$

即

$$\frac{J_0\left(k_{1\rho}a\right)}{J_0'\left(k_{1\rho}a\right)}=p_{21}^{\mathrm{TM}}\frac{H_0^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_0^{(1)'}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a)}\tag{4-161}$$

式 (4-161) 称为导行条件. 以上导行条件和色散关系式 (4-155) 联立便可解得 $k_\rho, \alpha_{1\rho}$, 进而确定传播常数 k_z. 当 $\alpha_{1\rho}$ 变成虚数时出现截止, 这时 Hankel 函数宗量为实数, 圆柱外区域的场成为沿径向的辐射场. 这一截止准则和平板介质波导相同. 在截止附近, $\alpha_{1\rho} \to 0, k_z \to k_1$ 以及 $k_\rho \to \omega\sqrt{\mu\varepsilon - \mu_1\varepsilon_1}$. 下面讨论截止波数如何确定.

根据 Hankel 函数在 $\alpha_{1\rho} \to 0$ 时的渐近式, 式 (4-161) 右端的比值为

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{H_0^{(1)}(\xi)}{H_0^{(1)\prime}(\xi)} = \lim_{\xi\to 0} \frac{H_0^{(1)}(\xi)}{-H_1^{(1)}(\xi)} = \lim_{\xi\to 0} \frac{\mathrm{i}\dfrac{2}{\pi}\ln\xi}{\mathrm{i}\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{\xi}\right)} \to 0 \tag{4-162}$$

式中, 记 $\xi = \mathrm{i}\alpha_{2\rho}a$. 此外, 当 $\alpha_{2\rho} \to 0$ 时, 式 (4-160) 和式 (4-161) 中 $p_{21}^{\mathrm{TM}} \to 0$. 因此, TM_{0p} 模的导行条件 (4-161) 变为

$$J_0(k_{1\rho}a) = 0 \tag{4-163}$$

记 ξ_{0p} 为 0 阶 Bessel 函数的第 n 个零点, 即 $J_0(\xi_{0n}) = 0$, 即 $k_{1\rho}a = \xi_{0n}$. 于是式 (4-161) 和色散关系 (4-155) 给出 TM_{0n} 模的截止频率为

$$\omega_{\mathrm{c},0n} = \frac{\xi_{0n}}{a\sqrt{\mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2}} \tag{4-164}$$

或截止波数为

$$k_{\mathrm{c},0n} = \omega_{\mathrm{c},0n}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\xi_{0n}}{a\sqrt{\dfrac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_0\varepsilon_0} - \dfrac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_0\varepsilon_0}}} \tag{4-165}$$

实际光纤的芯区和外部包层介质均为非磁性介质, 即 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. 另外, 芯区和包层区中介质的折射率分别为 $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}, n_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_0}$. 以上二式改写为

$$\omega_{\mathrm{c},0n} = \frac{\xi_{0n}}{a\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$k_{\mathrm{c},0n} = \omega_{\mathrm{c},0n}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\xi_{0n}}{a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

由于式 (4-151) 和式 (4-153) 中关于 φ 的函数也可以将 cos 与 sin 交换位置, 即

$$\begin{aligned}
E_{1z} &= AJ_m(k_{1\rho}\rho)\sin(m\varphi)\exp(\mathrm{i}k_z z) \\
H_{1z} &= BJ_m(k_{1\rho}\rho)\cos(m\varphi)\exp(\mathrm{i}k_z z) \\
E_{2z} &= CH_m^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}\rho)\sin(m\varphi)\exp(\mathrm{i}k_z z) \\
H_{2z} &= DH_m^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}\rho)\cos(m\varphi)\exp(\mathrm{i}k_z z)
\end{aligned}$$

因此, 在 $m=0$ 时也有对于 z 轴的 TE 波, 其纵向分量为

$$\left\{\begin{aligned} &E_{1z}=0\\ &H_{1z}=BJ_0(k_{1\rho}\rho)\exp(\mathrm{i}k_z z)\end{aligned}\right.\quad(\rho<a)$$
$$\left\{\begin{aligned} &E_{2z}=0\\ &H_{2z}=DH_0^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}\rho)\exp(\mathrm{i}k_z z)\end{aligned}\right.\quad(\rho>a) \tag{4-166}$$

这是对于 z 轴的 TE 波, 场的横向分量如式 (4-156)、式 (4-157) 所示. 对于 $m=0$ 时的 TE 波, 边界条件 (4-158) 变为

$$\left.\begin{aligned} &BJ_0\left(k_{1\rho}a\right)=DH_0^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\\ &Bp_{21}^{\mathrm{TE}}J_0'(k_{1\rho}a)=DH_0^{(1)'}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a),\quad p_{21}^{\mathrm{TE}}=\frac{\mathrm{i}\mu_1\alpha_{2\rho}}{\mu_2 k_{1\rho}}\end{aligned}\right\} \tag{4-167}$$

欲使式 (4-167) 中 B 和 D 有非零解的条件是其系数行列式等于零, 即得

$$\frac{J_0(k_{1\rho}a)}{J_0'(k_{1\rho}a)}=p_{21}^{\mathrm{TE}}\frac{H_0^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_0^{(1)'}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a)} \tag{4-168}$$

式 (4-168) 和式 (4-161) 形式相同, 只是 p_{21}^{TE} 代替 p_{21}^{TM}. 式 (4-168) 称为 TE_{0n} 模的导行条件. 导行条件和色散关系 (4-155) 联立便可解得 $k_{1\rho},\alpha_{2\rho}$, 进而确定传播常数 k_z. 由 $\alpha_{2\rho}=0$ 得到 TE_{0n} 模的截止频率公式和式 (4-164) 相同.

4.7.3　混合模的导行条件

若 $m\geqslant 1$, 这时 E_z,H_z 均不为零, 称为混合模. 在由边界条件 (4-158) 导出导行条件时, 为了方便, 先将式 (4-158) 第一、二式的 A 和 B 代入第三、四式, 得到系数 C 和 D 的联立方程 (张善杰, 2009: 198),

$$\begin{aligned}
&\frac{mk_z}{\left(k_{1\rho}^a\right)^2}CH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)+\frac{\omega\mu_1}{k_{1\rho}^a}DH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}\\
=&-C\frac{mk_z}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)-D\frac{\mathrm{i}\omega\mu_2}{\alpha_{2\rho}a}H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\\
&\times\frac{\omega\varepsilon_1}{k_{1\rho}a}CH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{mk_z}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}DH_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\\
=&-C\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}{\alpha_{2\rho}a}H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)-D\frac{mk_z}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}H_m^{(1)}(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a)
\end{aligned}$$

整理后得到

$$
\begin{aligned}
&H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\left\{C\left[\frac{1}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}+\frac{1}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}\right]mk_z\right.\\
&\left.+D\left[\frac{\omega\mu_1}{k_{1\rho}a}\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{\mathrm{i}\omega\mu_2}{\alpha_{2\rho}a}\frac{H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}\right]\right\}=0\\
&H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)\left\{C\left[\frac{\omega\varepsilon_1}{k_{1\rho}a}\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}{\alpha_{2\rho}a}\frac{H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}\right]\right.\\
&\left.+D\left[\frac{1}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}+\frac{1}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}\right]mk_z\right\}=0
\end{aligned}
$$

上式具有非零解的条件是其系数行列式等于零, 即

$$
\begin{aligned}
H_m^{(1)2}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)&\left\{\left[\frac{1}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}+\frac{1}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}\right]^2\left(mk_z\right)^2\right.\\
&-\left[\frac{\omega\mu_1}{k_{1\rho}a}\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{\mathrm{i}\omega\mu_2}{\alpha_{2\rho}a}\frac{H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}\right]\\
&\left.\times\left[\frac{\omega\varepsilon_1}{k_{1\rho}a}\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}{\alpha_{2\rho}a}\frac{H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}\right]\right\}=0
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{\left(k_{1\rho}a\right)^2}+\frac{1}{\left(\alpha_{2\rho}a\right)^2}\right\}^2\left(mk_z\right)^2-\left\{\frac{\omega\mu_1}{k_{1\rho}a}\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{\mathrm{i}\omega\mu_2}{\alpha_{2\rho}a}\frac{H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}\right\}\\
&\times\left\{\frac{\omega\varepsilon_1}{k_{1\rho}a}\frac{J_m'\left(k_{1\rho}a\right)}{J_m\left(k_{1\rho}a\right)}+\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}{\alpha_{2\rho}a}\frac{H_m^{(1)'}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}{H_m^{(1)}\left(\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a\right)}\right\}\\
=&0
\end{aligned}
\tag{4-169}
$$

实际光纤的芯区和外部包层介质均为非磁性介质, 即 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$, 另外, 芯区和包层区中介质的折射率分别为 $n_1=\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}, n_2=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_0}$. 为了推导中书写简便, 采用以下符号:

$$
u=k_{1\rho}a,\quad w=\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a,\quad b=\frac{k_z}{k_0},\quad k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \tag{4-170}
$$

于是, 式 (4-169) 改写为

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)^2(mb)^2k_0^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left[\frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)}-\frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)}\right]\\
&\times\left[\frac{n_1^2}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)}-\frac{n_2^2}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)}\right]=0
\end{aligned}
$$

即

$$\left[\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right]^2(mb)^2-\left[\frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)}-\frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)}\right]$$
$$\times\left[\frac{n_1^2}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)}-\frac{n_2^2}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)}\right]=0 \tag{4-171}$$

又由式 (4-170) 得到

$$u=k_{1\rho}a=a\sqrt{k_1^2-k_z^2}=k_0a\sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2}-\frac{k_z^2}{k_0^2}}=k_0a\sqrt{n_1^2-b^2}$$

$$w=\mathrm{i}\alpha_{2\rho}a=a\sqrt{k_2^2-k_z^2}=k_0a\sqrt{\frac{k_2^2}{k_0^2}-\frac{k_z^2}{k_0^2}}=k_0a\sqrt{n_2^2-b^2}$$

所以,

$$\frac{u^2}{w^2}=\frac{n_1^2-b^2}{n_2^2-b^2}$$

即

$$u^2\left(n_2^2-b^2\right)=w^2\left(n_1^2-b^2\right)$$

$$b^2=\frac{u^2n_2^2-w^2n_1^2}{u^2-w^2}$$

$$b^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)=\frac{u^2n_2^2-w^2n_1^2}{u^2-w^2}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$
$$=-\frac{u^2n_2^2-w^2n_1^2}{u^2-w^2}\cdot\frac{u^2-w^2}{u^2w^2}=\frac{n_1^2}{u^2}-\frac{n_2^2}{w^2}$$

此外, 令式 (4-171) 中

$$p=\frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)},\quad q=\frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)} \tag{4-172}$$

于是, 式 (4-171) 改写为

$$(p-q)\left(n_1^2p-n_2^2q\right)=m^2\left(\frac{n_1^2}{u^2}-\frac{n_2^2}{w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$

整理后得

$$(p-q)\left(p-\frac{n_2^2}{n_1^2}q\right)=m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$

上式括号展开后得

$$p^2 - pq\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right) - m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2 w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right) + \frac{n_2^2}{n_1^2}q^2 = 0 \tag{4-173}$$

这是一个关于 p 的二次代数方程. 它的两个解为

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)q \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 + 4m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2 w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right) - 4\frac{n_2^2}{n_1^2}q^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)q \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 q^2 + 4m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2 w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)} \end{aligned} \tag{4-174}$$

式 (4-174) 是关联 p 和 q 的方程 (导行条件), 结合色散关系式 (4-155) 便可以解得 $k_{1\rho}, \alpha_{2\rho}$ 和 k_z. 式 (4-174) 中取 + 为 EH_{mn} 模, 取 − 为 HE_{mn} 模. 下面分别讨论这两种模式的截止频率和截止波数.

4.7.4 混合模 $\mathbf{EH}_{mn}$ 的截止频率

作为介质圆柱波导的光纤示意如图 4-24 所示, 通常芯区折射率 n_1 比包层区折射率 n_2 大 2%~4%. 这时有以下近似:

$$\begin{aligned} \varDelta \equiv \frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{n_2}{n_1}\right)\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right) \\ &\approx 1-\frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \tag{4-175}$$

称为弱导条件. 一般通信用多模光纤 $\varDelta \approx 0.01 \sim 0.02$, 单模光纤 $\varDelta \approx 0.003 \sim 0.01$. 例如, 芯区和包层区介质折射率分别为 $n_1 = 1.53, n_2 = 1.51$.

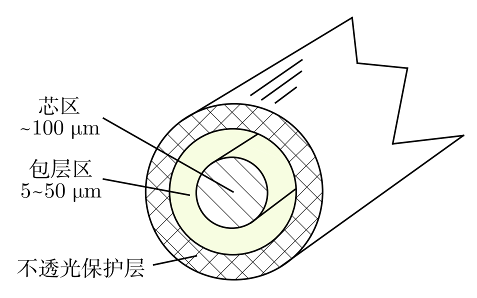


图 4-24 光纤结构示意图

设式 (4-173) 中 $m \geqslant 1$, 对于 EH_{mn} 模, 即式 (4-174) 取 + 有

$$p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)q + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 q^2 + 4m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2 w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)} \tag{4-176}$$

满足弱导条件 (4-175) 时, 零级近似可设 $n_2^2/n_1^2 \approx 1$, 式 (4-176) 化简为

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)q + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 q^2 + 4m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2 w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)} \\ &\approx q + m\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right) \end{aligned} \tag{4-177}$$

将式 (4-172) 代入式 (4-177) 得

$$\frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)} + m\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{w^2}\right) \tag{4-178}$$

由 Bessel 函数递推公式,

$$J_m'(\xi) = \frac{m}{\xi}J_m(\xi) - J_{m+1}(\xi), \quad H_m^{(1)'}(\xi) = \frac{m}{\xi}H_m^{(1)}(\xi) - H_{m+1}^{(1)}(\xi)$$

可得

$$p = \frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{u}\frac{\frac{m}{u}J_m(u) - J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = \frac{m}{u^2} - \frac{1}{u}\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)}$$

$$q = \frac{1}{2}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)} = \frac{m}{w^2} - \frac{1}{w}\frac{H_{m+1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)}$$

上式代入式 (4-177) 得到

$$\frac{m}{u^2} - \frac{1}{u}\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = \frac{m}{w^2} - \frac{1}{w}\frac{H_{m+1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)} + m\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

即

$$\frac{1}{u}\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{w}\frac{H_{m+1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)} \tag{4-179}$$

EH_{mn} 模截止时 $w = \mathrm{i}\alpha_{2\rho}a = 0$, 利用 Hankel 函数的小宗量近似,

$$H_m^{(1)}(w) \simeq -\mathrm{i}\frac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\frac{2}{w}\right)^m = -\mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{w}\right)^m$$

$$\frac{H_{m+1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)} \simeq \frac{-\mathrm{i}\frac{m!}{\pi}\left(\frac{2}{w}\right)^{m+1}}{-\mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{w}\right)^m} = \frac{2m}{w}$$

上式代入式 (4-179) 得

$$\frac{1}{u}\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = \frac{2m}{w^2} \to \infty \quad \text{或} \quad \frac{uJ_m(u)}{J_{m+1}(u)} = 0 \tag{4-180}$$

注意：根据 Bessel 函数小宗量近似,

$$J_m(\xi) \simeq \frac{(\xi/2)^m}{\Gamma(m+1)} = \frac{(\xi/2)^m}{m!}$$

代入式 (4-180) 左端可得

$$\left.\frac{uJ_m(u)}{J_{m+1}(u)}\right|_{u\to 0} = \frac{u\cdot\dfrac{(u/2)^2}{m!}}{\dfrac{(u/2)^{m+1}}{(m+1)!}} = 2(m+1)\neq 0,\quad m\geqslant 1$$

所以 $u=0$ 不是式 (4-180) 的解. 于是, 式 (4-180) 可改写为

$$J_m(u)=0,\quad u\neq 0 \tag{4-181}$$

记 ξ_{mn} 为 $J_m(\xi)=0$ 的第 n 个根, 即 $J_m(\xi_{mn})=0$, 则

$$u_{mn}=k_{1\rho}a=a\sqrt{k_1^2-k_z^2}=\xi_{mn},\quad \text{不含 } u=0$$

代入色散关系式 (4-155), $k_{1\rho}^2+\alpha_{2\rho}^2=k_1^2-k_2^2=\omega^2(\mu_1\varepsilon_1-\mu_2\varepsilon_2)=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(n_1^2-n_2^2\right)$, 得到 EH_{mn} 模截止频率与截止波数,

$$\left(\frac{\xi_{mn}}{a}\right)^2=(\omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{EH}})^2\mu_0\varepsilon_0\left(n_1^2-n_2^2\right)=(k_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{EH}})^2\left(n_1^2-n_2^2\right)$$

即

$$\begin{cases}\omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{EH}}=\dfrac{\xi_{mn}}{a\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}}\\ k_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{EH}}=\dfrac{\xi_{mn}}{a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}\end{cases}\quad (\text{不含 } \xi_{mn}=0) \tag{4-182}$$

式 (4-182) 即为弱导条件零级近似下 $m\geqslant 1$ 时 EH_{mn} 模的截止频率和截止波数公式.

当 $m=1$, 式 (4-181) 仍适用, 即 EH_{1n} 模的截止频率和截止波长仍由式 (4-181) $J_1(u)=0$ (不含 $u=0$) 确定. 如前所述, 虽然 $J_1(u)\big|_{u\to 0}=0$, 但 EH_{1n} 模的截止频率不含 $u=0$.

4.7.5 混合模 HE_{mn} 的截止频率

设 $m\geqslant 1$, 考虑 HE_{mn} 模, 式 (4-174) 取负号得

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)q-\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2q^2+4m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)} \tag{4-183}$$

式中,

$$p=\frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)},\quad q=\frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)}$$

弱导条件下零级近似可设 $n_2^2/n_1^2 \approx 1$, 式 (4-183) 化简为

$$p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)q - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 q^2 + 4m^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{n_2^2}{n_1^2 w^2}\right)\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)}$$
$$\approx q - m\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$

将如式 (4-172) 所示 p, q 代入上式得

$$\frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)} - m\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right) \tag{4-184}$$

由 Bessel 函数递推公式,

$$J_m'(\xi) = J_{m-1}(\xi) - \frac{m}{\xi}J_m(\xi), \quad H_m^{(1)'}(\xi) = H_{m-1}^{(1)}(\xi) - \frac{m}{\xi}H_m^{(1)}(\xi)$$

可得

$$p = \frac{1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{u}\frac{J_{m-1}(u) - \dfrac{m}{u}J_m(u)}{J_m(u)} = -\frac{m}{u^2} + \frac{1}{u}\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)}$$
$$q = \frac{1}{w}\frac{H_m^{(1)'}(w)}{H_m^{(1)}(w)} = -\frac{m}{w^2} + \frac{1}{w}\frac{H_{m-1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)}$$

上式代入式 (4-184) 得

$$-\frac{m}{u^2} + \frac{1}{u}\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -\frac{m}{w^2} + \frac{1}{w}\frac{H_{m-1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)} - m\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$

整理得

$$\frac{1}{u}\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{w}\frac{H_{m-1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)} \tag{4-185}$$

HE_{mn} 模截止时 $w = \mathrm{i}\alpha_{2\rho}a = 0$, 利用 Hankel 函数的小宗量近似,

$$H_m^{(1)}(w) \simeq -\mathrm{i}\frac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\frac{2}{w}\right)^m = -\mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{w}\right)^m$$

$$\frac{H_{m-1}^{(1)}(w)}{H_m^{(1)}(w)} \simeq \frac{-\mathrm{i}\dfrac{(m-2)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{w}\right)^{m-1}}{-\mathrm{i}\dfrac{(m-1)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{w}\right)^m} = \frac{w}{2\,(m-1)}$$

代入式 (4-185) 得

$$\frac{1}{u}\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{2(m-1)} \tag{4-186}$$

下面区分 $m \geqslant 2$ 和 $m = 1$ 两种情形讨论. 若 $m \geqslant 2$, 式 (4-186) 可写为

$$2\,(m-1)\,J_{m-1}(u) = uJ_m(u)$$

或

$$\frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)} = 2\,(m-1) \tag{4-187}$$

注意：根据 Bessel 函数小宗量近似,

$$J_m(\xi) \simeq \frac{(\xi/2)^m}{\Gamma\,(m+1)} = \frac{(\xi/2)^m}{m!}$$

代入式 (4-187) 左端可得

$$\left.\frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)}\right|_{u\to 0} = \frac{u\cdot\dfrac{(u/2)^m}{m!}}{\dfrac{(u/2)^{m-1}}{(m-1)!}} = \frac{u^2}{2m} = 0 \neq 2(m-1), \quad m \geqslant 2$$

所以, 当 $m \geqslant 2$, $u = 0$ 不是式 (4-187) 或式 (4-186) 的解.

根据 Bessel 函数递推公式,

$$\begin{aligned} uJ_{m-1}(\xi) + uJ_{m+1}(\xi) &= 2mJ_m(\xi) \\ uJ_{m-2}(u) + uJ_m(u) &= 2(m-1)J_{m-1}(u) \end{aligned}$$

代入式 (4-187) 得

$$\begin{aligned} &2\,(m-1)\,J_{m-1}(u) = uJ_m(u) \\ &uJ_{m-2}(u) + uJ_m(u) = uJ_m(u) \\ &uJ_{m-2}(u) = 0 \end{aligned}$$

由于 $u = 0$ 不是式 (4-187) 或式 (4-186) 的解, 上式可写为

$$J_{m-2}(u) = 0, \quad u \neq 0 \tag{4-188}$$

记 $\xi_{(m-2)n}$ 为 $J_{m-2}(\xi) = 0$ 的第 n 个根 (不含 $u = 0$), 即 $J_{m-2}[\xi_{(m-2)n}] = 0$, 则

$$u_{mn} = k_{1\rho}a = a\sqrt{k_1^2 - k_z^2} = \xi_{(m-2)n}$$

代入色散关系 (4-155), $k_{1\rho}^2 + \alpha_{2\rho}^2 = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(n_1^2 - n_2^2\right)$, 可得 HE_{mn} 模 $(m \geqslant 2)$ 的截止频率与截止波数,

$$\left[\frac{\xi_{(m-2)n}}{a}\right]^2 = (\omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{HE}})^2\mu_0\varepsilon_0(n_1^2 - n_2^2) = (k_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{HE}})^2(n_1^2 - n_2^2)$$

即

$$\begin{cases} \omega_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{HE}} = \dfrac{\xi_{(m-2)n}/a}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_1 - \mu_0\varepsilon_2}} = \dfrac{\xi_{(m-2)n}}{a\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \\ k_{\mathrm{c},mn}^{\mathrm{HE}} = \dfrac{\xi_{(m-2)n}}{a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \end{cases} \quad (\text{不含 } \xi_{mn} = 0) \tag{4-189}$$

式 (4-189) 即为弱导条件零级近似下 $m \geqslant 2$ 时 HE_{mn} 模的截止频率或截止波长公式. 关于一级近似的分析参见张善杰 (2009: 203).

若 $m = 1$, 式 (4-186) 改写为

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} = 0 \tag{4-190}$$

注意：根据 Bessel 函数小宗量近似,

$$J_0(\xi)\big|_{\xi\to 0} = 1, \quad J_1(\xi) \simeq \frac{\xi}{2}$$

代入上式左端可得

$$\left.\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)}\right|_{u\to 0} = \frac{u \cdot \dfrac{u}{2}}{1} = 0$$

亦即 $u = 0$ 可以作为式 (4-190) 的解. 所以, 式 (4-186) 可改写为

$$uJ_1(u) = 0 \quad \text{或} \quad J_1(u) = 0, \quad \text{含 } u = 0 \tag{4-191}$$

注意, $J_1(u)\Big|_{u\to 0} = 0$. 记 ξ_{1n} 为 $J_1(\xi) = 0$ 的第 n 个根 (包含 $\xi = 0$), 即, $J_1(\xi_{1n}) = 0$, 则

$$u_{1n} = k_{1\rho}a = a\sqrt{k_1^2 - k_z^2} = \xi_{1n}, \quad \text{含 } \xi_{1n} = 0$$

代入色散关系 (4-155), $k_{1\rho}^2 + \alpha_{2\rho}^2 = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = k_0^2\left(n_1^2 - n_2^2\right)$, 可得 HE_{1n} 模截止频率与截止波数,

$$\left(\frac{\xi_{1n}}{a}\right)^2 = \omega_{\mathrm{c},1n}^{\mathrm{HE}2}\mu_0\varepsilon_0\left(n_1^2 - n_2^2\right) = k_{\mathrm{c},1n}^{\mathrm{HE}2}\left(n_1^2 - n_2^2\right)$$

即

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\mathrm{c},1n}^{\mathrm{HE}} &= \frac{\xi_{1n}/a}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_1 - \mu_0\varepsilon_2}} = \frac{\xi_{1n}}{a\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \\ k_{\mathrm{c},1n}^{\mathrm{HE}} &= \frac{\xi_{1n}}{a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4-192}$$

特别, 当 $n=1$, 包含 $u=0$ 在内的第一个根为 $\xi_{11}=0$. 因而, $\omega_{c,11}^{HE}=0, k_{c,11}^{HE}=0$, 即 HE_{11} 模截止频率和截止波数等于零. 所以, HE_{11} 模是介质圆波导 (光纤) 的主模.

作为电磁波的光波通常用其真空中的波长, 而不是频率来表示. 导行模的截止波长为

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_c}$$

所以, 主模 HE_{11} 的截止波长为 ∞. 其他模次为高阶模. TE_{01} 和 TM_{01} 是最低的高阶模, 二者有相同的截止波长为

$$\lambda_{c,10}=\frac{2\pi}{k_{c,10}}=\frac{2\pi a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{\xi_{01}}=\frac{2\pi a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{2.405}$$

所谓单模光纤是指光纤中仅有单一主模传播, 对于给定折射率的光纤, 工作波长应满足条件 $\lambda>\lambda_{c,10}$.

根据以上分析, 介质圆波导中确定导行波截止频率的方程可归纳如表 4-5 所示, 表中 $u=k_{1\rho}a$. 除轴对称 TE_{10} 和 TM_{10} 外, 其他截止条件均为弱导近似下所得公式.

表 4-5　介质圆波导各阶导行模的截止条件

导行模	截止条件	说明
TE_{10} 和 TM_{10}	$J_0(u)=0$	
HE_{1n}	$J_1(u)=0$(含 $u=0$)	$n=1$ 对应的根为 $u=0$, HE_{11} 的截止频率为零, 为主模. $n=2$ 对应的根为 $u=3.832$
EH_{1n}	$J_1(u)=0$(不含 $u=0$)	$n=1$ 对应的根为 $u=3.832$
$HE_{mn}(m\geqslant 2)$	$J_{m-2}(u)=0$ (不含 $u=0$)	当 $m=2$, HE_{2n} 截止条件为 $J_0(u)=0$
EH_{mn}	$J_m(u)=0$ (不含 $u=0$)	当 $m=1$, EH_{1n} 截止条件为 $J_1(u)=0$ (不含 $u=0$)

由表可见, 各导行模虽然导行条件不同, 但可能具有相同的截止条件. 因而彼此有相同的截止频率. 当两种模式具有相同截止频率, 称这两种模式在截止附近是简并的. 当工作频率高于截止频率时, 二者的传播常数并不相同, 不再是简并情况. 根据弱导近似下所得截止条件, 存在有以下几种截止频率相同的简并情形:

(1) TE_{10} 和 TM_{10} 模有相同的截止条件 $J_0(u)=0$, 截止附近为简并.

(2) 由于 HE_{1n} 的截止条件 $J_1(u)=0$ 中包含 $u=0$ 的主模 HE_{11}, 当 $n\geqslant 2$ 时 HE_{1n} 和 $EH_{1(n-1)}$ 模具有相同截止频率, 截止附近为简并.

(3) HE_{2n} 和 TE_{10} 及 TM_{10} 模都具有相同截止条件 $J_0(u)=0$, 截止附近为简并.

(4) $m \geqslant 3$ 时 EH_{mn} 和 $\mathrm{HE}_{(m-2)n}$ 具有相同截止频率, 截止附近为简并.

圆介质波导中几种低阶传播模在圆柱内的场分布见图 4-25. 实际上, 圆柱外部也有场, 但是沿半径呈指数很快衰减.

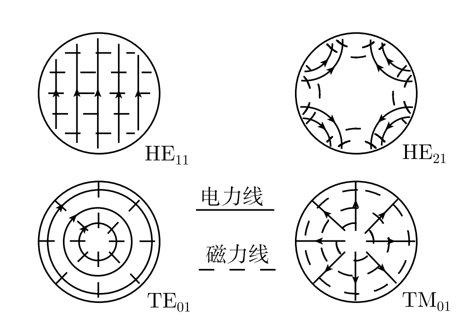


图 4-25　介质圆波导中几种低阶导行模的场分布

4.8 谐　振　腔

4.8.1 矩形腔

如图 4-26 所示矩形腔可看作矩形波导两端封闭构成. 沿 z 方向行波在两端理想导体壁处反射而形成驻波. 对于 z 的 TM 波, Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

满足边界条件的解为

$$\left.\begin{aligned}
&H_z = 0\\
&E_z = E_{mnp} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{d}\\
&E_x = \frac{-E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{d} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\\
&E_y = \frac{-E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{d} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\\
&H_x = \frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\\
&H_y = \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-193}$$

式中, m 和 $n=1,2,\cdots;p=0,1,2,\cdots$, 色散关系为

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon \quad (4\text{-}194)$$

所以谐振频率为

$$\omega_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{c}\right)^2} \quad (4\text{-}195)$$

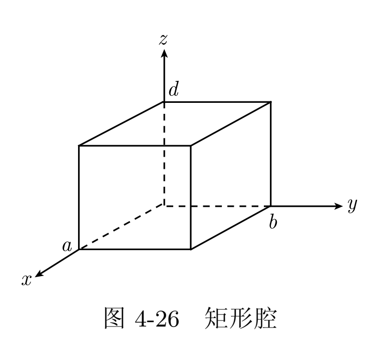


图 4-26 矩形腔

对于 z 的 TE 模, 满足边界条件的解为

$$\left.\begin{aligned}
&E_z=0\\
&H_z=H_{mnp}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}\\
&H_x=\frac{-H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{m\pi}{a}\frac{p\pi}{d}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\\
&H_y=\frac{-H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{n\pi}{b}\frac{p\pi}{d}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\\
&E_x=\frac{-\mathrm{i}\omega\mu H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\\
&E_y=\frac{\mathrm{i}\omega\mu H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}196)$$

式中, $p=1,2,\cdots;m,n=0,1,2,\cdots$, 但 m 和 n 二者不可同时等于零. TE 模和 TM 模的色散关系及谐振频率公式相同.

4.8.2 最低谐振频率

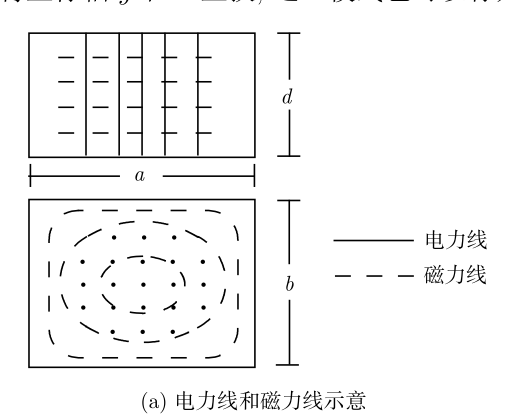
设矩形腔尺寸为 $a>b>d$, 则当 $m=1$, $n=1$, $p=0$ 时为腔体的最低谐振频率,

$$\omega_{110}^{\mathrm{TM}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad (4\text{-}197)$$

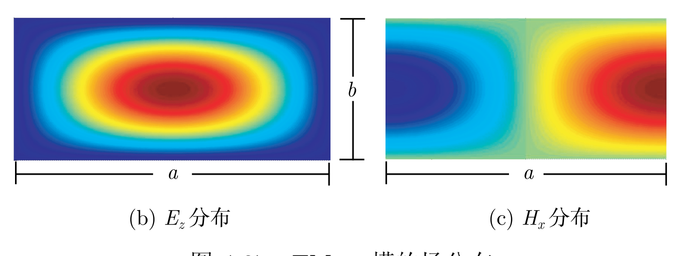
相应模式为 TM_{110}, 式 (4-193) 变为

$$\left.\begin{aligned}
H_z &= 0 \\
E_z &= E_{110}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\
E_x &= 0 \\
E_y &= 0 \\
H_x &= \frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_{110}}{(\pi/a)^2+(\pi/b)^2}\frac{\pi}{b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\
H_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon E_{110}}{(\pi/a)^2+(\pi/b)^2}\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{4-198}$$

场分布见图 4-27. 如果将坐标轴 y 和 z 互换, 这一模式也可以称为 TE_{101} 模.



(a) 电力线和磁力线示意



(b) E_z 分布　　(c) H_x 分布

图 4-27　TM_{110} 模的场分布

4.8.3　谐振腔的品质因数

谐振腔的品质因数 Q 代表腔的存储能量与损耗能量之比. 腔的损耗来源于腔壁为非理想导体和腔内介质的损耗. 设无耗谐振腔的谐振频率为 ω, 腔中的场为

$$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\propto\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

有耗谐振腔的频率 ω 变为复数, 记 $\omega=\omega_0-\mathrm{i}\alpha$, 这时腔中的场为

$$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\propto\exp(-\mathrm{i}\omega t)=\exp(-\alpha t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{4-199}$$

表示腔内场随时间 t 呈指数衰减, α 为衰减常数. 腔内电磁场平均总能量为

$$U\propto\exp(-2\alpha t)=U_0\exp(-2\alpha t) \tag{4-200}$$

所以腔的平均损耗功率为

$$P_\mathrm{d}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=2\alpha U \tag{4-201}$$

定义腔的品质因数 Q 为

$$Q=\frac{\omega_0 U}{P_\mathrm{d}}=\frac{2\pi U}{TP_\mathrm{d}}=2\pi\frac{\text{腔内场平均总能量}}{\text{一个周期中损耗能量}} \tag{4-202}$$

式 (4-201) 代入式 (4-202) 得式 (4-203)

$$Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\alpha} \tag{4-203}$$

式 (4-203) 为 Q 值与衰减常数的关系.

式 (4-203) 代入式 (4-200) 得平均总能量,

$$U=U_0\exp\left(-2\pi\frac{t}{QT}\right)$$

当 $t=QT$ 时, $U=U_0\exp(-2\pi)=(1.9\times10^{-3})U_0$, 即经过 Q 个周期, 腔内能量衰减到初始值的约千分之一; 显然 Q 值越大, 衰减越慢.

函数的 Fourier 变换定义为

$$\left.\begin{aligned}E(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega\\ E(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}E(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{4-204}$$

式中, $E(\omega)$ 是时域波形所对应的频谱特性. 对如式 (4-199) 所示有耗腔体中场的指数衰减振荡作 Fourier 变换得到其频域特性. 重写式 (4-199) (Jackson, 1999: 372),

$$E(t)=E_0W(t)\exp(-\alpha t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{4-205}$$

式中, 引入时域阶跃函数,

$$W(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases} \tag{4-206}$$

式 (4-205) 代入式 (4-206) 并根据 Fourier 变换数学表可得

$$\begin{aligned} E(\omega) &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} W(t) \exp(-\alpha t) \exp\left[\mathrm{i}(\omega - \omega_0)t\right] \mathrm{d}t \\ &= E_0 \frac{1}{\alpha - \mathrm{i}(\omega - \omega_0)} \end{aligned} \tag{4-207}$$

由式 (4-203) 有 $\alpha = \omega_0/(2Q)$, 代入式 (4-207) 得

$$\left|\frac{E(\omega)}{E_0}\right|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \frac{1}{[\omega_0/(2Q)]^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{4-208}$$

式 (4-208) 即为有耗腔体的谐振曲线, 如图 4-28 所示. 谐振峰值在 $\omega = \omega_0$, 谐振曲线半宽度定义为峰值下降到二分之一时的带宽, 记为 $\Delta\omega$. 由式 (4-208) 可得 $\Delta\omega = \omega_0/Q$. 带宽和 Q 值成反比. 当腔体损耗增大, Q 值减小, 带宽变大. 实际上 Q 值的变化还会使得腔体谐振频率 ω_0 发生变化.

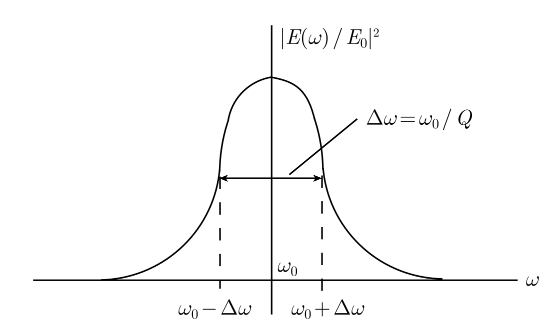


图 4-28　有耗腔体的频域谐振曲线

4.8.4　用微扰法计算腔的品质因数：矩形腔

谐振腔 Q 值可以用微扰法估算, 计算步骤如下：

(1) 利用理想导体壁情形下腔的场分布计算腔内总能量 U 和谐振频率 ω_0;

(2) 用上述场分布结合阻抗边界条件计算非理想导体壁的损耗 P_{d};

(3) 代入式 (4-202) 求 Q.

以矩形腔为例, 考虑 TM_{110}(或 TE_{101}) 模的 Q 值. 谐振频率 $\omega_0^{\mathrm{TM}_{110}}$ 见式 (4-197), 腔为平均总能量为

$$U = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iiint\limits_V \left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\right)\mathrm{d}V\right\}$$

将 TM_{110} 场分布 (4-198) 式代入上式并完成积分运算得到

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^d \mathrm{d}z\frac{\varepsilon}{2}|\boldsymbol{E}|^2+\frac{\mu}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^d \mathrm{d}z\left[\frac{\varepsilon}{2}|E_z|^2+\frac{\mu}{2}(|H_x|^2+|H_y|^2)\right]\right\} \\
&= \varepsilon\frac{abd}{8}|E_{110}|^2
\end{aligned}$$

上式积分中用到

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x = \int_0^a \cos^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x = \frac{a}{2} \\
\int_0^b \sin^2\frac{\pi y}{a}\mathrm{d}y = \int_0^a \cos^2\frac{\pi y}{a}\mathrm{d}y = \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

然后, 用阻抗边界条件估算腔壁单位面积的损耗功率, 总损耗需要对整个腔壁的六个面积分, 将 TM_{110} 场分布 (4-198) 代入计算可得总损耗功率为

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{d} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2\sigma}}\iint_S |H_w|^2\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2\sigma}}\left\{2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\left(|H_x|^2_{z=0}+|H_y|^2_{z=0}\right)\right. \\
&\quad \left.+2\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^a \mathrm{d}x|H_x|^2_{y=0}+2\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^b \mathrm{d}y|H_y|^2_{x=0}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega_0\varepsilon}}\left[\frac{ad}{b^2}+\frac{bd}{a^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]\frac{\pi^2\omega_0^2\varepsilon^2}{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^2}|E_{110}|^2
\end{aligned} \tag{4-209}$$

以上结果代入式 (4-202) 得 TM_{110} 模的 Q 值为

$$Q^{\mathrm{TM}_{110}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega_0\varepsilon}}\frac{\pi d\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{2\left[ab\left(a^2+b^2\right)+2d\left(a^3+b^3\right)\right]} \tag{4-210}$$

如果矩形腔为立方体, 且设 $a=b=d=2\mathrm{cm}$, 按照式 (4-197), 其 TM_{110} 谐振频率为 10GHz. 当腔内介质为空气, 腔壁为铜, 电导率 $\sigma\simeq 58\times 10^6\mathrm{S/m}$, 计算得到 $Q\approx 10^4$. 实际上腔的其他损耗包括腔内介质损耗, 腔壁表面的不规则性, 以及腔与外界的耦合都将使功率损耗 P_d 增大, 因而降低 Q 值.

4.8.5 圆柱腔

设圆柱形谐振腔高为 h, 半径为 a, 如图 4-29 所示. 参照圆柱波导的讨论, 当 $d/a < 2.04$, 腔中基膜为 TM_{010}, 其场分布为

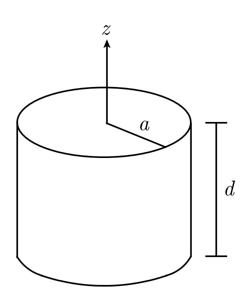


图 4-29 圆柱形谐振腔

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_0 J_0(k\rho) \\ H_\varphi &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 J_1(k\rho) \end{aligned}\right\} \tag{4-211}$$

其他场分量为零. 由边界条件 $E_z|_{\rho=a} = 0$ 得到

$$J_0(ka) = 0 \tag{4-212}$$

式中, Bessel 函数的根见表 4-3, 第一个根为

$$ka = \xi_{01} = 2.405$$

式中, $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, 所以谐振频率为

$$\omega_0^{\mathrm{TM}_{010}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{2.405}{a} \tag{4-213}$$

式 (4-213) 就是圆柱腔基模的谐振频率.

圆柱腔的 Q 值仍用微扰法计算. 注意圆柱腔基膜 TM_{010} 为轴对称场分布, 应用式 (4-211), 腔中存储总能量的平均值为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iiint\limits_V \left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\right)\mathrm{d}V\right\} \\ &= \frac{d}{2}\int_0^a 2\pi\rho d\rho\left[\frac{\varepsilon}{2}|E_z|^2 + \frac{\mu}{2}|H_\varphi|^2\right] \\ &= E_0\frac{\pi\varepsilon d}{2}a^2 J_1^2(ka) \end{aligned} \tag{4-214}$$

计算中用到 Bessel 函数 $B_m(k\rho)$ 积分公式,

$$\int \rho B_m^2(k\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{\rho^2}{2}\left[{B'}_m^2(k\rho) + \left(1 - \frac{m^2}{k^2\rho^2}\right)B_m^2(k\rho)\right] \tag{4-215}$$

以及 $J_0(ka) = 0$. 腔壁总的损耗功率为

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{d}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2\sigma}}\iint\limits_S |H_w|^2\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2\sigma}}\left(2\pi a\int_0^d |H_\varphi|^2_{\rho=a}\mathrm{d}z + 2\int_0^a 2\pi\rho|H_\varphi|^2_{z=0}\mathrm{d}\rho\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2\sigma}}\left[2\pi a\cdot d\frac{\varepsilon}{\mu}J_1^2(ka) + 2\int_0^a 2\pi\rho\frac{\varepsilon}{\mu}J_1^2(k\rho)\mathrm{d}\rho\right]
\end{aligned}
$$

上式方括号中两项分别为腔壁侧面和上、下底面的损耗. 利用 Bessel 函数积分公式 (4-215) 可以求得良导体壁的平均损耗功率为

$$
P_{\mathrm{d}} = \sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2\sigma}}E_0^2\frac{\varepsilon}{\mu}\pi(d+a)J_1^2(ka) \tag{4-216}
$$

以上代入式 (4-202) 得

$$
Q^{\mathrm{TM}_{010}} = \frac{\omega_0 U}{P_{\mathrm{d}}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega_0\varepsilon}}\frac{2.405}{2\left(1+\dfrac{a}{d}\right)} \tag{4-217}
$$

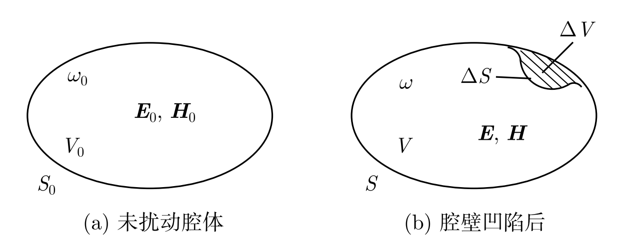
4.9 腔壁形状和腔内介质微扰对谐振频率的影响

当空腔壁的几何形状或腔内介质参数有微小变化时, 腔的谐振频率也会发生改变. 设扰动前腔的谐振频率为 ω_0, 扰动后谐振频率为 ω, 如果腔壁的几何形状或腔内介质参数变化不大, 可以用微扰法来分析谐振频率的变化.

4.9.1 腔壁凹陷时谐振频率的变化

设腔的体积为 V_0, 腔壁向内凹陷后体积变为 V, 凹陷区域体积为 ΔV, 如图 4-30 所示. 设未扰动时腔内场为 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$, 谐振频率为 ω_0, 满足 Maxwell 方程,

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{E}_0 &= \mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}_0 \\
\nabla\times\boldsymbol{H}_0 &= -\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}_0
\end{aligned}\right\} \tag{4-218}
$$



(a) 未扰动腔体　　(b) 腔壁凹陷后

图 4-30 腔壁凹陷

腔壁凹陷后的场为 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, 谐振频率为 ω, 满足 Maxwell 方程,

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\\\nabla\times\boldsymbol{H}&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\tag{4-219}$$

下面考虑腔壁凹陷所导致的频率偏离. 将式 (4-218) 第一式的复数共轭点乘 $\boldsymbol{H}$ 然后减去式 (4-219) 第二式点乘 $\boldsymbol{E}_0^*$, 得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})=-\mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$

上式在区域 $V_0=V+\Delta V$ 积分得

$$\oiint_{S_0}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})=-\mathrm{i}\omega_0\iiint_{V_0}(\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*)\,\mathrm{d}V+\mathrm{i}\omega\iiint_{V_0}(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*)\,\mathrm{d}V$$

式中, S_0 为区域 V_0 的表面. 上式左端 $\oiint_{S_0}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})=\oiint_{S_0}\boldsymbol{H}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}_0^*)=0$, 因为在腔壁表面电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的切向分量等于零. 于是上式变为

$$0=-\mathrm{i}\omega_0\iiint_{V_0}(\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*)\,\mathrm{d}V+\mathrm{i}\omega\iiint_{V_0}(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*)\,\mathrm{d}V\tag{4-220}$$

另外, 将式 (4-219) 第二式点乘 $\boldsymbol{H}_0^*$ 并减去式 (4-218) 第二式的复数共轭点乘 $\boldsymbol{E}$ 得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$

上式在区域 $V_0=V+\Delta V$ 积分得

$$\oiint_{S_0}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)=\mathrm{i}\omega\iiint_{V_0}(\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*)\mathrm{d}V-\mathrm{i}\omega_0\iiint_{V_0}(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*)\,\mathrm{d}V\tag{4-221}$$

式 (4-221) 左端可写为

$$\begin{aligned}\oiint_{S_0}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)&=\oiint_{S}\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)+\oiint_{\Delta S}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)\\&=\oiint_{S}\boldsymbol{H}_0^*\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E})+\oiint_{\Delta S}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)\\&=0+\oiint_{\Delta S}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)\end{aligned}$$

上式中沿表面 S 的积分等于零, 因为扰动后电场 $\boldsymbol{E}$ 在 S 面的切向分量为零. 于是式 (4-221) 变为

$$\oiint_{\Delta S} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) = \mathrm{i}\omega \iiint_{V_0} (\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \,\mathrm{d}V - \mathrm{i}\omega_0 \iiint_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^*) \,\mathrm{d}V \tag{4-222}$$

式 (4-220) 和式 (4-222) 相加得

$$\oiint_{\Delta S} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) = \mathrm{i}\,(\omega - \omega_0) \iiint_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \mathrm{d}V$$

即

$$\omega - \omega_0 = \frac{-\mathrm{i} \oiint_{\Delta S} d\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*)}{\iiint_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \,\mathrm{d}V} \tag{4-223}$$

式 (4-223) 为腔壁凹陷时谐振频率变化的准确公式. 但由于扰动后场分布 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 难于求得, 式 (4-223) 不便于直接用于准确计算.

微扰近似. 设腔壁凹陷足够小, 以致式 (4-223) 右端积分号下的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可以近似用无扰动时的场 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$ 来代替, 即 $\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{H}_0$, 因此得到式 (4-223) 的近似式为

$$\omega - \omega_0 \simeq \frac{-\mathrm{i} \oiint_{\Delta S} d\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*)}{\iiint_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \,\mathrm{d}V}$$

根据 1.6.3 节复数 Poynting 定理, 上式右端中分子的面积分可以用体积分代替, 因而得到

$$\begin{aligned} \omega - \omega_0 &\simeq \frac{-\mathrm{i} \left[\mathrm{i}\omega_0 \iiint_{\Delta V} (\mu \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_0^* - \varepsilon \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^*) \,\mathrm{d}V \right]}{\iiint_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \,\mathrm{d}V} \\ &= \omega_0 \frac{\Delta W_{\mathrm{m}} - \Delta W_{\mathrm{e}}}{W_{\mathrm{m}} + W_{\mathrm{e}}} \end{aligned} \tag{4-224}$$

式中, $W_{\mathrm{e}}, W_{\mathrm{m}}$ 代表腔内的电场和磁场能量, $\Delta W_{\mathrm{e}}, \Delta W_{\mathrm{m}}$ 代表腔体凹陷部分的电场和磁场能量. 式 (4-224) 是一个近似公式. 它表明如果腔壁凹陷位于磁场较强处, 则腔的谐振频率增高; 如果腔壁凹陷位于电场较强处, 则腔的谐振频率降低. 以上关

于腔壁局部凹陷的分析也可用于腔壁局部向外凸起使谐振频率改变的分析, 这时对于谐振频率的影响与凹陷正好相反.

以矩形腔 TM_{110} 模为例. 若腔壁凹陷位于底部中心处, TM_{110} 模中心电场最强, 凹陷处 $\Delta W_{\mathrm{e}} > \Delta W_{\mathrm{m}}$, 因而 $\omega < \omega_0$. 若腔壁凹陷位于腔壁侧面, 由于侧壁磁场较强, 则 $\Delta W_{\mathrm{e}} < \Delta W_{\mathrm{m}}$, 因而 $\omega > \omega_0$. 根据上述原理, 通过腔内金属螺杆的伸缩调节可以改变腔体的谐振频率.

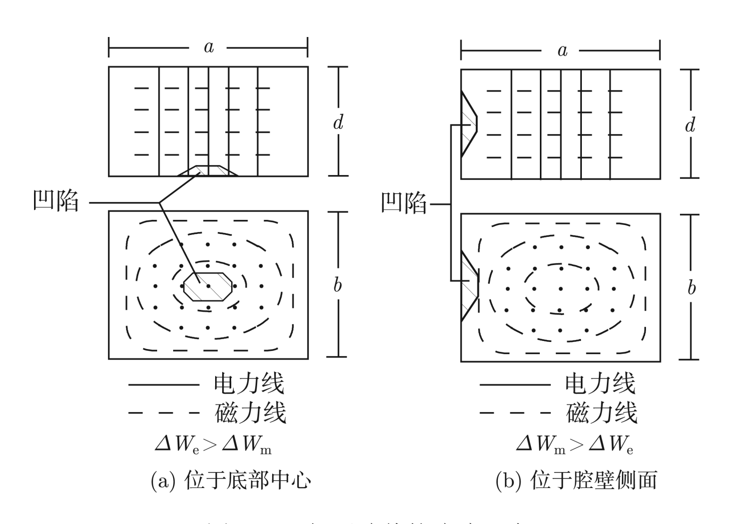


图 4-31　矩形腔体的腔壁凹陷

4.9.2　腔内介质参数改变对谐振频率的影响

设无扰动时腔内介质为各向同性, 介质参数为 ε, μ. 未扰动时腔内场为 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$, 谐振频率为 ω_0, 满足 Maxwell 方程,

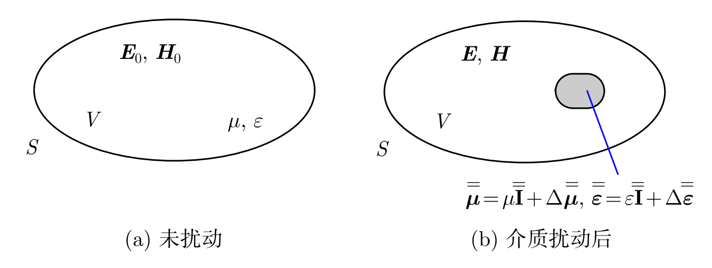
$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E}_0 &= \mathrm{i}\omega_0 \mu \boldsymbol{H}_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_0 &= -\mathrm{i}\omega_0 \varepsilon \boldsymbol{E}_0 \end{aligned}\right\} \tag{4-225}$$

为了使推导结果具有一般性, 设扰动后介质为各向异性, 如图 4-32 所示, 扰动后介质参数为 $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \mu \overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}, \overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon \overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \Delta\overline{\overline{\varepsilon}}$. 其中, $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 为单位张量. 微扰后场的 Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} = \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega \Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \boldsymbol{H} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= -\mathrm{i}\omega \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega \Delta\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \tag{4-226}$$

将式 (4-225) 第一式取共轭乘 $\boldsymbol{H}$ 然后减去式 (4-226) 第二式乘 $\boldsymbol{E}_0^*$ 得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_0^* \times \boldsymbol{H}) = -\mathrm{i}\omega_0 \mu \boldsymbol{H}_0^* \cdot \boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mathrm{i}\omega \left(\Delta\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0^*$$



(a) 未扰动 (b) 介质扰动后

图 4-32 腔内介质参数的扰动

上式在腔体积 V 积分得

$$\oiint_s \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})=\iiint_V\left[-\mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}_0^*\cdot\boldsymbol{H}+\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mathrm{i}\omega\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\mathrm{d}V \tag{4-227}$$

由于腔壁为理想导体, 式 (4-227) 左端等于零, 即

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})=\oiint_S \boldsymbol{H}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}_0^*)=0$$

将式 (4-225) 第二式取共轭乘 $\boldsymbol{E}$ 然后减去式 (4-226) 第一式乘 $\boldsymbol{H}_0^*$ 得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\mathrm{i}\omega\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{H}_0^*-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$

上式在腔体积 V 积分得

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\mathbf{H}_0^*)=\iiint_V\left[\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\mathrm{i}\omega\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)\cdot\mathbf{H}_0^*-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\mathrm{d}V \tag{4-228}$$

同样, 由于腔壁为理想导体, 式 (4-228) 左端等于零, 即

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)=\oiint_S \boldsymbol{H}_0^*\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E})=0$$

式 (4-227) 和式 (4-228) 相加得

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=\frac{-\displaystyle\iiint_V\left[\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}\right)\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\mathrm{d}V}{\displaystyle\iiint_V\left(\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\mathrm{d}V} \tag{4-229}$$

以上为准确公式, 但由于扰动后场分布 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 难于求得, 式 (4-229) 不便于直接用作准确计算.

如果腔内介质变化 $\Delta\overline{\overline{\varepsilon}},\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ 较小, 以致式 (4-229) 右端积分号下的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可以近似用无扰动时的场 $\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{H}_0$ 来代替, 即 $\boldsymbol{E}\approx\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{H}_0$. 于是, 式 (4-229) 近似为有

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}\simeq\frac{-\iiint\limits_V\left[\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}_0\right)\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\left(\Delta\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V\left(\mu\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\varepsilon\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\mathrm{d}V}=-\frac{\Delta W_\mathrm{m}+\Delta W_\mathrm{e}}{W_\mathrm{m}+W_\mathrm{e}} \tag{4-230}$$

以上为近似公式. 分母 $W_\mathrm{m}+W_\mathrm{e}$ 对应于扰动前腔内电磁场的总能量, 分子 $\Delta W_\mathrm{m}+\Delta W_\mathrm{e}$ 代表介质变化后所引起磁场和电场能量的增加. 所以, 腔内介质参数 $\Delta\overline{\overline{\varepsilon}},\Delta\overline{\overline{\mu}}$ 的增大将导致谐振频率的减小. 当然, 材料并不需要在整个腔内均匀分布, 当局部介质参数有变化时, $\Delta W_\mathrm{m}+\Delta W_\mathrm{e}$ 的计算只涉及介质变化的相应区域.

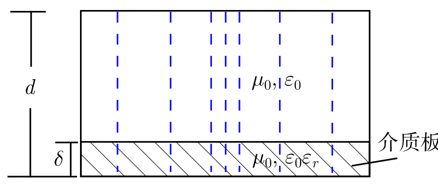


图 4-33　矩形腔底部有介质板

算例：矩形腔 TM_{110} 模, 底部放置介质板, 如图 4-33 所示, 求谐振频率变化. 介质板 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu=\mu_0$. 由于导磁系数 $\mu=\mu_0$ 没有变化, 磁场能量不变 $\Delta W_\mathrm{m}=0$, 只有电场能量变化.

对于矩形腔 TM_{110} 模, 可以证明 $W_\mathrm{e}=W_\mathrm{m}$ (见本章习题). 由于板面垂直于腔内电场, 所以电场能量的变化为

$$\frac{\Delta W_\mathrm{e}}{W_\mathrm{e}}=(\varepsilon_r-1)\,\frac{\delta}{d}$$

代入式 (4-230) 可得

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\simeq-\frac{\Delta W_\mathrm{e}}{W_\mathrm{m}+W_\mathrm{e}}=-\frac{\Delta W_\mathrm{e}}{2W_\mathrm{e}}\approx-\frac{1}{2}\,(\varepsilon_r-1)\,\frac{\delta}{d}$$

利用上述公式, 用实验测得谐振频率变化前后的 ω_0 和 ω, 就可测得介质板的介电系数 ε_r.

4.9.3　铁氧体复数导磁系数的测量

铁氧体是一种磁性介质, 在具有损耗时其导磁系数成为复数. 上述微扰公式可应用于铁氧体导磁系数 μ_r 的测量. 将铁氧体粉末测试样品放在细管内, 置于谐振腔中, 如图 4-34 所示. 以下分析参照 Raveendranufh 和 Mathew(1998).

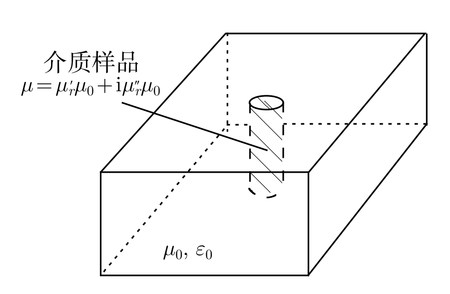


图 4-34　介质参数测试示意图

设铁氧体介电系数为 ε_0, 即图 4-32 中扰动前后腔体内介质的介电系数不变, $\Delta\overline{\overline{\varepsilon}}=0$, 因而 $\Delta W_{\mathrm{e}}=0$. 在铁氧体有耗情况, 式 (4-23) 中 $\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}=\Delta\mu\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$, 且 $\Delta\mu=\Delta\mu'+\mathrm{i}\Delta\mu''$. 当腔为有耗时, 谐振频率变为复数, 即

$$\omega_{\text{complex}}=\omega-\mathrm{i}\alpha$$

式中, 衰减常数 α 与谐振频率 ω 及 Q 值之间关系见式 (4-203),

$$Q=\frac{\omega}{2\alpha},\quad \alpha=\frac{\omega}{2Q}$$

于是有

$$\omega_{\text{complex}}=\omega-\mathrm{i}\alpha=\omega-\mathrm{i}\frac{\omega}{2Q}\tag{4-231}$$

式 (4-230) 改写为

$$\frac{\omega_{\text{complex}}-\omega_{0,\text{complex}}}{\omega_{\text{complex}}}=\frac{-\iiint\limits_{V_{\mathrm{s}}}\left[\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}_0\right)\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\left(\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{V}\left(\mu\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\varepsilon\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\mathrm{d}V}\tag{4-232}$$

式中, 后一等式分子的积分区域只在介质所填充区域 V_s. 根据式 (4-231), 式 (4-232) 左端变为

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\text{complex}}-\omega_{0,\text{complex}}}{\omega_{\text{complex}}}&=\frac{\left(\omega-\mathrm{i}\dfrac{\omega}{2Q}\right)-\left(\omega_0-\mathrm{i}\dfrac{\omega_0}{2Q_0}\right)}{\omega-\mathrm{i}\dfrac{\omega}{2Q}}\\&\simeq\frac{(\omega-\omega_0)-\mathrm{i}\dfrac{\omega}{2}\left(\dfrac{1}{Q}-\dfrac{1}{Q_0}\right)}{\omega}\\&=\frac{\omega-\omega_0}{\omega}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_0}\right)\end{aligned}\tag{4-233}$$

对于铁氧体 $\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=0$, $\Delta\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}=\Delta\mu\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$, $\Delta\mu=\Delta\mu'+\mathrm{i}\Delta\mu''$, 测试样品放入前后只有磁场能量变化, 式 (4-233) 代入式 (4-232) 得

$$\begin{aligned}\frac{\omega-\omega_0}{\omega}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_0}\right)&=\frac{-\iiint\limits_{V_{\mathrm{s}}}\left[\left(\Delta\mu\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\cdot\boldsymbol{H}_0\right)\cdot\boldsymbol{H}_0^*\right]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{V}\left(\mu\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\varepsilon\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\mathrm{d}V}\\&=\frac{-\iiint\limits_{V_{\mathrm{s}}}\Delta\mu\left|\boldsymbol{H}_0\right|^2\mathrm{d}V}{W}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\displaystyle\iiint_{V_s} \Delta\mu' \left|\boldsymbol{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}{W} - \mathrm{i}\frac{\displaystyle\iiint_{V_s} \Delta\mu'' \left|\boldsymbol{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}{W} \\
&= \frac{-\Delta\mu' \displaystyle\iiint_{V_s} \left|\boldsymbol{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}{W} - \mathrm{i}\frac{\Delta\mu'' \displaystyle\iiint_{V_s} \left|\boldsymbol{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}{W}
\end{aligned} \tag{4-234}
$$

式 (4-234) 实部和虚部分分别相等得出

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\omega-\omega_0}{\omega} &= \frac{-\Delta\mu' \displaystyle\iiint_{V_s} \left|\boldsymbol{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}{W} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_0}\right) &= \frac{\Delta\mu'' \displaystyle\iiint_{V_s} \left|\boldsymbol{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}{W}
\end{aligned}\right\} \tag{4-235}
$$

设腔内原来是空气 μ_0, 铁氧体 $\mu = \mu_r'\mu_0 + \mathrm{i}\mu_r''\mu_0$, 则 $-\Delta\mu' = \mu_0 - \mu_r'\mu_0 = \mu_0(1-\mu_r')$, $\Delta\mu'' = \mu_r''\mu_0$. 所以

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta\mu'}{\mu_0} &= (\mu_r' - 1) = \frac{\omega_0-\omega}{\omega}\frac{W}{\displaystyle\iiint_{V_s} \mu_0 |\vec{H}_0|^2 \mathrm{d}V} \\
\frac{\Delta\mu''}{\mu_0} &= \mu_r'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_0}\right)\frac{W}{\displaystyle\iiint_{V_s} \mu_0 \left|\vec{H}_0\right|^2 \mathrm{d}V}
\end{aligned}\right\} \tag{4-236}
$$

式中, W 是腔内电磁场总能量, $\displaystyle\iiint_{V_s} \mu_0|\boldsymbol{H}_0|^2\mathrm{d}V$ 是测试样品所在区域内的磁场能量对于矩形腔 TM_{110} 模, 由场分布可以计算得到. 谐振频率 ω_0, ω 以及品质因数 Q_0, Q 需要通过实验测试得到. 所得数据代入式 (4-236) 即可确定铁氧体导磁系数 $\mu = \mu_r'\mu_0 + \mathrm{i}\mu_r''\mu_0$ 的实部和虚部.

4.10　平行平板和分层介质波导的 MATLAB 计算

4.10.1　平行平板波导的场分布

本节给出用 MATLAB 计算平板金属波导的传播模. 参见 4.1 节. 设平板间距 $d = 0.1\mathrm{m}$, 板间介质为空气 (真空). 平板金属波导的前几种传输模式在 xoz 面内场

分布如图 4-35 所示, 图中 f_c 表示该模式的截止频率, f_w 表示工作频率. TM 模为 H_y 分布, TE 模为 E_y 分布.

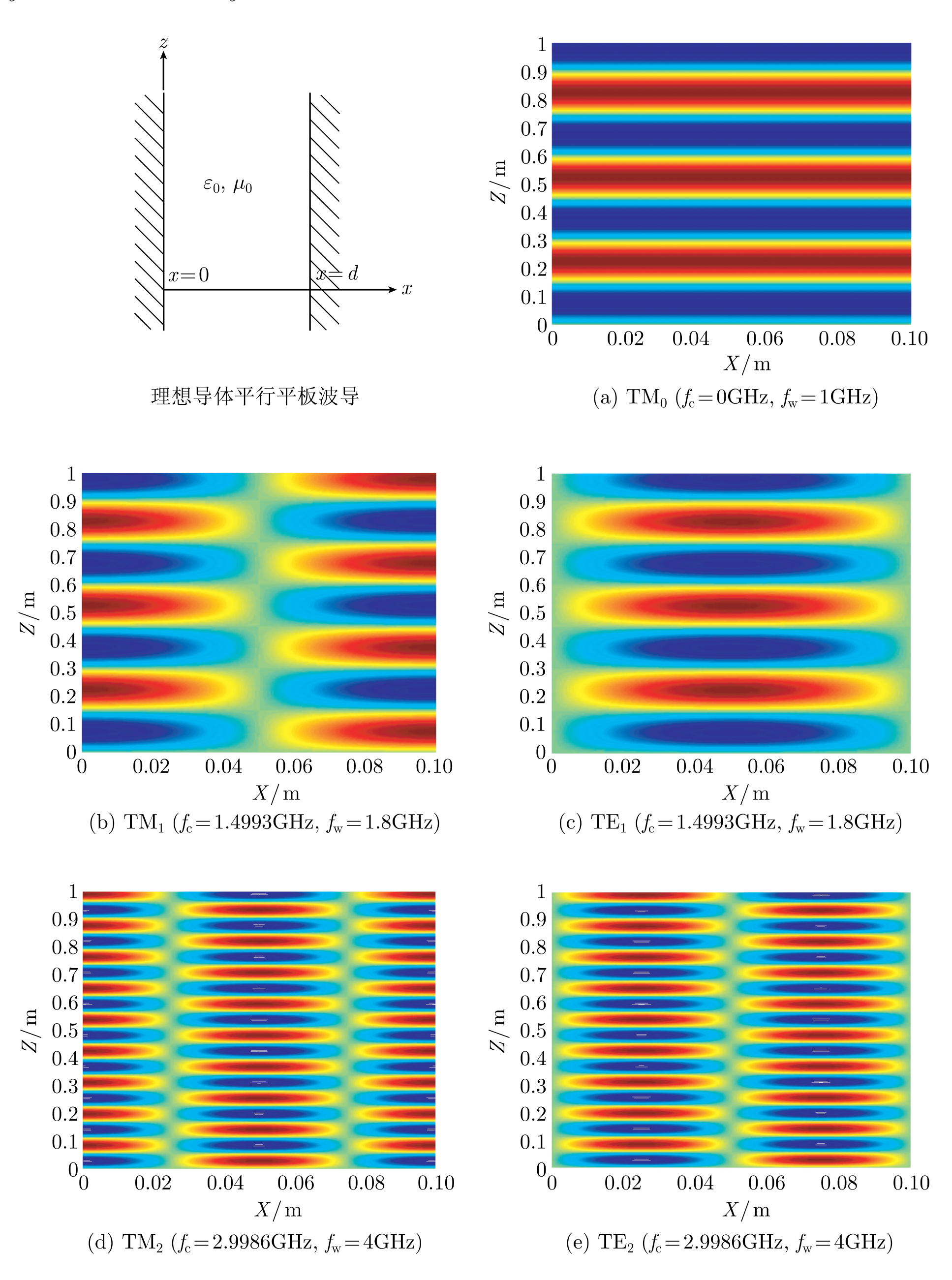


图 4-35 平板金属波导几种传播模的场分布

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%              本程序用于显示平板金属波导不同模式下的场分布
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    clear
    epslion_0=8.85e-12;                        %真空中的介电常数
    mur_0=4.0*pi*1.0e-7;                       %真空中的磁导系数
    epslion_r=1;                               %填充介质的相对介电常数
    mur_r=1.0;                                 %填充介质的相对磁导系数
    epslion=epslion_0*epslion_r;               %填充介质的介电常数
    mur=mur_0*mur_r;                           %填充介质的磁导系数
    d=0.1;                                     %金属板间距
    A=1.0;                                     %场幅值

%选择传输模式类型
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');
disp('Please input the number of the modes');
m=input('the modes number is :');              %传输模式
%计算平板金属波导的截止频率
      omega=m*pi/(d*sqrt(epslion*mur));
      f=omega/(2*pi);
      f=f/1e9;
      disp('The cutoff frequency is(GHz):');
      f
%输入工作频率 (注意本程序只能画出在当前情形下可能存在的模式)
disp('Please input the frequency');
omega=input('the freqncy is(GHz) :');
omega=2*pi*omega*1e9;

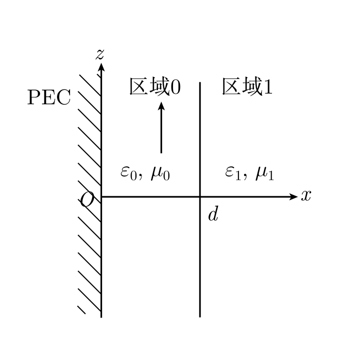
    k=omega*sqrt(epslion*mur);                 %波矢量
    kx=m*pi/d;                                 %波矢量 x 分量, 由导行条件确定
    kz=sqrt(k^2-kx^2);                         %波矢量在 z 方向投影

[x,z]=meshgrid(0:d/300:d,0:10*d/300:10*d);
```

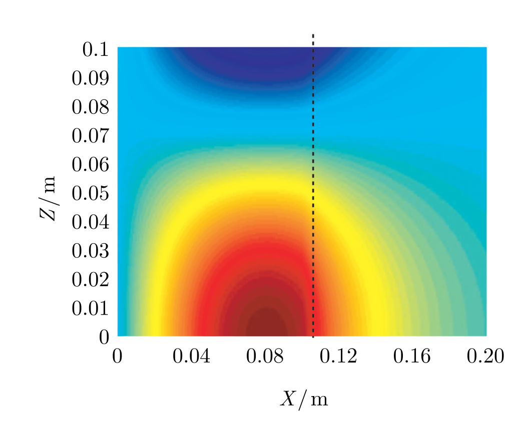
```
%Ey=real(exp(i*x.*kx*i*z.*kz)-exp(-i*x.*kx*i*z.*kz))
if wavetype==1
Ey=-2*A*sin(x.*kx).*sin(z.*kz);
surf(x,z,Ey)
elseif wavetype==−1
Hy=-2*A*cos(x.*kx).*sin(z.*kz);
surf(x,z,Hy)
end
xlabel('X (m)','FontSize',14,'FontName','bold')
ylabel('Z (m)','FontSize',14,'FontName','bold')
shading flat
shading interp
```

4.10.2 平板镜像波导的场分布

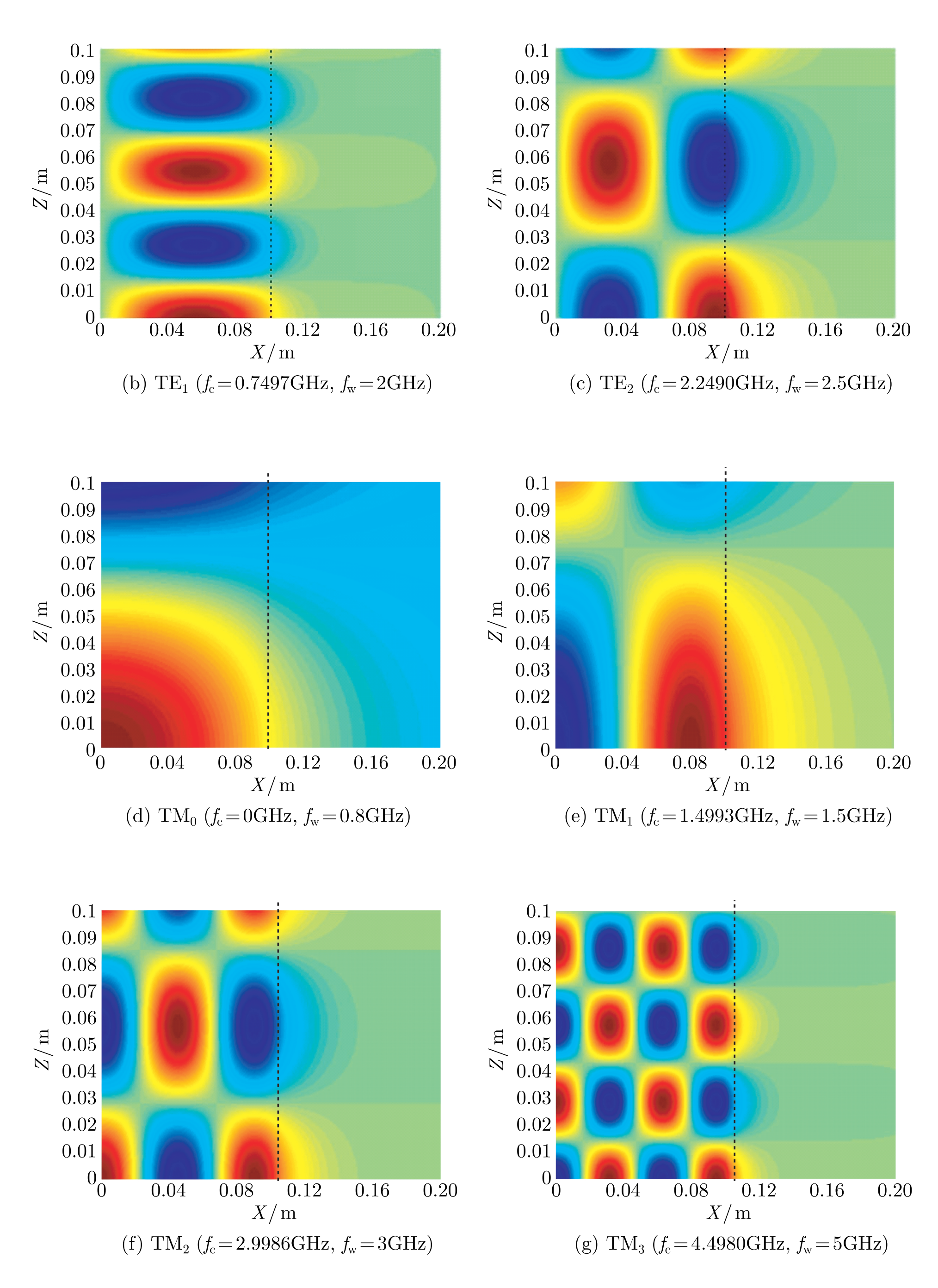
本节给出用 MATLAB 计算平板镜像波导的传播模. 参见 4.3 节. 介质层厚度 $d = 0.1\text{m}$, 相对介电常数为 $\varepsilon_{0r} = 2, \mu_{0r} = 1$, 介质板外为空气 (真空), $\varepsilon_{1r} = 1, \mu_{1r} = 1$. xOz 面内 TE 模的 E_y 分量、TM 模的 H_y 分量分布如图 4-36 所示. 图 4-36(a) 和图 4-36(b) 的工作频率不同. 由图可见, 工作频率 $f_{\rm w}$ 接近于截止频率 $f_{\rm c}$ 时区域 1 中波的衰减较小, 透入深度较大. 图 4-36(d)∼ 图 4-36(g) 为 TE 和 TM 的其他模式在 xOz 面内场分布.



平板镜像波导



(a) TE_1 ($f_{\rm c}=0.7497\text{GHz}$, $f_{\rm w}=1\text{GHz}$)



(b) TE_1 (f_c=0.7497GHz, f_w=2GHz)　(c) TE_2 (f_c=2.2490GHz, f_w=2.5GHz)

(d) TM_0 (f_c=0GHz, f_w=0.8GHz)　(e) TM_1 (f_c=1.4993GHz, f_w=1.5GHz)

(f) TM_2 (f_c=2.9986GHz, f_w=3GHz)　(g) TM_3 (f_c=4.4980GHz, f_w=5GHz)

图 4-36　平板镜像波导几种传播模的场分布

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          本程序用于显示平面镜像波导不同模式下的场分布
%                    |          |
%                    |          |
%          金属      |    区0   |   区1
%                    |          |
%                    |          |
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
  epslion_0=8.85e-12;                    %真空中的介电常数
  mur_0=4.0*pi*1.0e-7;                   %真空中的磁导系数
  epslion_r1=2;                          %区 0 相对介电常数
  mur_r1=1.0;                            %区 0 相对磁导系数
  epslion_r2=1;                          %区 1 相对介电常数
  mur_r2=1.0;                            %区 1 相对磁导系数
  epslion1=epslion_0*epslion_r1;         %区 0 介电常数
  mur1=mur_0*mur_r1;                     %区 0 磁导系数
  epslion2=epslion_0*epslion_r2;         %区 1 介电常数
  mur2=mur_0*mur_r2;                     %区 1 磁导系数
  d=0.1;                                 %区 1 厚度 (可变)
  A=1.0;                                 %场幅值
  delta=0.0001;                          %二分法解超越方程时的最大误差

%选择传输模式类型
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');
disp('Please input the number of the modes');
m=input('the modes number is :');
%传输模式 (注意本程序只能画出在当前情形下可能存在的模式)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%        本程序段计算平板镜像波导的截止频率
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if wavetype==1
omega=(2*m-1)*pi/(2*d*sqrt(epslion1*mur1-epslion2*mur2));
                                         %TE 截止频率
```

```
elseif wavetype==-1
omega=m*pi/(d*sqrt(epslion1*mur1-epslion2*mur2));
                                              %TM 截止频率
end
        f=omega/(2*pi);
        f=f/1e9;
        disp('The cutoff frequency is:');
        f
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  输入工作频率
disp('Please input the frequency');
omega=input('the freqncy is(GHz) :');
omega=2*pi*omega*1e9;                         %
k1=omega*sqrt(epslion1*mur1);                 %区 0 波矢量 (为保证区 1 为倏逝波,
                                                要求 k1>k2)
k2=omega*sqrt(epslion2*mur2);                 %区 1 波矢量
alpha=sqrt(k1^ 2-k2^ 2);                      %区 1 的衰减常数 (由色散关系确定)

if wavetype==1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 本程序段利用二分法求垂直于传播方向的衰减常数
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
     a=(m-1/2)*pi;
     b=m*pi;
     ya=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-a^ 2)...
          +mur2/mur1*a*cot(a);                %左端点的函数值
     yb=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-b^ 2)...
          +mur2/mur1*b*cot(b);                %右端点的函数值
     max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
     for k=1:max1
     c=(a+b)/2;
     yc=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-c^ 2)...
          +mur2/mur1*c*cot(c);             %中点函数值
       if yc==0
```

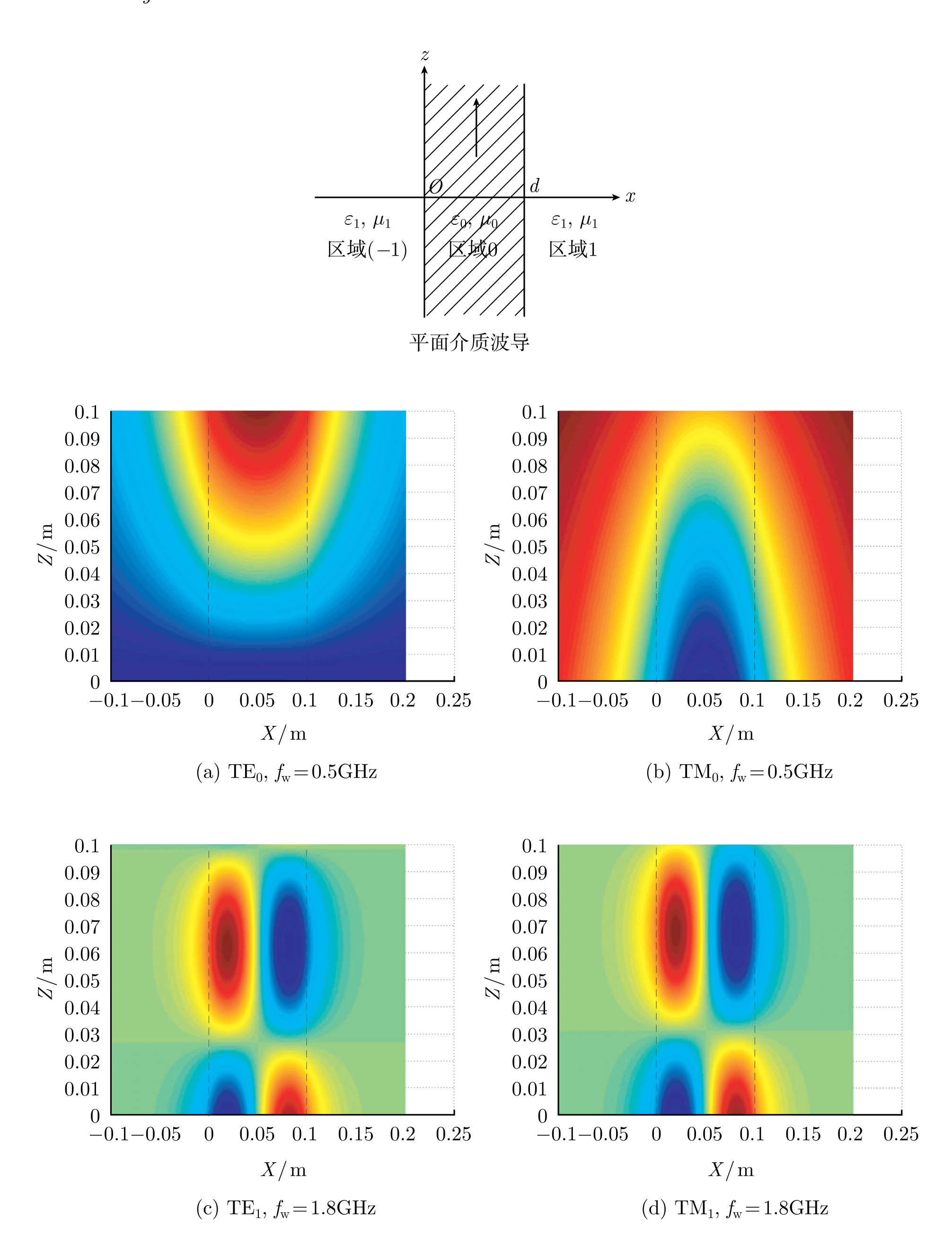
```
            a=c;
            b=c;
        elseif yb*yc>0
            b=c;
            yb=yc;
        else
            a=c;
            ya=yc;
        end
    if b-a < delta,break,end
end
kx=c/d;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
kz=sqrt(k1^2-kx^2);                              %波矢量在 z 方向投影
[x,z]=meshgrid(0:d/200:d,0:d/200:d);
        Ey=A*exp(-alpha*d)/sin(d*kx)*sin(x.*kx).*cos(z.*kz);
        surf(x,z,Ey)
        hold on
[x,z]=meshgrid(d:d/200:2*d,0:d/200:d);
        Ey=A*exp(-alpha.*x).*cos(z.*kz);
        surf(x,z,Ey)
elseif wavetype==-1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 本程序段利用二分法求垂直于传播方向的衰减常数
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    a=m*pi;
    b=(m+1/2)*pi;
    ya=sqrt(omega^2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^2-a^2)...
            -epslion2/epslion1*a*tan(a);                  %左端点的函数值
    yb=sqrt(omega^2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^2-b^2)...
            -epslion2/epslion1*b*tan(b);                  %右端点的函数值
    max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
    for k=1:max1
    c=(a+b)/2;
```

```
    yc=sqrt(omega^2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^2-c^2)...
          -epslion2/epslion1*c*tan(c);                  %中点函数值
      if yc==0
        a=c;
        b=c;
      elseif yb*yc>0
        b=c;
        yb=yc;
      else
        a=c;
        ya=yc;
      end
    if b-a < delta,break,end
end
kx=c/d;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
kz=sqrt(k1^2-kx^2);                                %波矢量在 z 方向投影
[x,z]=meshgrid(0:d/200:d,0:d/200:d);
      Hy=A*exp(-alpha*d)/cos(d*kx)*cos(x.*kx).*cos(z.*kz);
      surf(x,z,Hy)
      hold on
[x,z]=meshgrid(d:d/200:2*d,0:d/200:d);
          Hy=A*exp(-alpha.*x).*cos(z.*kz);
          surf(x,z,Hy)
end
xlabel('X (m)','FontSize',14,'FontName','bold')
ylabel('Z (m)','FontSize',14,'FontName','bold')
shading flat
shading interp
```

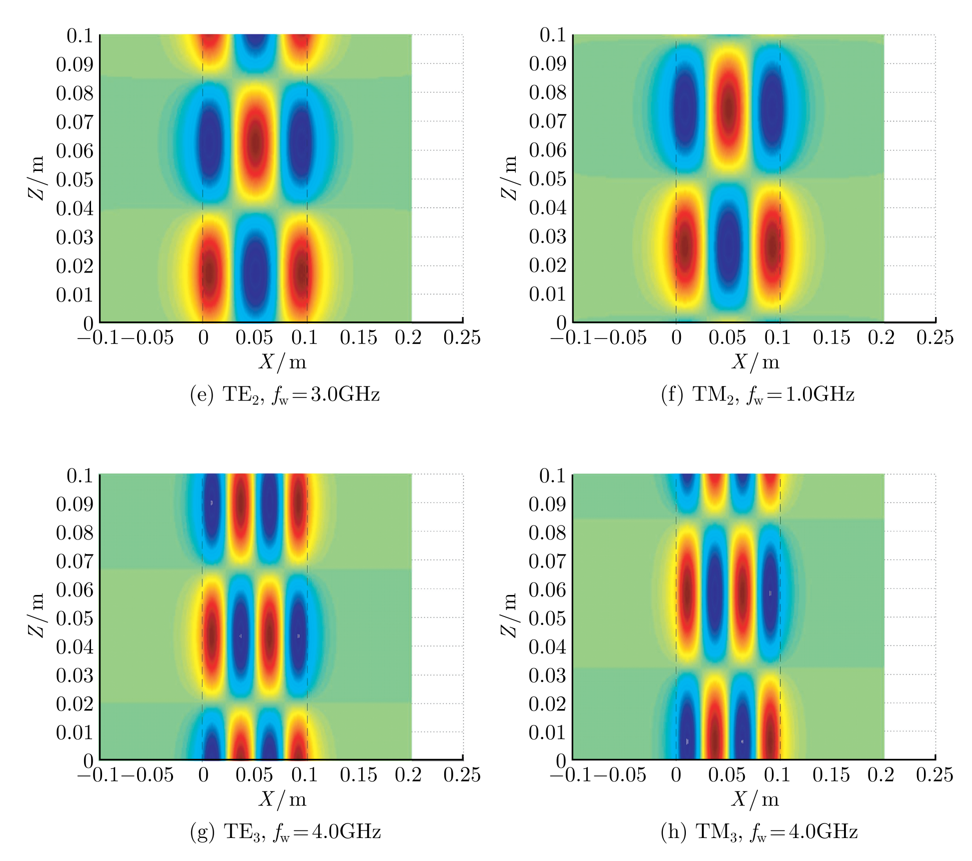
4.10.3 平面介质波导的场分布

本节给出用 MATLAB 计算平面介质波导的传播模. 参见 4.4 节. 设介质板厚度 $d = 0.1\text{m}$, 相对介电系数为 $\varepsilon_{0r} = 2.5, \mu_{0r} = 1$; 介质板两侧为空气 (真空) $\varepsilon_{1r} = 1, \mu_{1r} = 1$. 在平面介质波导中 TE 模和 TM 模的截止频率相同. 上述计算

条件下 TE_0 、TE_1、TE_2 和 TE_3 模的截止频率分别为 0、1.224GHz、2.448GHz 和 3.673GHz. 平面介质波导中的前几种模式如图 4-37 所示, 图中 TE 模为 E_y 分量, TM 模为 H_y 分量在 xOz 面的场分布.



(a) TE_0, $f_w=0.5$GHz
(b) TM_0, $f_w=0.5$GHz
(c) TE_1, $f_w=1.8$GHz
(d) TM_1, $f_w=1.8$GHz

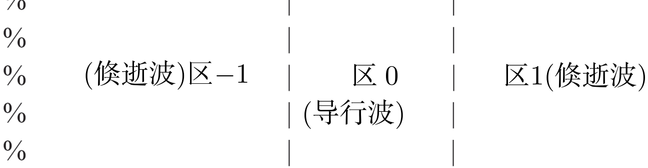


(e) TE_2, $f_w=3.0$GHz　　(f) TM_2, $f_w=1.0$GHz

(g) TE_3, $f_w=4.0$GHz　　(h) TM_3, $f_w=4.0$GHz

图 4-37　平面介质波导的场分布

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                本程序用于显示平面介质波导不同模式下的场分布
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```




```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
epslion_0=8.85e-12;             %真空中的介电常数
mur_0=4.0*pi*1.0e-7;            %真空中的磁导系数
epslion_r1=2.5;                 %区 0 相对介电常数
```

```
mur_r1=1.0;                          %区 0 相对磁导系数
epslion_r2=1;                        %区 1 相对介电常数 (区 -1 的参数与此相同)
mur_r2=1.0;                          %区 1 相对磁导系数
epslion1=epslion_0*epslion_r1 ;      %区 0 介电常数
mur1=mur_0*mur_r1;                   %区 0 磁导系数
epslion2=epslion_0*epslion_r2 ;      %区 1 介电常数
mur2=mur_0*mur_r2;                   %区 1 磁导系数
d=0.1;                               %区 1 厚度 (可变)
A=1.0;                               %场幅值
delta=0.0001;                        %二分法解超越方程时的最大误差

%选择传输模式类型
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');
disp('Please input the number of the modes');
m=input('the modes number is :');
%传输模式 (注意本程序只能画出在当前情形下可能存在的模式)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   本程序段计算平面介质波导的截止频率
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    omega=m*pi/(d*sqrt(epslion1*mur1-epslion2*mur2));
                                     %截止频率 (TE、TM\ 波相同)
    f=omega/(2*pi);
    f=f/1e9;
    disp('The cutoff frequency is(GHz):');
    f
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 输入工作频率

disp('Please input the frequency');
omega=input('the freqncy is(GHz) :');
omega=2*pi*omega*1e9;
```

```
k1=omega*sqrt(epslion1*mur1);       %区 0 波矢量 (为保证区 1、
                                    区 -1 为倏逝波, 要求 k1>k2)
k2=omega*sqrt(epslion2*mur2);       %区 1 波矢量
alpha=sqrt(k1^ 2-k2frm-e);          %区 1 的衰减常数 (由色散关系确定)

if wavetype==1                      %TE case

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   本程序段利用二分法求垂直于传播方向的衰减常数
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    a=m*pi;
    b=(m+1)*pi;
    if mod(m,2)==0 %偶次模的情形 (偶次模和奇次模的导行条件不同, 需要分别
处理)
    ya=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-a^ 2)...
      -2*mur2/mur1*a/2*tan(a/2);           %左端点的函数值

    yb=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-b^ 2)...
      -2*mur2/mur1*b/2*tan(b/2);           %右端点的函数值

    else                                   %奇次模的情形
    ya=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-a^ 2)...
      +2*mur2/mur1*a/2*cot(a/2);           %左端点的函数值
    yb=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-b^ 2)...
      +2*mur2/mur1*b/2*cot(b/2);           %右端点的函数值
    end

    max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
    for k=1:max1
    c=(a+b)/2;
    if mod(m,2)==0
      yc=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-c 2)...
        -2*mur2/mur1*c/2*tan(c/2);         %中点函数值 (偶次模)
    else
      yc=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-c 2)...
        +mur2/mur1*c*cot(c);               %中点函数值 (奇次模)
```

```
    end
      if yc==0
        a=c;
        b=c;
      elseif yb*yc>0
        b=c;
        yb=yc;
      else
        a=c;
        ya=yc;
      end
    if b-a < delta,break,end
end
kx=c/d;
phi=(m*pi-kx*d)/2;                                    %Goos-Hänchen shift

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

kz=sqrt(k1^2-kx^2);                                   %波矢量在 z 方向投影
[x,z]=meshgrid(0:d/200:d,0:d/200:d);
        Ey=2*A*cos(x.*kx-kx*d/2-m*pi/2).*cos(z.*kz-kx*d+phi);
        surf(x,z,Ey)
        hold on
[x,z]=meshgrid(d:d/200:2*d,0:d/200:d);

Ey=2*A*exp(-alpha.*x+alpha*d).*cos(kx*d/2-m*pi/2).*cos(z.*kz-kx*d+phi);
        surf(x,z,Ey)
[x,z]=meshgrid(-d:d/200:0,0:d/200:d);
        Ey=2*A*exp(alpha.*x).*cos(kx*d/2+m*pi/2).*cos(z.*kz-kx*d+phi);
        surf(x,z,Ey)
elseif wavetype==-1                                   %TM case
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    本程序段利用二分法求垂直于传播方向的衰减常数
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
a=m*pi;
b=(m+1)*pi;
if mod(m,2)==0
%偶次模的情形 (偶次模和奇次模的导行条件不同, 需要分别处理)
ya=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-a^ 2)...
  -2*epslion2/epslion1*a/2*tan(a/2);                %左端点的函数值
yb=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-b^ 2)...
  -2*epslion2/epslion1*b/2*tan(b/2);                %右端点的函数值
else                                                %奇次模的情形
ya=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-a^ 2)...
  +2*epslion2/epslion1*a/2*cot(a/2);                %左端点的函数值
yb=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-b^ 2)...
  +2*epslion2/epslion1*b/2*cot(b/2);                %右端点的函数值
end

max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
for k=1:max1
c=(a+b)/2;
if mod(m,2)==0
  yc=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-c 2)...
    -2*epslion2/epslion1*c/2*tan(c/2);              %中点函数值 (偶次模)
else
  yc=sqrt(omega^ 2*(epslion1*mur1-epslion2*mur2)*d^ 2-c 2)...
    +epslion2/epslion1*c*cot(c);                    %中点函数值 (奇次模)
end

  if yc==0
    a=c;
    b=c;
  elseif yb*yc>0
    b=c;
    yb=yc;
  else
    a=c;
    ya=yc;
```

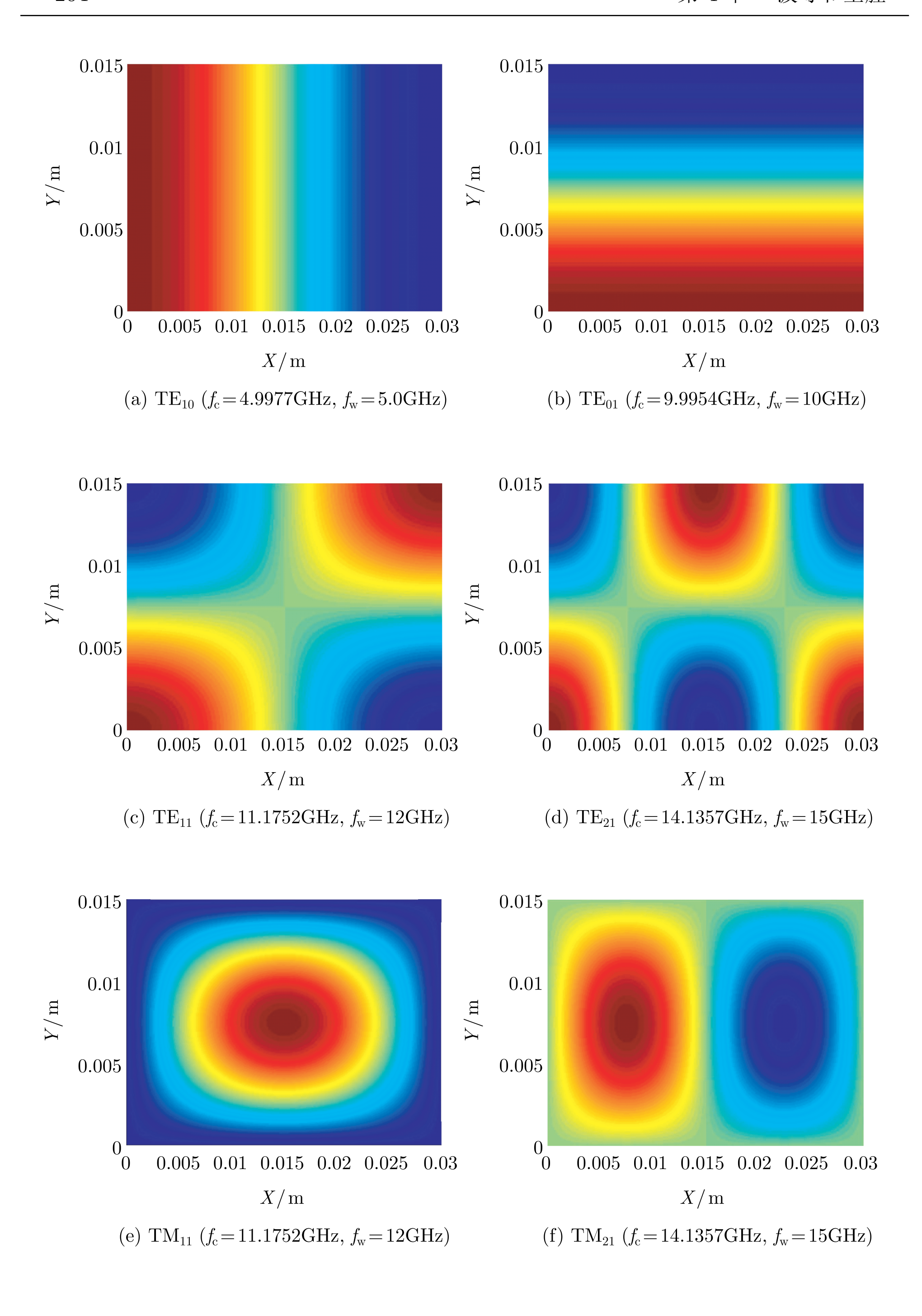
```
        end
    if b-a < delta,break,end
end
kx=c/d;
phi=(m*pi-kx*d)/2;                              %Goos-Hänchen shift
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
kz=sqrt(k1^ 2-kx^ 2);                           %波矢量在 z 方向投影
[x,z]=meshgrid(0:d/200:d,0:d/200:d);
        Hy=2*A*cos(x.*kx-kx*d/2-m*pi/2).*cos(z.*kz-kx*d+phi);
        surf(x,z,Hy)
        hold on
[x,z]=meshgrid(d:d/200:2*d,0:d/200:d);
Hy=2*A*exp(-alpha.*x+alpha*d).*cos(kx*d/2-m*pi/2).*cos(z.*kz-kx*d+phi);
        surf(x,z,Hy)
[x,z]=meshgrid(-d:d/200:0,0:d/200:d);
        Hy=2*A*exp(alpha.*x).*cos(kx*d/2+m*pi/2).*cos(z.*kz-kx*d+phi);
        surf(x,z,Hy)

end
xlabel('X (m)','FontSize',20,'FontName','bold')
ylabel('Z (m)','FontSize',20,'FontName','bold')
shading flat
shading interp
view(0,90)
```

4.11 金属波导管的 MATLAB 计算

4.11.1 矩形波导的场分布

本节给出用 MATLAB 计算金属矩形波导的传播模, 参见 4.5 节. 设矩形截面为 3cm×1.5cm, 波导中介质为空气 (真空). 矩形波导中几种 TE 模 H_z 和 TM 模 E_z 分量在垂直于波导的截面内场分布如图 4-38 所示.



(a) TE_{10} ($f_c=4.9977$GHz, $f_w=5.0$GHz)

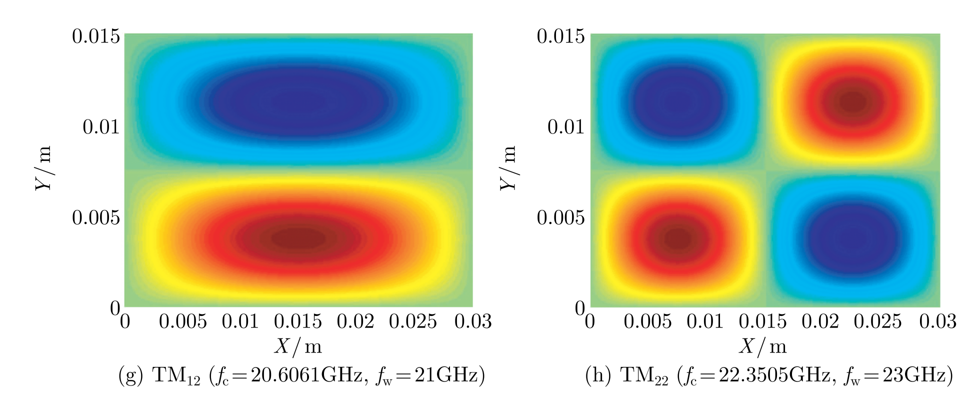
(b) TE_{01} ($f_c=9.9954$GHz, $f_w=10$GHz)

(c) TE_{11} ($f_c=11.1752$GHz, $f_w=12$GHz)

(d) TE_{21} ($f_c=14.1357$GHz, $f_w=15$GHz)

(e) TM_{11} ($f_c=11.1752$GHz, $f_w=12$GHz)

(f) TM_{21} ($f_c=14.1357$GHz, $f_w=15$GHz)



(g) TM_{12} (f_c=20.6061GHz, f_w=21GHz)　(h) TM_{22} (f_c=22.3505GHz, f_w=23GHz)

图 4-38　矩形波导中几种模的场分布

本程序用于显示金属矩形波导垂直于传播方向截面不同模式下的场分布

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   本程序用于显示金属矩形波导垂直于传播方向截面不同模式下的场分布
%                  ——————————
%                  |          |
%                  |          | b(y轴方向)
%                  |          |
%                  ——————————
%                     a(x轴方向)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    clear
    epslion_0=8.85e-12;                %真空中的介电常数
    mur_0=4.0*pi*1.0e-7;               %真空中的磁导系数
    epslion_r=1.0;                     %填充介质的相对介电常数
    mur_r=1.0;                         %填充介质的相对磁导系数
    epslion=epslion_0*epslion_r ;      %填充介质的介电常数
    mur=mur_0*mur_r;                   %填充介质的磁导系数
    a=0.03;                            %金属波导 x 方向尺寸 (可变)
    b=0.015;                           %金属波导 y 方向尺寸 (可变)
    E0=1.0;                            %场幅值
    H0=1.0;                            %场幅值

%选择传输模式类型
```

```
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');
disp('Please input the number of the modes');
m=input('the modes number of x axis is :');          %传输模式
n=input('the modes number of y axis is :');          %传输模式

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%本程序段计算TE波的截止频率
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    omega=sqrt((m*pi/a)^ 2+(n*pi/b)^ 2)/sqrt(epslion*mur);
          %截止频率 (TM 模 mn 均不能为 0.TE 模 mn 不能同时为 0)
    f=omega/(2*pi);
    f=f/1e9; %cutoff frequency (GHz)
    disp('The cutoff frequency is(GHz):');
    f
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 输入工作频率

disp('Please input the frequency');
omega=input('the freqncy is(GHz) :');
omega=2*pi*omega*1e9;

disp('Please input the coordinate of the section');
z=input('the coordinate of the section is (meter) :');
%计算波矢量分量
kx=m*pi/a;                                        %波矢量在 x 方向的分量
ky=n*pi/b;                                        %波矢量在 y 方向的分量
kz=sqrt(omega^ 2*epslion*mur-kx^ 2-ky^ 2);        %波矢量在 z 方向的分量
A0=omega^ 2*epslion*mur-kz^ 2;                    %中间变量
if wavetype==1                                    %TE case
 %选择显示的场量
 disp('Please choose the field components : Hz=1, Hx=2, Hy=3, Ex=4, Ey=5');
 disp('Please input the field component');
 flag=input('the field component is :');          %传输模式
 [x,y]=meshgrid(0:a/300:a,0:b/300:b);
```

```
    if flag==1
      Hz=cos(x.*kx).*cos(y.*ky).*cos(z.*kz);
      surf(x,y,Hz)
    elseif flag==2
      Hx=-kx*kz/A0*sin(x.*kx).*cos(y.*ky).*sin(z.*kz);
      surf(x,y,Hx)
    elseif flag==3
      Hy=-ky*kz/A0*cos(x.*kx).*sin(y.*ky).*sin(z.*kz);
      surf(x,y,Hy)
    elseif flag==4
      Ex=-omega*mur*ky/A0*cos(x.*kx).*sin(y.*ky).*sin(z.*kz);
      surf(x,y,Ex)
    else
      Ey=omega*mur*kx/A0*sin(x.*kx).*cos(y.*ky).*sin(z.*kz);
      surf(x,y,Ex)
    end
      hold on
elseif wavetype==-1                              %TM case
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  选择显示的场量

disp('Please choose the field components : Ez=1, Ex=2, Ey=3, Hx=4 , Hy=5');
disp('Please input the field component');
flag=input('the field component is :');              %传输模式

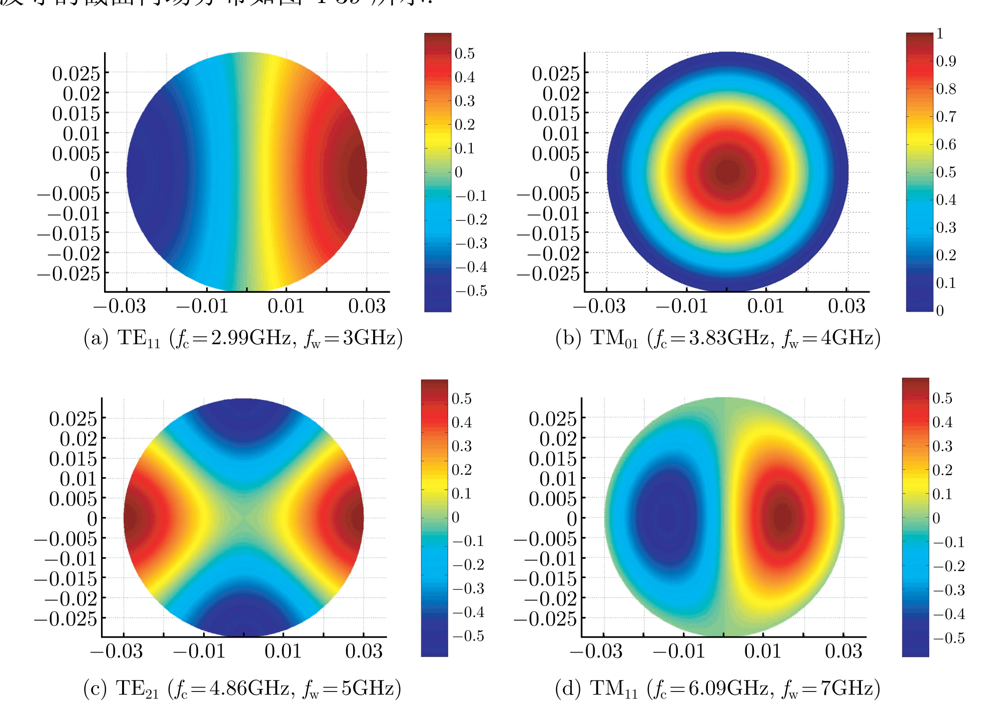
[x,y]=meshgrid(0:a/300:a,0:b/300:b);

    if flag==1
      Ez=E0*sin(x.*kx).*sin(y.*ky).*cos(z.*kz);
      surf(x,y,Ez)
    elseif flag==2
      Ex=kx*kz/A0*E0*cos(x.*kx).*sin(y.*ky).*sin(z.*kz);
      surf(x,y,Ex)
    elseif flag==3
      Ey=ky*kz/A0*E0*sin(x.*kx).*cos(y.*ky).*sin(z.*kz);
      surf(x,y,Ey)
```

```
    elseif flag==4
        Hx=-omega*epslion*ky/A0*E0*sin(x.*kx).*cos(y.*ky).*sin(z.*kz);
        surf(x,y,Hx)
    else
        Hy=omega*epslion*kx/A0*E0*cos(x.*kx).*sin(y.*ky).*sin(z.*kz);
        surf(x,y,Hx)
    end
        hold on
end
xlabel('X (m)','FontSize',14,'FontName','bold')
ylabel('Y (m)','FontSize',14,'FontName','bold')
shading flat
shading interp
```

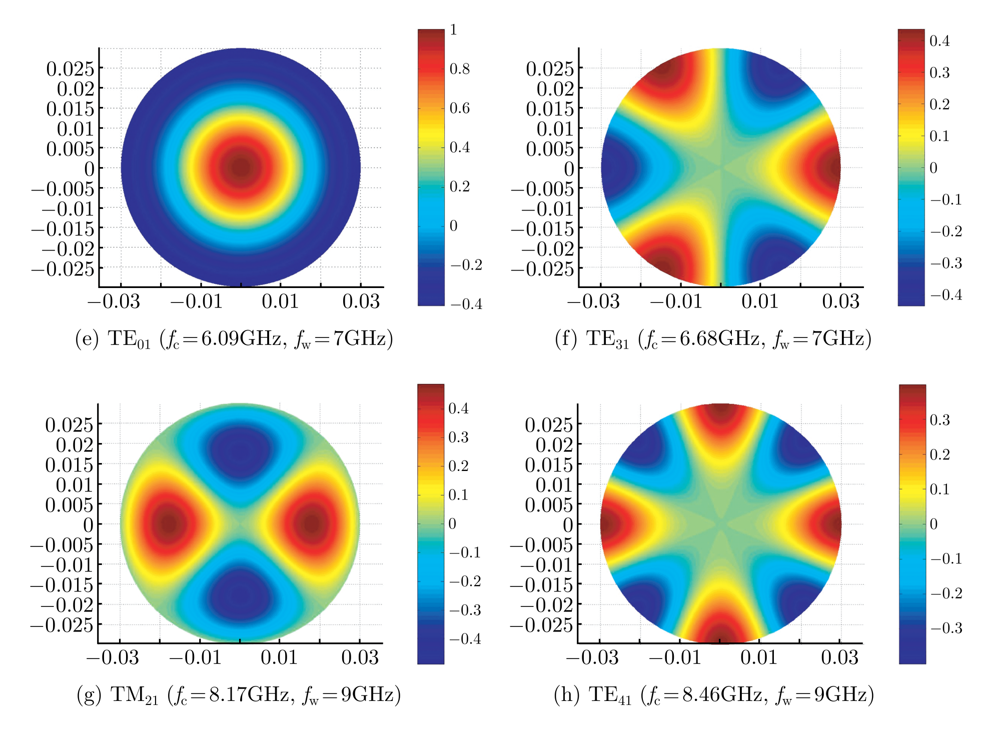
4.11.2　圆波导的场分布

本节给出用 MATLAB 计算金属圆波导的传播模, 参见 4.6 节. 设圆波导半径 $a = 3\text{cm}$, 波导中为空气 (真空). 波导中几种 TE 模 H_z 和 TM 模 E_z 分量在垂直于波导的截面内场分布如图 4-39 所示.



(a) TE$_{11}$ (f_c=2.99GHz, f_w=3GHz)　(b) TM$_{01}$ (f_c=3.83GHz, f_w=4GHz)

(c) TE$_{21}$ (f_c=4.86GHz, f_w=5GHz)　(d) TM$_{11}$ (f_c=6.09GHz, f_w=7GHz)



(e) TE_{01} (f_c=6.09GHz, f_w=7GHz)　　(f) TE_{31} (f_c=6.68GHz, f_w=7GHz)

(g) TM_{21} (f_c=8.17GHz, f_w=9GHz)　　(h) TE_{41} (f_c=8.46GHz, f_w=9GHz)

图 4-39　金属圆波导中几种模的场分布

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                本程序用于显示金属圆波导不同模式下的场分布
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

 clear
 epslion_0=8.85e-12;                  %真空中的介电常数
 mur_0=4.0*pi*1.0e-7;                 %真空中的磁导系数
 epslion_r=1.0;                       %填充介质的相对介电常数
 mur_r=1.0;                           %填充介质的相对磁导系数
 epslion=epslion_0*epslion_r ;        %填充介质的介电常数
 mur=mur_0*mur_r;                     %填充介质的磁导系数
 a=0.03;                              %波导半径 (可变)
 delta=0.0001;                        %二分法解超越方程时的最大误差
 NN=0;                                %临时变量
 MM=0;                                %临时变量
 z=0;                                 %显示 z=0 平面的场值
```

```
%选择传输模式类型
disp('Please choose the incident wave: TM=-1 or TE=1');
wavetype=input('wavetype is :');
disp('Please input the number of the modes: M and N');
m=input('M is associated with the number
    of variations in phi direction:');
                        %传输模式
n=input('N is associated with the number
    of variations in rou direction:');
                        %传输模式
   Jmo=0;               %存储 Bessel 函数值的临时变量
   Jmpo=0;              %存储 Bessel 函数导数值的临时变量
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    本程序段计算金属圆波导的截止频率
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 for ka=0:0.1:100;      %Bessel 函数自变量的变化范围和步长
 Jm=besselj(m,ka);      %第一类 m 阶 Bessel 函数
Jmp=(m*besselj(m,ka)-ka*besselj(m+1,ka))/ka;
                        %第一类 m 阶 Bessel 函数由递推公式求得
if Jm*Jmo < 0
c=bi(ka-0.1,ka,delta,m);     %调用二分法子程序求 Bessel 函数的根并输出
NN=NN+1;
    if NN ==n
      ksai=c;
    end
end
if Jmpo*Jmp < 0
cp=bip(ka-0.1,ka,delta,m);   %调用二分法子程序求 Bessel 函数导数的根并输出
MM=MM+1;
      if MM==n
        ksaip=cp;
    end
end
```

```
Jmo=Jm;
Jmpo=Jmp;
if MM >= n & NN >=n,break,end                    %对于给定模式只需求出所需根即
可
end
if wavetype==1                                   %TE case
  omega=ksaip/(a*sqrt(epslion*mur));             %截止频率
elseif wavetype==-1                              %TM case
  omega=ksai/(a*sqrt(epslion*mur));              %截止频率
end
    f=omega/(2*pi);
    f=f/1e9; %cutoff frequency (GHz)
    disp('The cutoff frequency is(GHz):');
    f
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 输入工作频率

disp('Please input the frequency');
omega=input('the freqncy is(GHz) :');
omega=2*pi*omega*1e9;
r=linspace(0,0.03,300)';
phi=linspace(0,2*pi,300);
x=r*cos(phi);
y=r*sin(phi);
if wavetype==1                                    %TE case

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

kz=sqrt(omega^ 2*epslion*mur-(ksaip/a)^ 2);      %计算 z 方向传播常数
krou=sqrt(omega^ 2*epslion*mur-kz^ 2);
Hz=besselj(m,r*krou)*cos(phi*m)*cos(z*kz);
surfc(x,y,Hz),colorbar                           %用 surfc 函数画图

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

elseif wavetype==-1                              %TM case
kz=sqrt(omega^ 2*epslion*mur-(ksai/a)^ 2);       %计算 z 方向传播常数
```

```
krou=sqrt(omega^ 2*epslion*mur-kz^ 2);
Ez=besselj(m,r*krou)*cos(phi*m)*cos(z*kz);
surfc(x,y,Ez),colorbar
end
shading flat
shading interp

function c=bi(a,b,delta,m)
%input – a and b are the left and right endpoints
%         – delta is the tolerance
%         – m is the mode of the bessel function
%output– c is the zero
%本程序段利用二分法求 Bessel 函数的根
format long
    ya=besselj(m,a);                          %左端点的函数值
    yb=besselj(m,b);                          %右端点的函数值
    max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
for k=1:max1
    c=(a+b)/2;
    yc=besselj(m,c);                          %中点函数值
      if yc==0
         a=c;
         b=c;
      elseif yb*yc>0
         b=c;
         yb=yc;
      else
         a=c;
         ya=yc;
      end
if b-a < delta,break,end
end
c=(a+b)/2;

function c=bi(a,b,delta,m)
```

```
    %input – a and b are the left and right endpoints
    %          – delta is the tolerance
    %          – m is the mode of the bessel function
    %output– c is the zero
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    本程序段利用二分法求Bessel函数导数的根
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format long
    ya=(m*besselj(m,a)-a*besselj(m+1,a))/a;      %左端点的函数值
    yb=(m*besselj(m,b)-b*besselj(m+1,b))/b;      %左端点的函数值
    max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
for k=1:max1
    c=(a+b)/2;
    yc=(m*besselj(m,c)-c*besselj(m+1,c))/c;      %中点函数值
      if yc==0
        a=c;
        b=c;
      elseif yb*yc>0
        b=c;
        yb=yc;
      else
        a=c;
        ya=yc;
      end
    if b-a < delta,break,end
end
c=(a+b)/2;
```

习　　题

1. 带状馈线由 10 mm 宽的铜片与接地铜板构成, 其间距离为 1 mm, 内填充聚苯乙烯介质 ($\varepsilon=2.7\varepsilon_0$). 设 500 MHz 的 TEM 波在此平板波导中传输, 其电场的有效值为 0.5 V/m. 求此馈线所传输的平均功率.

2. 平行平板理想导体波导, 如图 4-1 所示. 设在 $z=0$ 处的面电流为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向, 且 $\boldsymbol{J}_x=\hat{\boldsymbol{x}}J_z\cos(3\pi x/d)$, 试求所激励模的幅值.

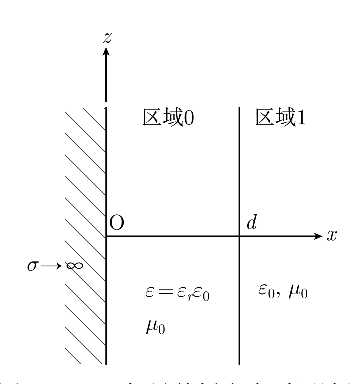


图 4-40　理想导体板上介质层波导

3. 无限大理想导体平板上有介质涂层 ($\varepsilon=3\varepsilon_0$), 厚 $d=5\,\text{mm}$, 介质层外为真空. 试求此传输系统中 TM_0 和 TM_1 模的截止频率.

4. 设理想导体平板上覆盖厚度为 d 的介质 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$, μ_0, 如图 4-40 所示. 对于沿 z 方向导行波, 区域 1 中场沿 x 方向变化为 $\exp(-\alpha_{1x}x)$. 对于 TM_0 模导行波, 当厚度 d 足够大时, 试证:

$$\alpha_{1x}\approx\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r-1}$$

式中, λ_0 为真空中波长.

5. 理想导体平板上涂有介质层的波导如图 4-8 所示, 设 $\mu=\mu_1=\mu_0$. 试证:

(1) 对于 TM 模, 区域 0 和 1 中的磁场分别为

$$\begin{aligned}&H_{1y}=H_1\exp\left(-\alpha_{1x}x\right)\exp\left(\mathrm{i}k_xz\right), && x\geqslant d\\&H_{0y}=H_1\exp\left(-\alpha_{1x}d\right)\frac{\cos k_xx}{\cos k_xd}\exp\left(\mathrm{i}k_xz\right), && 0\leqslant x\leqslant d\end{aligned}$$

(2) 对于 TM_0 模 (主模), 区域 0 和 1 中沿 z 方向平均传输功率之比为

$$\frac{P_{0x}}{P_{1x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^2\frac{\sin k_xd}{\cos^3k_xd}\left(\sin 2k_xd+2k_xd\right)$$

式中, $P_{0x}=\displaystyle\int_0^d\langle S_{0x}\left(\mathbf{r},t\right)\rangle dx$ 和 $P_{1x}=\displaystyle\int_d^\infty\langle S_{1x}\left(\boldsymbol{r},t\right)\rangle\,\mathrm{d}x$.

6. 平面介质波导所用介质为聚苯乙烯 ($\varepsilon=2.56\varepsilon_0$), 处于真空中. 设工作频率为 30 GHz, 板厚为 1cm, 试问沿此波导传播的模有哪些, 它们的截止频率各是多少?

7. 矩形金属波导尺寸为 $1\text{cm}\times0.5\text{cm}$. 试求前五种模的截止频率. 若工作频率为 20 GHz, 前五种模的传播常数及相速度等于多少? 设波导中介质为空气 ($\varepsilon=\varepsilon_0,\mu=\mu_0$).

8. 矩形波导截面为 80×40mm, 其中介质为真空 (空气). 试求:

(1) 波导主模的截止频率.

(2) 在频率等于 2.5 倍主模截止频率时, 有哪几种模式属于传播模?

9. 平行平板波导如图 4-41 所示, $z<0$ 区为真空, $z>0$ 区填满介质 (μ_0,ε_1). 设 TM 波自 $z<0$ 一侧入射, 且为各个 TM_m 模的叠加, 即

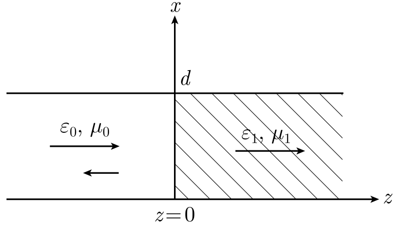


图 4-41　$z>0$ 区填充介质的平行平板波导

$$\boldsymbol{H}_0 = \hat{\boldsymbol{y}} \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{H}_{0m} \cos \frac{m\pi x}{d} \exp(\mathrm{i} k_{xm} z)$$

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{H}_{0m} \left(\hat{\boldsymbol{x}} k_{xm} \cos \frac{m\pi x}{d} - \hat{z} \mathrm{i} \frac{m\pi}{d} \sin \frac{m\pi x}{d} \right) \exp\left(\mathrm{i} k_{xm} z\right)$$

式中, $k_{zm} = \sqrt{k^2 - (m\pi/d)^2}$.

(1) 试求 $z=0$ 处各个 TM_m 模磁场的反射系数.

(2) 已知 TM_m 模的截止频率 $\omega_{cm} = \left(1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\right)(m\pi/d)$, 试证当工作频率 $\omega = \omega_{cm} \sqrt{\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\right)/\varepsilon_1}$ 时, TM_m 模将无反射.

10. 矩形金属谐振腔中的 TM_{110} (即 TE_{101}) 模, 如图 4-26 所示. 设腔内介质为空气, 腔的边长 $a = b = x$ mm 和 $d = x/4$.

(1) 欲使谐振波长 $\lambda_0 = 10$ mm, 试确定 x 的取值:

(2) 设腔壁金属的电导率 $\sigma = 4 \times 10^7 \mathrm{s} / \mathrm{m}$, 试计算在上述谐振波长时腔的 Q 值.

11. 对于矩形腔 TM_{110} 模, 试证: 腔体中电场和磁场能量相等, $W_{\mathrm{e}} = W_{\mathrm{m}}$.

第 5 章　传　输　线

本章讨论 TEM 导行波的传输线方程和分布参数传输线的基本参数, 包括反射系数, 输入阻抗, 电压驻波比. 介绍集中元件传输线概念, 以及用传输线模拟分析波的传播和理想导体板的反射以及吸波层.

5.1　传输线方程

5.1.1　TEM 导波模的传输线方程

传输线以 TEM 导波模式传送电磁波能量或信号, 其横向尺寸远小于工作波长. 传输线理论又称为一维分布参数电路理论, 是微波电路设计和计算的理论基础. 下面以平行板传输线为例 (图 5-1), 由 Maxwell 场方程导出传输线方程.

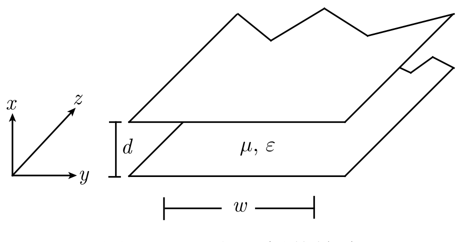


图 5-1　平行平板传输线

已知平行板间 TEM 波的电磁场为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{x}}E_x(z,t)\\ \boldsymbol{H} &= \hat{\boldsymbol{y}}H_y(z,t)\end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

由 4.1.4 节得到 TEM 波满足一维 Maxwell 场方程,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} &= -\mu\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} &= -\varepsilon\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{5-2}$$

设板间场为均匀, 定义板间电压和宽度为 w 板面电流为

$$\left.\begin{aligned}V(z,t) &= E_x(z,t)\,d\\ I(z,t) &= H_y(z,t)\,w\end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

式中, d 为板的间距. 将式 (5-3) 代入式 (5-2) 得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} &= -\frac{\mu d}{w}\frac{\partial I(z,t)}{\partial t} = -L\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon w}{d}\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = -C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{5-4}$$

引入参数,

$$L = \frac{\mu d}{w}, \quad C = \frac{\varepsilon w}{d} \tag{5-5}$$

分别为平行平板的单位长度电感和电容, 单位为 H/m 和 F/m. 式 (5-4) 称为传输线方程, 也称为电报方程 (telegraph equation). 方程中 V、I、L、C 均为电路参数.

5.1.2 特征阻抗

由式 (5-4) 消去 V 或者 I 得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(z,t) = 0\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)I(z,t) = 0\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

以上为传输线上电压和电流所满足的波动方程. 波动方程的一般解为

$$\left.\begin{aligned}V_+(z,t) = f(z - vt)\\ V_-(z,t) = f(z + vt)\end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

式中, V_+, V_- 分别代表沿 $+z$ 和 $-z$ 方向传播的波, 以及

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5-8}$$

为传输线上波的传播速度, 也就是板间介质中 TEM 波的传播速度. 相应的电流为

$$\left.\begin{aligned}I_+(z,t) &= \frac{1}{Z_0}f(z - vt) = \frac{1}{Z_0}V_+(z,t)\\ I_-(z,t) &= \frac{-1}{Z_0}f(z + vt) = \frac{-1}{Z_0}V_-(z,t)\end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

式中,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5-10}$$

是传输线的特征阻抗. 式 (5-5) 代入式 (5-10) 可得平行平板的特征阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu d}{w}\frac{d}{\varepsilon w}} = \frac{d}{w}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5-11}$$

除上述平行平板波导以外, 可以传播 TEM 波的传输线还有其他多种形式, 如平行双线, 同轴线, 导体表面单导线, 微带线等, 其几何参数如图 5-2 所示. 几种传输线的特征阻抗计算公式如下 (Kraus, Fleisch, 1999: 132):

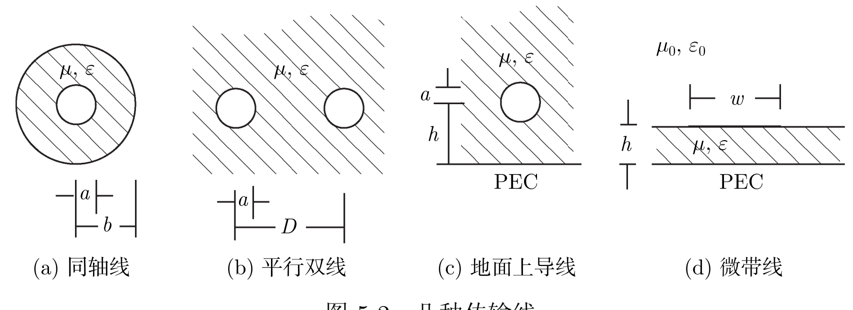


图 5-2　几种传输线

(a) 同轴线,

$$Z_0^{\text{coaxial}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5-12}$$

(b) 平行双线

$$Z_0^{\text{2-line}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{D}{a}\right) \tag{5-13}$$

(c) PEC 地面上单导线

$$Z_0^{\text{1-line}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{2h}{a}\right) \tag{5-14}$$

(d) 微带. 设微带线的上导体板为有限宽 w, 间距为 h, 由于电磁场并不局限在两板之间, 需要对平行平板特征阻抗公式 (5-11) 修正, 近似公式为

$$Z_0^{\text{strip}} \approx \frac{1}{(w/h)+2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5-15}$$

5.2　传输线上的波：时谐场情形

5.2.1　时谐场传输线方程

式 (5-6) 的一个特解为沿 z 传播的余弦波,

$$V(z,t) = V_0\cos(kz-\omega t) \tag{5-16}$$

将式 (5-16) 代入式 (5-6) 得

$$k^2 = \omega^2 LC \tag{5-17}$$

则如式 (5-6) 所示波的传播速度为

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

同样, 对于式 (5-6) 中电流相应有

$$I(z,t) = I_0 \cos(kz - \omega t) = \frac{V_0}{Z_0} \cos(kz - \omega t)$$

对于时谐场, 若用复数表示, 时谐因子取为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 式 (5-4) 变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(z)}{\partial z} &= \mathrm{i}\omega LI(z) \\ \frac{\partial I(z)}{\partial z} &= \mathrm{i}\omega CV(z) \end{aligned} \tag{5-18}$$

分别消去 V 和 I 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 LC\right) V(z) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 LC\right) I(z) = 0 \end{aligned} \tag{5-19}$$

式 (5-19) 的一般解为

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= V_+ \exp(\mathrm{i}kz) + V_- \exp(-\mathrm{i}kz) \\ I(z) &= I_+ \exp(\mathrm{i}kz) + I_- \exp(-\mathrm{i}kz) \end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

式中, 下标＋和－分别代表沿 z 和沿 $(-z)$ 方向传播的波. 将式 (5-20) 代入式 (5-18) 得相应电流为

$$I_+ = \frac{V_+}{Z_0}, \quad I_- = -\frac{V_-}{Z_0}$$

5.2.2 传输线负载端的反射系数

设传输线的末端 $z = 0$ 处加有负载阻抗 Z_L, 如图 5-3 所示. 图中用粗黑线表示传输线. 传输线上波的一般形式为

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= V_0 \left[\exp(\mathrm{i}kz) + \mathit{\Gamma}_{\mathrm{L}} \exp(-\mathrm{i}kz)\right] \\ I(z) &= \frac{V_0}{Z_0} \left[\exp(\mathrm{i}kz) - \mathit{\Gamma}_{\mathrm{L}} \exp(-\mathrm{i}kz)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5-21}$$

式中, $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{L}}$ 为负载端的反射系数.

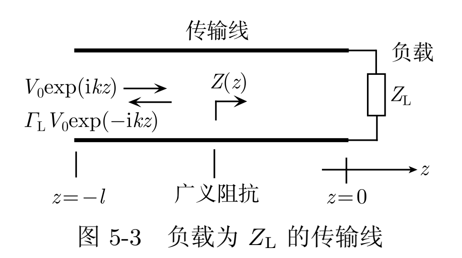


图 5-3　负载为 Z_L 的传输线

传输线上任一点的广义阻抗定义为该点电压与电流之比, 即

$$Z(z)=\frac{V(z)}{I(z)}=Z_0\frac{\exp(\mathrm{i}kz)+\Gamma_\mathrm{L}\exp(-\mathrm{i}kz)}{\exp(\mathrm{i}kz)-\Gamma_\mathrm{L}\exp(-\mathrm{i}kz)} \tag{5-22}$$

于是, 负载端 $z=0$ 处的广义阻抗为

$$Z(z=0)=\frac{V(0)}{I(0)}=Z_0\frac{1+\Gamma_\mathrm{L}}{1-\Gamma_\mathrm{L}} \tag{5-23}$$

由于负载端连接有负载阻抗, 所以负载端电压、电流和阻抗之间满足以下关系式:

$$\frac{V(0)}{I(0)}=Z_\mathrm{L} \tag{5-24}$$

以上二式联立可以求得负载端反射系数与特征阻抗、负载阻抗之间关系为

$$\Gamma_\mathrm{L}=\frac{Z_\mathrm{L}-Z_0}{Z_\mathrm{L}+Z_0}=\frac{\dfrac{Z_\mathrm{L}}{Z_0}-1}{\dfrac{Z_\mathrm{L}}{Z_0}+1}=\frac{Z_{\mathrm{L}n}-1}{Z_{\mathrm{L}n}+1} \tag{5-25}$$

式中,

$$Z_{\mathrm{L}n}=\frac{Z_\mathrm{L}}{Z_0} \tag{5-26}$$

称为归一化负载阻抗.

下面考虑终端负载的三种特殊情形及其反射系数.

情形一: 终端开路, 即 $Z_\mathrm{L}\to\infty$, 则由式 (5-25) 得到

$$\Gamma_\mathrm{L}=1 \tag{5-27}$$

代入式 (5-21) 可见终端开路处电流为 0, 电压为 $2V_0$.

情形二: 终端短路, 即 $Z_\mathrm{L}=0$, 则由式 (5-25) 得到

$$\Gamma_\mathrm{L}=-1 \tag{5-28}$$

代入式 (5-21) 可见终端短路处电压为 0, 电流为 $2I_0$.

情形三：终端为匹配, 即终端负载等于传输线特征阻抗, $Z_{\mathrm{L}}=Z_0$, 或 $Z_{\mathrm{Ln}}=1$, 则由式 (5-25) 得到

$$\varGamma_{\mathrm{L}}=0 \tag{5-29}$$

式 (5-29) 表明, 在终端匹配时不产生反射. 换言之, 如果终端不匹配是就会有反射.

5.2.3 输入阻抗

由反射系数公式 (5-25) 可将广义阻抗 (5-22) 重写为

$$\begin{aligned}
Z(z)&=\frac{V(z)}{I(z)}=Z_0\frac{\exp(\mathrm{i}kz)+\varGamma_{\mathrm{L}}\exp(-\mathrm{i}kz)}{\exp(\mathrm{i}kz)-\varGamma_{\mathrm{L}}\exp(-\mathrm{i}kz)}\\
&=Z_0\frac{(Z_{\mathrm{L}n}+1)\exp(\mathrm{i}kz)+(Z_{\mathrm{L}n}-1)\exp(-\mathrm{i}kz)}{(Z_{\mathrm{L}n}+1)\exp(\mathrm{i}kz)-(Z_{\mathrm{L}n}-1)\exp(-\mathrm{i}kz)}\\
&=Z_0\frac{2Z_{\mathrm{L}n}\cos kz+\mathrm{i}2\sin kz}{\mathrm{i}2Z_{\mathrm{L}n}\sin kz+2\cos kz}\\
&=Z_0\frac{Z_{\mathrm{L}n}+\mathrm{i}\tan(kz)}{1+\mathrm{i}Z_{\mathrm{L}n}\tan(kz)}
\end{aligned} \tag{5-30}$$

特别, 在负载端 $z=0$ 处, 由式 (5-30) 可得广义阻抗等于负载阻抗, 即

$$Z(z=0)=Z_{\mathrm{L}}$$

对于输入端 $z=-l$ 处, 广义阻抗就是长度为 l 的传输线的输入阻抗. 由式 (5-30) 可得

$$Z(z=-l)=\frac{V(-l)}{I(-l)}=Z_0\frac{Z_{\mathrm{L}n}-\mathrm{i}\tan(kl)}{1-\mathrm{i}Z_{\mathrm{L}n}\tan(kl)} \tag{5-31}$$

下面考虑几种特殊终端情形下的输入阻抗.

情形一：终端开路, 即如式 (5-26) 所示归一化负载阻抗 $Z_{\mathrm{L}n}\to\infty$, 代入式 (5-31) 可得输入阻抗为

$$Z(-l)=\frac{Z_0}{-\mathrm{i}\tan(kl)}=\mathrm{i}Z_0\cot(kl) \tag{5-32}$$

特别, 如果传输线长度 $l=\lambda/4$, 即 $kl=\pi/2$, $\tan(kl)=\tan(\pi/2)=\infty$. 可见, 对于四分之一波长的传输线, 在终端开路时其输入阻抗等于零.

情形二：终端短路, 即 $Z_{\mathrm{L}n}=0$, 代入式 (5-31) 可得输入阻抗为

$$Z(-l)=-\mathrm{i}Z_0\tan(kl) \tag{5-33}$$

特别, 如果传输线长度 $l=\lambda/4$, 即 $kl=\pi/2$, $\tan(kl)=\tan(\pi/2)=\infty$. 可见, 对于四分之一波长的传输线, 在终端短路时其输入阻抗等于无穷大.

情形三：终端为匹配, 即 $Z_{\mathrm{L}n}=1$, 代入式 (5-31) 可得输入阻抗为

$$Z(-l)=Z_0 \tag{5-34}$$

将式 (5-34) 代入式 (5-30) 可得 $Z(z)=Z_0$, 这一结论和传输线的长度 l 无关, 表明在终端匹配时, 传输线上任何位置 z 处的广义阻抗都等于特征阻抗 Z_0.

对于常用集中电路元件电感 L 和电容 C, 根据电路理论, 元件两端电压与电流关系得到电感 L 和电容 C 的阻抗如表 5-1 所示. 将式 (5-32)、式 (5-33) 和如表 5-1 所示电路元件的特性比较可见, 在传输线终端开路和短路时, 输入阻抗 $Z(-l)$ 为式 (5-32) 和式 (5-33)、传输线长度 kl 的函数, 并且随着传输线长度 (或波长) 变化, 其输入端会交替呈现电感性和电容性.

表 5-1　电感 L 和电容 C 的阻抗

集中电路元件		电压与电流关系	元件的阻抗
电感	+ I V L −	$V=L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega LI$	$Z=\dfrac{V}{I}=-\mathrm{i}\omega L$
电容	+ I V L −	$I=C\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega CV$	$Z=\dfrac{V}{I}=\dfrac{1}{-\mathrm{i}\omega C}=\dfrac{\mathrm{i}}{\omega C}$

5.2.4　广义反射系数和电压驻波比

重写传输线上电压公式 (5-21) 得

$$\begin{aligned}V(z)&=V_0\left[\exp(\mathrm{i}kz)+\Gamma_{\mathrm{L}}\exp(-\mathrm{i}kz)\right]\\&=V_0\exp(\mathrm{i}kz)\left[1+\Gamma_{\mathrm{L}}\exp(-\mathrm{i}2kz)\right]\\&=V_0\exp(\mathrm{i}kz)\left[1+\Gamma(z)\right]\end{aligned} \tag{5-35}$$

式中,

$$\Gamma(z)=\Gamma_{\mathrm{L}}\exp(-\mathrm{i}2kz) \tag{5-36}$$

称为广义反射系数, 是传输线上 z 处的反射波电压 (或电流) 和入射波电压 (或电流) 之比. 式 (5-36) 中, Γ_{L} 是负载端反射系数. 由式 (5-36) 可见,

$$|\Gamma(z)|=|\Gamma_{\mathrm{L}}\exp(-\mathrm{i}2kz)|=|\Gamma_{\mathrm{L}}| \tag{5-37}$$

即传输线上 z 处 (广义) 反射系数的模值等于负载端反射系数模值. 如果建立反射系数复数平面, 如图 5-4 所示, 则当 z 变化时反射系数 $\Gamma(z)$ 的轨迹是半径为 $|\Gamma_{\mathrm{L}}|$

的圆. 重写式 (5-35) 为

$$\frac{V(z)}{V_0}=[1+\Gamma(z)]\exp(-\mathrm{i}2kz)$$

即

$$\left|\frac{V(z)}{V_0}\right|=|1+\Gamma(z)| \tag{5-38}$$

设图 5-4 中 Q 点位于圆周上, 矢量 $\overline{OQ}=\Gamma(z)$. 图中 P 点位于实轴的负半轴上, 且令矢量 $\overline{OP}=-1$, 则矢量 $\overline{PQ}=\overline{PO}+\overline{OQ}=1+\Gamma(z)$. 当 z 改变, 图 5-4 中 Q 点在圆周上移动, 因而 z 点电压模值 $|V(z)/V_0|=\left|\overline{PQ}\right|$ 大小呈周期性变化, 即传输线上的电压为驻波. 由式 (5-35) 和式 (5-38), 令 $2kz=2\pi$ 可得电压驻波沿 z 变化的周期为 $\pi/k=\lambda/2$.

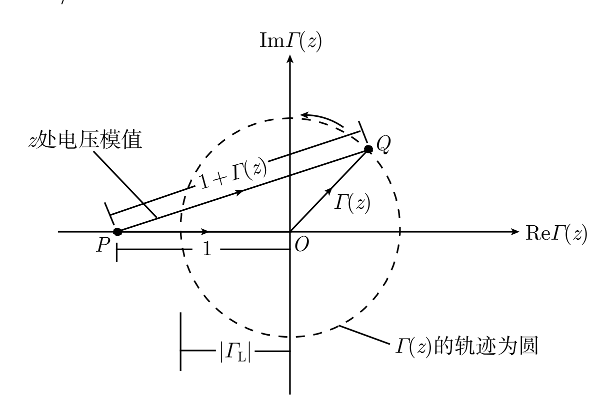


图 5-4　传输线 z 处反射系数和电压的复数平面图示

终端具有负载阻抗 Z_{L} 时, 负载端的反射系数 $|\Gamma_{\mathrm{L}}|\leqslant 1$. 由式 (5-37) 可见广义反射系数模值 $|\Gamma(z)|\leqslant 1$. 由式 (5-38) 可得电压模值, $|V(z)|=|V_0||1+\Gamma(z)|$. 由式 (5-37) 及图 5-4 可见, 传输线上电压的极大和极小值分别为

$$\begin{aligned}V_{\max}&=|V(z)|_{\max}=V_0\,|1+\Gamma(z)|_{\max}=V_0\,(1+|\Gamma_{\mathrm{L}}|)\\V_{\min}&=|V(z)|_{\min}=V_0\,|1+\Gamma(z)|_{\min}=V_0\,(1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|)\end{aligned} \tag{5-39}$$

传输线上电压驻波比 (voltage standing wave ratio, VSWR) 定义为传输线上电压驻波的相邻波峰和波谷电压振幅之比, 简称驻波比, 或电压驻波系数,

$$\mathrm{VSWR}=\frac{V_{\max}}{V_{\min}}=\frac{1+|\Gamma_{\mathrm{L}}|}{|\Gamma_{\mathrm{L}}|} \tag{5-40}$$

沿传输线 $V_{\max}$ 与 $V_{\min}$ 的间隔为 $\lambda/4$, 如图 5-5 所示. 表 5-2 给出几种特殊终端负载下的驻波比. 微波技术中, 通过电压驻波比大小和位置的测量可确定传输线上的波长、负载阻抗等参数.

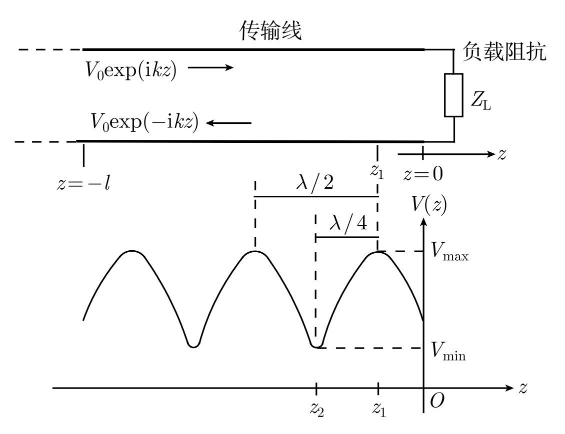


图 5-5　传输线上的电压驻波

表 5-2　几种特殊情形终端负载的驻波比

	负载阻抗 Z_L	终端反射系数 Γ_L	电压驻波比 VSWR
终端开路	∞	1	∞
终端短路	0	-1	∞
终端匹配	Z_0	0	1

算例. 设传输线特征阻抗 $Z_0 = 50\Omega$. 已知图 5-5 中传输线上电压驻波比 $\mathrm{VSWR} = V_{\max}/V_{\min} = 3$, 以及电压极大值和负载端的最近距离为 $z_1 = -\lambda/8$, 求终端反射系数和负载阻抗. 由式 (5-40),

$$\mathrm{VSWR} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}$$

可以求得传输线终端反射系数的幅值为

$$|\Gamma_L| = \frac{\mathrm{VSWR}-1}{\mathrm{VSWR}+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} \tag{5-41}$$

为了确定终端反射系数的相位, 记 $\Gamma_L = |\Gamma_L|\exp(i\varphi_L)$, 由式 (5-36),

$$\Gamma(z) = \Gamma_L \exp(-i2kz) = |\Gamma_L|\exp(i\varphi_L)\cdot\exp(-i2kz) \tag{5-42}$$

如果传输线上 $z = z_1$ 处满足 $2kz_1 = \varphi_L + 2n\pi$, 则由式 (5-42) 得 $\Gamma(z_1) = +|\Gamma_L|$, 再由式 (5-35)、式 (5-39) 可见,

$$\begin{aligned} V(z_1) &= V_0\exp(ikz_1)[1+\Gamma(z_1)] = V_0\exp(ikz_1)[1+|\Gamma_L|] \\ &= V_{\max}\exp(ikz_1) \end{aligned}$$

所以 $|V(z_1)| = V_{\max}$, 即 $z = z_1$ 对应于电压驻波的极大值. 同理, 如果在 $z = z_2$ 处满足 $2kz_2 = \varphi_L + (2n+1)\pi$, 则由式 (5-42) 得 $\Gamma(z) = -|\Gamma_L|$, 再由式 (5-35)、式

(5-39) 可见,

$$
\begin{aligned}
V(z_2) &= V_0 \exp(\mathrm{i}kz_2)\,[1+\Gamma(z_2)] = V_0 \exp(\mathrm{i}kz_2)\,[1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|] \\
&= V_{\min} \exp(\mathrm{i}kz_2)
\end{aligned}
$$

所以 $|V(z_2)| = V_{\min}$, 即 $z = z_2$ 对应于电压驻波的极小值. 根据上述分析, 通过电压驻波最大值 $V_{\max}$ 所在位置的测量可以确定 z_1. 由距离传输线终端最近的极大值便可以确定反射系数的相位,

$$
\varphi_{\mathrm{L}} = 2kz_1 \tag{5-43}
$$

若电压极大值到负载端的最近距离为 $z_1 = -\lambda/8$, 则 $\varphi_{\mathrm{L}} = (4\pi/\lambda)\cdot(-\lambda/8) = -\pi/2$. 所以, 负载端反射系数为

$$
\Gamma_{\mathrm{L}} = |\Gamma_{\mathrm{L}}| \exp[\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{L}}] = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\frac{1}{2}
$$

最后由式 (5-25) 可以得到归一化负载阻抗为

$$
Z_{\mathrm{L}n} = \frac{1+\Gamma_{\mathrm{L}}}{1-\Gamma_{\mathrm{L}}} = \frac{1-0.5\mathrm{i}}{1+0.5\mathrm{i}} = \frac{(1-0.5\mathrm{i})^2}{1.25} = 0.6 - \mathrm{i}0.8
$$

代入式 (5-26) 得负载阻抗为

$$
Z_n = Z_0 Z_{\mathrm{L}n} = (0.6-\mathrm{i}0.8)\,50 = (30-\mathrm{i}40)\,\Omega
$$

5.3　集中元件传输线

5.3.1　传输线的分布参数

假设将传输线划分为许多相同的小段, 每一段长度为 Δz, 其串联电感为 $L\Delta z$, 并联电容为 $C\Delta z$, 如图 5-6 所示, 其中 L 和 C 是分布在传输线上的单位长度电感和电容. 设相邻小段的电压和电流变化为 $\Delta V(z)$ 和 $\Delta I(z)$. 对于其中一段, 根据 Kirchhoff 回路电压方程和节点电流方程可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta V(z) &= V(z+\Delta z) - V(z) = \mathrm{i}\omega L \Delta z I(z) \\
\Delta I(z) &= I(z+\Delta z) - I(z) = \mathrm{i}\omega C \Delta z V(z+\Delta z)
\end{aligned}
\right\} \tag{5-44}
$$

以上二式右端分别表示图 5-6 中 $L\Delta z$ 的端电压和 $C\Delta z$ 的支路电流. 当 Δz 非常小, 可将式 (5-44) 中 $\mathrm{i}\omega C\Delta z V(z+\Delta z)$ 用 Taylar 级数展开,

$$
\mathrm{i}\omega C\Delta z V(z+\Delta z) = \mathrm{i}\omega C\Delta z V(z) + \mathrm{i}\omega C(\Delta z)^2 V'(z) - \cdots
$$

当 $\Delta z \to 0$, 略去 $(\Delta z)^2$ 的高阶小量, 式 (5-44) 变为

$$
\left.\begin{aligned}
\lim_{\Delta z\to 0}\frac{V(z+\Delta z)-V(z)}{\Delta z}&=\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z}=\mathrm{i}\omega LI(z)\\
\lim_{\Delta z\to 0}\frac{I(z+\Delta z)-I(z)}{\Delta z}&=\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=\mathrm{i}\omega CV(z)
\end{aligned}\right\}\tag{5-45}
$$

式 (5-45) 就是均匀传输线方程式 (5-18).

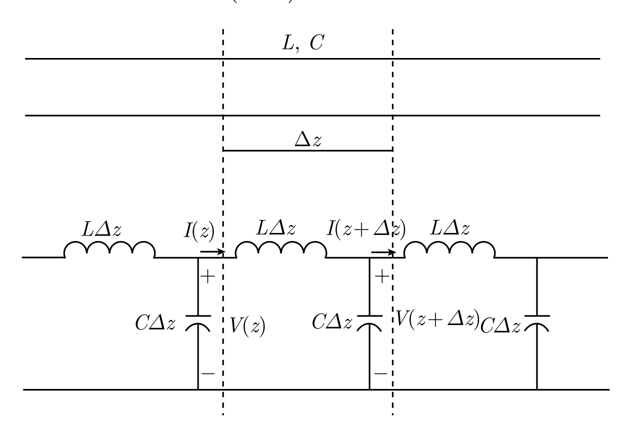


图 5-6　传输线的电感和电容

5.3.2　集中元件传输线的色散方程

实际电路中也可以由集中参数元件, 例如电感、电容组成传输线. 设每一小段长度为 l, 包含 L_0, C_0, 如图 5-7 所示. 利用 Kirchhoff 方程, 类似于式 (5-44) 可得

$$
\left.\begin{aligned}
V_n-V_{n+1}&=-\mathrm{i}\omega L_0 I_{n+1}\\
I_n-I_{n+1}&=-\mathrm{i}\omega C_0 V_n
\end{aligned}\right\}\tag{5-46}
$$

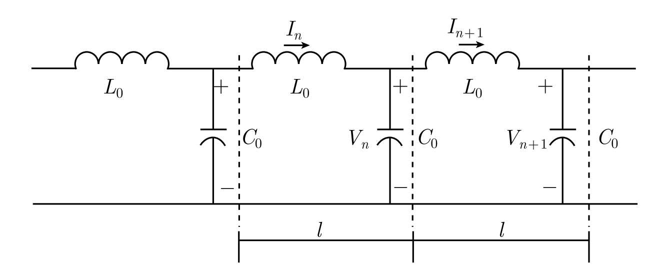


图 5-7　由 L_0, C_0 构成的集中元件传输线

对于沿＋ z 方向的行波 $\exp(\mathrm{i}kz)$, 设每一小段相移为 $\theta=kl$, 第 n 小段电压和电流记为

$$
\left.\begin{aligned}
V_n&=V_+\exp(\mathrm{i}n\theta)\\
I_n&=I_+\exp(\mathrm{i}n\theta)
\end{aligned}\right\}\tag{5-47}
$$

式中, V_+, I_+ 为幅值. 将式 (5-47) 代入式 (5-46) 得

$$\begin{aligned}
&V_+\left\{\exp(\mathrm{i}n\theta)-\exp\left[\mathrm{i}(n+1)\theta\right]\right\}=-\mathrm{i}\omega L_0 I_+\exp\left[\mathrm{i}(n+1)\theta\right]\\
&I_+\left\{\exp(\mathrm{i}n\theta)-\exp\left[\mathrm{i}(n+1)\theta\right]\right\}=-\mathrm{i}\omega C_0 V_+\exp(\mathrm{i}n\theta)
\end{aligned}$$

即

$$\left.\begin{aligned}
&V_+\left[\exp(-\mathrm{i}\theta)-1\right]+\mathrm{i}\omega L_0 I_+=0\\
&-\mathrm{i}\omega C_0 V_+-\left[1-\exp(\mathrm{i}\theta)\right]I_+=0
\end{aligned}\right\}\tag{5-48}$$

以上齐次方程欲有非零解, 其系数行列式需为零,

$$\begin{vmatrix}-\mathrm{i}\omega C_0 & \exp(\mathrm{i}\theta)-1\\ \exp(-\mathrm{i}\theta)-1 & \mathrm{i}\omega L_0\end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix}-\mathrm{i}\omega C_0 & \exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\theta}{2}\right)\cdot 2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2}\\ \exp\left(-\mathrm{i}\dfrac{\theta}{2}\right)\cdot\left(-2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2}\right) & \mathrm{i}\omega L_0\end{vmatrix}=0$$

由上式可得

$$\omega^2 L_0 C_0-4\sin^2\frac{\theta}{2}=0\Rightarrow\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\omega^2 L_0 C_0$$

令 $\omega_0=2/\sqrt{L_0C_0}$, 则有

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tag{5-49}$$

式 (5-49) 即为集中元件传输线的色散关系. 每一小段相移 θ 和频率 ω 关系如图 5-8 所示.

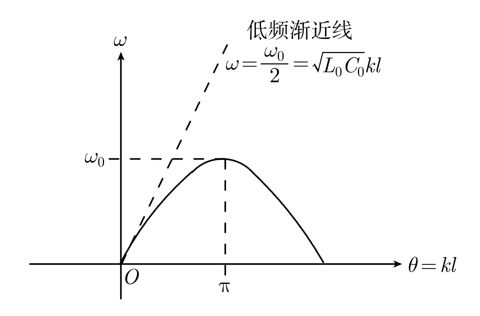


图 5-8 低通传输线的色散关系

以下讨论如图 5-7 所示集中元件传输线的频率特性.

情形一：低频情形. 当工作频率 $\omega\ll\omega_0$, 由式 (5-49) 得到

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\pm\sin\frac{\theta}{2}\approx\pm\frac{\theta}{2}=\pm\frac{kl}{2}\tag{5-50}$$

式中, + 表示波沿＋ z 传播, －表示波沿 $-z$ 传播. 低频时的色散曲线见图 5-8 中的直线 (渐近线). 由式 (5-49) 和式 (5-50) 得

$$k=\frac{2\omega}{l\omega_0}=\omega\sqrt{\frac{L_0}{l}}\cdot\sqrt{\frac{C_0}{l}}=\omega\sqrt{LC}$$

式中, $L=\sqrt{L_0/l}$, $C=\sqrt{C_0/l}$ 代表单位长度的电感和电容. 上式表明, 低频情形集中元件传输线的色散关系与均匀传输线相同, 即无色散.

情形二：高频情形. 当频率 $\omega>\omega_0$, 由式 (5-49) 得到

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}>1$$

这时相移 θ 为复数. 设

$$\theta=\theta_{\mathrm{R}}-\mathrm{j}\theta_{\mathrm{I}} \tag{5-51}$$

于是, 由式 (5-49) 得

$$\sin\frac{\theta_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\theta_{\mathrm{I}}}{2}=\sin\frac{\theta_{\mathrm{R}}}{2}\cosh\frac{\theta_{\mathrm{I}}}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta_{\mathrm{R}}}{2}\sinh\frac{\theta_{\mathrm{I}}}{2}=\frac{\omega}{\omega_0}$$

即

$$\sin\frac{\theta_{\mathrm{R}}}{2}\cosh\frac{\theta_{\mathrm{I}}}{2}=\frac{\omega}{\omega_0}$$
$$\cos\frac{\theta_{\mathrm{R}}}{2}\sinh\frac{\theta_{\mathrm{I}}}{2}=0$$

由上式得到

$$\begin{aligned}&\theta_{\mathrm{R}}=\pi\\&\theta_{\mathrm{I}}=2\cosh^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}\end{aligned} \tag{5-52}$$

将式 (5-51)、式 (5-52) 代入式 (5-47) 得

$$V_n=V_+\exp[\mathrm{i}n(\theta_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\theta_{\mathrm{I}})]=V_+\exp(-n\theta_{\mathrm{I}})\exp(\mathrm{i}n\theta_{\mathrm{R}})$$

上式表明, 当工作频率 $\omega>\omega_0$ 时沿集中元件传输线传播的波为倏逝波, 电压 (电流) 随着元件 L_0, C_0 小段数目 n 的增加迅速衰减. 所以, 如图 5-7 所示由 L_0, C_0 元件构成的传输线是一种低通传输线.

5.3.3 一般集中元件传输线

作为一般情形, 将图 5-6 中的电感 L_0 改成阻抗 Z_0, 电容 C_0 改成导纳 Y_0, 如图 5-9 所示. 由 Kirchhoff 节点和回路方程, 参照式 (5-46) 得

$$
\left.\begin{aligned}
V_n - V_{n+1} &= Z_0 I_{n+1} \\
I_n - I_{n+1} &= Z_0 V_n
\end{aligned}\right\} \tag{5-53}
$$

对于沿＋ z 方向的行波 $\exp(-\mathrm{j}kz)$, 同样可解得

$$
\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4}Z_0 Y_0, \quad \theta = kl \tag{5-54}
$$

式中, $\theta = kl$ 代表每一小段相移. 特别, 当 $Z_0 = -\mathrm{i}\omega L_0$, $Y_0 = -\mathrm{i}\omega C_0$, 就退化为图 5-7 的低通传输线.

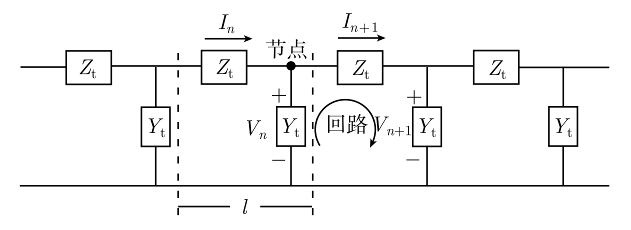
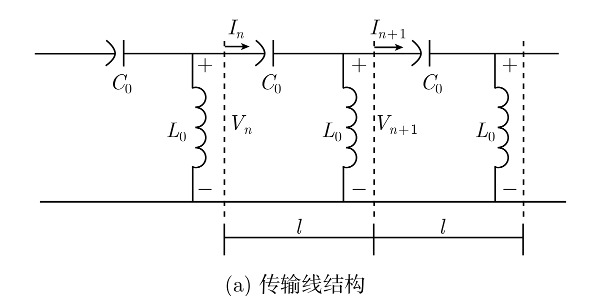


图 5-9　一般集中元件传输线

如果 $Z_0 = -1/(\mathrm{i}\omega C_0)$, $Y_0 = -1/(\mathrm{i}\omega L_0)$, 如图 5-10(a) 所示. 这时式 (5-54) 为

$$
\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4\omega^2 L_0 C_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \tag{5-55}
$$



(a) 传输线结构

(b) 色散曲线

图 5-10　集中元件高通传输线

式中,

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{L_0C_0}}$$

当工作频率 $\omega > \omega_0$ 时, 由式 (5-55) 可见 θ 为实数, 则波为行波. 当 $\omega < \omega_0$ 时, 由式 (5-55) 可见 $\sin^2(\theta/2) > 1$, θ 为复数; 令 $\theta = \theta_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\theta_{\mathrm{I}}$, 和式 (5-52) 分析同样, 这时传输线上为倏逝波. 所以, 如图 5-10(a) 所示为高通传输线, 其色散关系曲线如图 5-10(b) 所示.

5.4　传输线上波的反射和谐振

5.4.1　传输线上间断点的反射

平行平板波导中如果在 $z=0$ 两侧填充不同介质 μ_0,ε_0 和 μ_t,ε_t, 如图 5-11 所示. 设 TEM 波在其中传播. 就像平面波垂直入射到半空间界面一样, 在平行平板波导的分界面处将会产生反射和透射, 其反射和透射系数为

$$\begin{aligned} &R = \frac{\eta_t - \eta_0}{\eta_t + \eta_0}, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad \eta_t = \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \\ &T = \frac{2\eta_t}{\eta_t + \eta_0} \end{aligned} \tag{5-56}$$

式中 η_0,η_t 为两侧介质的波阻抗.

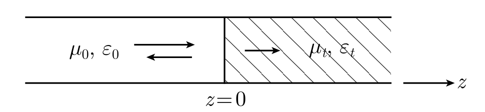
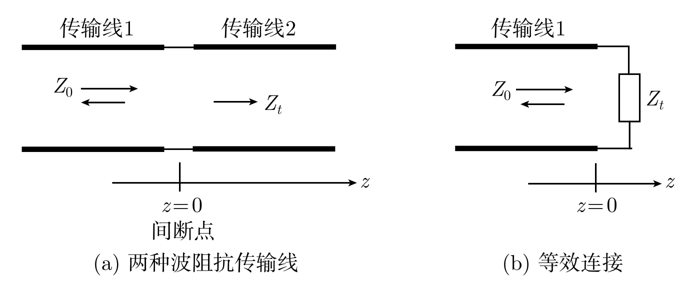


图 5-11　两种不同介质平行平板波导中波的反射

如果两个特征阻抗分别为 Z_0 和 Z_t 的传输线彼此连接, 如图 5-12(a) 所示, 在特征阻抗的不连续点处也会产生反射. 由于传输线方程来自 TEM 导行波模的方程, 所以式 (5-56) 也适用于传输线情形, 只是其中波阻抗用传输线特征阻抗代替. 所以, 传输线特征阻抗不连续点处的反射和透射系数为

$$R = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}, \quad T = \frac{2Z_t}{Z_t + Z_0} \tag{5-57}$$

也可以将传输线 2 看作是传输线 1 的负载, 负载阻抗就是传输线 2 的特征阻抗, 如图 (b), 因而反射系数如式 (5-25) 所示, 结果和式 (5-57) 一致.



(a) 两种波阻抗传输线 (b) 等效连接

图 5-12 两种波阻抗传输线间断点的反射

5.4.2 传输线的谐振模

设长度为 l 的传输线在 $z=0$ 端为短路, $z=-l$ 端为开路, 如图 5-13 所示. 这时传输线一端电压为零, 而另一端电流恒为零. 由传输线方程 (5-18) 得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V(z)}{\partial z}&=\mathrm{i}\omega LI(z)\\\frac{\partial I(z)}{\partial z}&=\mathrm{i}\omega CV(z)\end{aligned}\right\}\tag{5-58}$$

和边界条件

$$\left.\begin{aligned}V(z=0)=0\\I(z=-l)=0\end{aligned}\right\}\tag{5-59}$$

可求得其解为

$$\left.\begin{aligned}V(z)&=A\exp{(\mathrm{i}kz)}+B\exp{(-\mathrm{i}kz)}\\I(z)&=\frac{1}{Z_0}\left[A\exp{(\mathrm{i}kz)}-B\exp{(-\mathrm{i}kz)}\right]\end{aligned}\right\}\tag{5-60}$$

式中, $k=\omega\sqrt{LC}$. 由边界条件 (5-59) 可得 $B=-A$, 以及

$$\frac{A}{Z_0}[\exp(-\mathrm{i}kl)+\exp(\mathrm{i}kl)]=\frac{2A}{Z_0}\cos(kl)=0$$

即

$$\cos kl=0\Rightarrow k_nl=n\frac{\pi}{2}\tag{5-61}$$

图 5-13 一端短路另一端开路的传输线

式中, $n=1,3,5,\cdots$ 为奇数. 式 (5-61) 表明, 一端短路一端开路的传输线的谐振频率为

$$\omega_n=\frac{k_n}{\sqrt{LC}}=\frac{n\pi}{2l\sqrt{LC}}\tag{5-62}$$

考虑传输线上的电压分布. 将式 (5-61) 代入式 (5-60) 得电压幅值分布为

$$V_n = A[\exp(\mathrm{i}k_n z) - \exp(-\mathrm{i}k_n z)] = 2\mathrm{i}A\sin\frac{n\pi z}{2l}$$

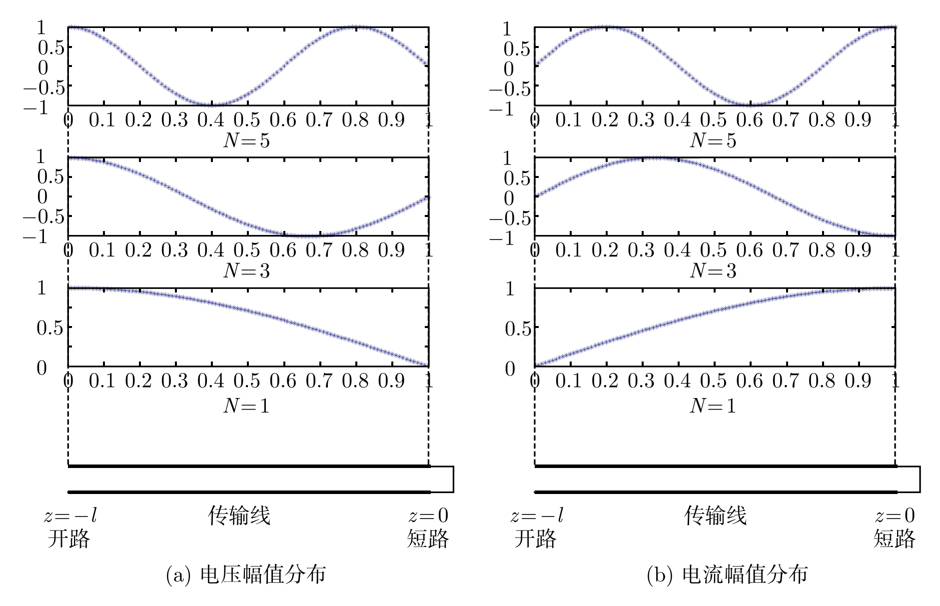
加入时间因子得

$$V_n(z,t) = 2\mathrm{i}A\sin\frac{n\pi z}{2l}\exp(-\mathrm{i}\omega_n t) = 2A\sin\frac{n\pi z}{2l}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\exp(-\mathrm{i}\omega_n t) \tag{5-63}$$

电流幅值分布为

$$V_n = \frac{A}{Z_0}[\exp(\mathrm{i}k_n z) + \exp(-\mathrm{i}k_n z)] = \frac{2A}{Z_0}\cos\frac{n\pi z}{2l} \tag{5-64}$$

当 $n = 1, 3, 5$ 时前三个模的电压和电流幅值分布如图 5-14 所示. 同样, 可以得到传输线两端开路或短路时的谐振特性 (见本章习题).



(a) 电压幅值分布　　(b) 电流幅值分布

图 5-14　一端短路一端开路传输线上的驻波

5.5　传输线模型的应用

5.5.1　半空间平面波反射和透射的模拟

应用传输线模型可以模拟一些物理过程. 设半空间介质如图 5-15(a) 所示. 入射平面波为

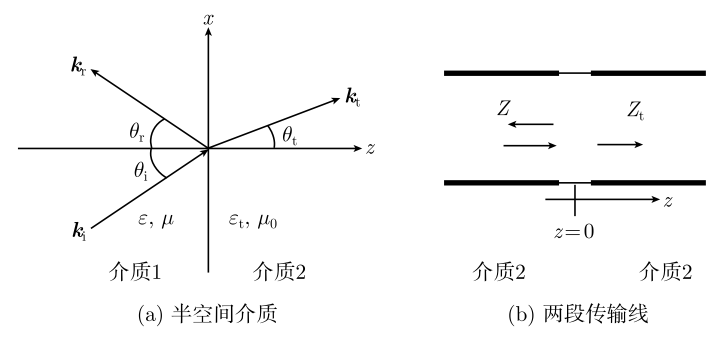
$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \hat{\boldsymbol{y}}E_0\exp(\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z z) \tag{5-65}$$

根据分界面 $z=0$ 处电场和磁场切向分量连续的边界条件可得

$$\left.\begin{aligned}&\exp(\mathrm{i}k_x x)+R\exp(\mathrm{i}k_{rx}x)=T\exp(\mathrm{i}k_{tx}x)\\&\frac{k_z}{\omega\mu}\exp(\mathrm{i}k_x x)-\frac{k_{rz}}{\omega\mu}R\exp(\mathrm{i}k_{rx}x)=\frac{k_{tz}}{\omega\mu_{\mathrm{t}}}T\exp(\mathrm{i}k_{tx}x)\end{aligned}\right\}\tag{5-66}$$

上述反射透射过程可以用特性阻抗分别为 Z 和 Z_{t} 的两段传输线来模拟, 如图 5-15(b) 所示, 对应物理量为 $V\sim E_y$, $I\sim H_x$. 以 V_+, I_+ 表示入射波, V_-, I_- 表示反射波. 于是, 式 (5-66) 两式左端第一项对应于传输线上入射电压 V_+ 和电流 I_+, 第二项对应于传输线上的反射波 V_-, I_-; 式 (5-66) 右端透射波则对应于另一段特征阻抗不同的传输线上的波. 图 5-15(b) 中 $z=0$ 左右两侧等效传输线的特性阻抗分别为

$$\left.\begin{aligned}&Z=\omega\mu/k_z,&&z<0\\&Z_{\mathrm{t}}=\omega\mu_{\mathrm{t}}/k_{tz},&&z>0\end{aligned}\right\}\tag{5-67}$$



(a) 半空间介质　　　(b) 两段传输线

图 5-15　半空间介质反射和透射的模拟

如果平面波垂直入射, 分界面两侧等效传输线特性阻抗分别为

$$\left.\begin{aligned}&Z=\frac{\omega\mu}{k}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},&&z<0\\&Z_{\mathrm{t}}=\frac{\omega\mu_{\mathrm{t}}}{k_{\mathrm{t}}}=\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\varepsilon_{\mathrm{t}}}},&&z>0\end{aligned}\right\}\tag{5-68}$$

实际上, 当两段特征阻抗不同的传输线连接时, 右端的传输线可以看作左端传输线的负载, 当负载阻抗不匹配就会产生反射.

5.5.2　理想导体表面反射及 Salisbury 吸波介质层

设平面波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp(\mathrm{i}k_0z)$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta_0}\exp(\mathrm{i}k_0z),\quad \eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

垂直入射到理想导体表面 ($z=0$), 如图 5-16(a) 所示. 由于理想导体表面电场切向分量为零, 对此可以采用一端短路的传输线模拟, 如图 5-16(b) 所示. 传输线特征阻抗为 0, 终端短路, 反射系数为 (-1). 这时在传输线上形成驻波, 在 $z=0$ 处, 电压 V 相当于电场 E_x 为波节, 而电流 I 相当于磁场 H_y 为波腹.

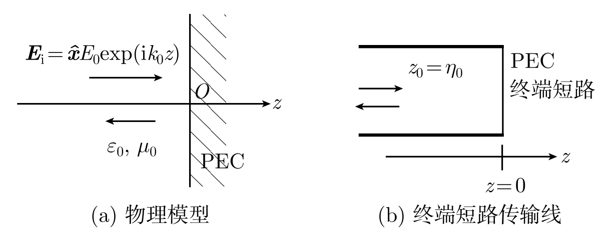


图 5-16　平面波垂直入射到理想导体表面

设在距离理想导体表面 $\lambda_0/4$ 处放一厚度为 d 的介质薄板, 介质参数为 (μ_1,ε_1), 如图 5-17(a) 所示, 其等效传输线如图 5-17(b) 所示. 以下考察薄介质板前、后界面 A 点和 B 点处的阻抗. 根据传输线公式 (5-31), 当 $z=0$ 处负载阻抗为 Z_L 时, $z=-l$ 处的输入阻抗为

$$Z(z=-l)=Z_0\frac{Z_\mathrm{L}-\mathrm{i}Z_0\tan(kl)}{Z_0-\mathrm{i}Z_\mathrm{L}\tan(kl)} \tag{5-69}$$

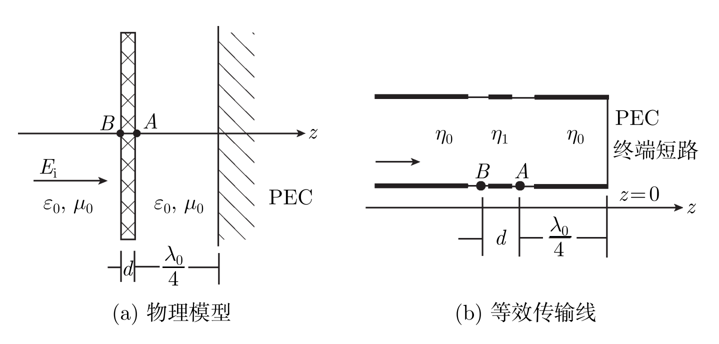


图 5-17　理想导体附近有介质板的情形

由于 $z=0$ 处为理想导体, 即等效传输线终端为短路, 负载阻抗 $Z_\mathrm{L}=0$. 介质板 A 面右侧为真空, 等效传输线特征阻抗为 $Z_0=\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. 在 $z=-\lambda_0/4$(即图 5-17 中 A 点) 处, $k_0l=(2\pi/\lambda_0)(\lambda_0/4)=\pi/2$, 代入式 (5-69) 得到 A 点输入阻抗为

$$Z\left(z=-\frac{\lambda_0}{4}\right)=\eta_0\frac{0-\mathrm{i}\eta_0\tan\dfrac{\pi}{2}}{\eta_0}\to-\infty \tag{5-70}$$

式 (5-70) 表明, 等效传输线在距离理想导体板 $\lambda_0/4$ 处的输入阻抗为无穷大, 相当于开路, 如图 5-18 所示.

对于图 5-17 中介质薄板, 其等效传输线的特征阻抗为 $Z_1=\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$, 如图 5-19 所示. 它的等效负载如式 (5-70) 所示为无穷大. 按照式 (5-31), 该段传输线的输入阻抗为

$$Z\left(z=-\frac{\lambda_0}{4}-d\right)=\eta_1\frac{Z\left(\dfrac{-\lambda_0}{4}\right)-\mathrm{i}\eta_1\tan(k_1d)}{\eta_1-\mathrm{i}Z\left(\dfrac{-\lambda_0}{4}\right)\tan(k_1d)}=\frac{\eta_1}{-\mathrm{i}\tan(k_1d)} \tag{5-71}$$

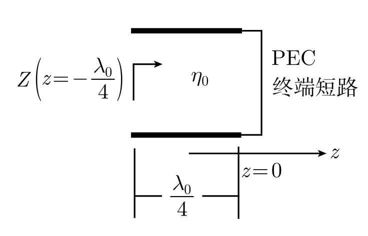


图 5-18 介质薄片右侧和理想导体之间的等效传输线

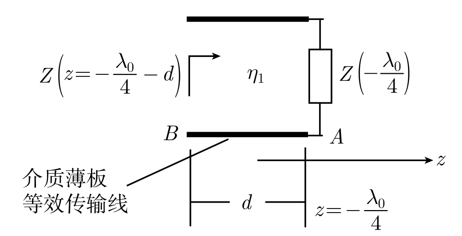


图 5-19 介质薄板的等效传输线

设介质板厚度 d 很薄, 满足

$$|k_1d|\ll 1,\quad \tan(k_1d)\approx k_1d \tag{5-72}$$

式 (5-72) 代入式 (5-71) 得

$$Z\left(z=-\frac{\lambda_0}{4}-d\right)\simeq\frac{\mathrm{i}\eta_1}{k_1d} \tag{5-73}$$

又设介质板电导率为 σ_1, 则相应介电系数 ε_1 变为复数, 即

$$\varepsilon_1=\varepsilon_{1\mathrm{R}}\left(1+\frac{\mathrm{i}\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1\mathrm{R}}}\right) \tag{5-74}$$

如果介质板为良导体, 则有

$$\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1\mathrm{R}}}\gg 1$$

于是, 式 (5-74) 变为

$$\varepsilon_1\simeq\frac{\mathrm{i}\sigma_1}{\omega}$$

上式代入式 (5-73) 得

$$Z\left(z=-\frac{\lambda_0}{4}-d\right)\simeq\frac{\mathrm{i}\eta_1}{k_1d}=\frac{\mathrm{i}\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\cdot d}=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_1d}\simeq\frac{1}{\sigma_1d}=R_1 \tag{5-75}$$

式 (5-75) 表明, 介质板等效传输线的输入阻抗近似为纯电阻 $R_1 = 1/(\sigma_1 d)$.

由于图 5-17 介质板左侧 (即图中 B 点) 半空间等效传输线的负载阻抗就是如式 (5-75) 所示电阻 R_1, 于是由式 (5-25), 其负载端反射系数为

$$\Gamma_{\mathrm{L}} = \frac{Z_{\mathrm{L}} - \eta_0}{Z_{\mathrm{L}} + \eta_0} = \frac{R_1 - \eta_0}{R_1 + \eta_0} \tag{5-76}$$

式中, η_0 为真空的特征阻抗. 欲达到无反射, 即 $\Gamma_{\mathrm{L}} = 0$, 可选择

$$R_1 = \eta_0 \tag{5-77}$$

由此可见, 在理想导体前 $\lambda_0/4$ 处放置良导体薄片 (介质板), 并适当选择介质板的厚度和电导率就可以达到无反射的目的, 亦即在理想导体和自由空间之间实现完全匹配. 上述结构的等效传输线如图 5-20 所示.

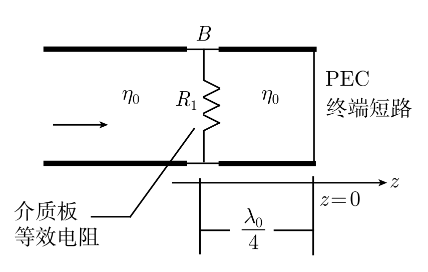


图 5-20　四分之一波长短路线和传输线之间的匹配电阻

下面给出图 5-17 中介质板参数选择的算例. 若取介质板参数为 $\mu_1 = \mu_0$, $\varepsilon_{1\mathrm{R}} = \varepsilon_0$, $\sigma_1 = 5\mathrm{S/m}$, 设工作频率 $f = 1\mathrm{GHz} = 10^9\mathrm{Hz}$, $\eta_0 = 377\mathrm{ohm}$, 由式 (5-75) 和式 (5-77) 可求得介质板的厚度为

$$d = \frac{1}{\sigma_1 \eta_0} = 0.53\mathrm{mm}$$

代入可验证介质板满足良导体条件,

$$\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1} = \frac{5}{2\pi \times 10^9 \times 8.85 \times 10^{-12}} \simeq 90 \gg 1$$

同时也满足介质板为薄板的条件, 即

$$|k_1 d| = \left|\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1\mathrm{R}}}} \cdot d\right| \simeq \left|\frac{2\pi \times 10^9}{3 \times 10^8} \times \sqrt{90} \times (0.53 \times 10^{-3})\right| \simeq 0.1 \ll 1$$

上述介质板的插入可以使入射波照射到理想导体表面时没有反射回波. 这种无反射薄介质层吸波结构又称为 Salisbury 层 (Salisbury sheet). 由于吸波层需放置在距离 PEC 板四分之一波长位置, 所以它的有效带宽很窄 (Kraus, Fleisch, 1999: 196).

5.5.3　线天线的电流分布

线天线可看作平行双导线开路端弯折的结果, 如图 5-21 所示. 当传输线负载端开路时, 由于端点反射使线上电压电流形成驻波, 开路端点处电流为零. 设线天

线长度为 l, 则天线上电流分布为

$$I(z) = I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right] \tag{5-78}$$

式中, z 为线天线长度方向坐标, $z=0$ 为其中点, $z=\pm l/2$ 为其两端点. 当天线长度 $l=\lambda/2$ 时为常用的半波天线, 其电流分布为

$$\begin{aligned} I(z) &= I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right] \\ &= I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} - k|z|\right) \\ &= I_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - k|z|\right) = I_0 \cos(k|z|), \quad |z| < \frac{\lambda}{4} \end{aligned} \tag{5-79}$$

在给定线天线上电流分布后, 便可计算辐射场.

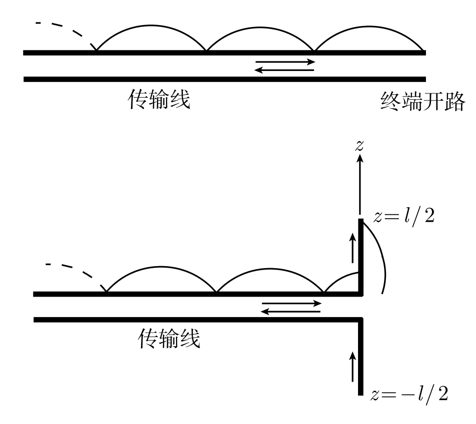


图 5-21　平行双导线开路端弯折

习　题

1. 由于电磁波在传输线上以确定速度传播, 当脉冲通过传输线时会产生时间延迟. 设同轴线单位长电感和电容分别为 0.20μH/m 和 60pF/m. 要求脉冲的时延等于 100ns, 试求所需同轴线的长度.

2. 几种介质的介电系数分别为聚苯乙烯泡沫塑料 (Styroform)$\varepsilon_r=1.03$, 聚苯乙烯 (Polystyrene)$\varepsilon_r=2.7$, 尼龙 (Nylon)$\varepsilon_r=3.8$. 导磁系数均为 $\mu_r=1$.

(1) 设同轴线尺寸为 $a=5$ mm, $b=15$ mm, 试求不同介质填充时传输线的特征阻抗.

(2) 平行双导线尺寸为 $a=5$ mm, 导线中心距离 $D=15$ mm, 试求不同介质填充时的特征阻抗.

(3) 微带尺寸为 $H=5$ mm, $W=15$ mm, 试求不同介质填充时的特征阻抗.

3. (1) 若传输线两端均为短路, 试导出其谐振频率公式, 并讨论线上的电压和电流的分布.

(2) 若传输线两端均为开路, 重复以上讨论.

4. 一段同轴线内外半径分别为 a 和 b, 其中介质参数为 ε, μ, 长为 l, 如图 5-22 所示, 两端均为短路, 形成谐振腔 (Kong, 2002: 356).

(1) 设腔内介质为真空 ε_0, μ_0, 试求此谐振腔的最低谐振频率 ω_0.

(2) 若腔内介质为聚乙烯 ($\varepsilon = 2.25\varepsilon_0$), 同轴线内外半径分别为 $a = 3\text{mm}$ 和 $b = 3.3\text{mm}$, 要求其最低谐振频率等于 1.5MHz, 试求同轴线的长度 l=?

5. 设传输线的一端为短路, 如图 5-23 所示. 在 $z = -l$ 处的阻抗为 $Z(-l) = -\text{i}Z_0\tan(kl)$.

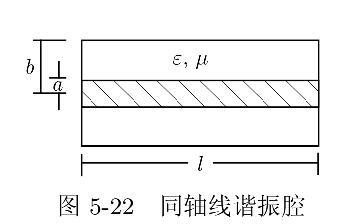


图 5-22　同轴线谐振腔

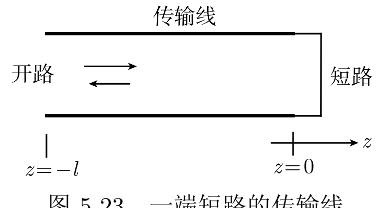


图 5-23　一端短路的传输线

(1) 若 $l = \lambda/2$, $kl = \pi$, 试求线上的电压和电流分布, 并画出线上电压和电流的分布.

(2) 若 $kl = 3\pi/2$, 重复以上结果.

6. 设无耗传输线长为 l. 若 $z = 0$ 负载端短路时输入端 $z = -l$ 的阻抗为 $Z(z = -l)_{\text{short}}$; 当 $z = 0$ 负载端开路时输入端的阻抗为 $Z(z = -l)_{\text{open}}$, 试证传输线的特征阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{Z(-l)_{\text{short}} \cdot Z(-l)_{\text{open}}}$$

7. 设传输线长 $l = \lambda/2$, 试求终端为短路和开路时的输入阻抗.

第 6 章　辐　　射

本章讨论势函数和辐射的推迟势公式, 给出空间为均匀介质时的 Green 函数和张量 Green 函数. 导出基本偶极子辐射公式. 对于远区场, 给出线电流天线的辐射公式, 结合电偶极子阵列分析阵列因子特性. 最后, 介绍互易定理及其用来确定半空间介质界面上电偶极子的辐射场.

6.1　势函数和推迟势公式

6.1.1　势函数和 Lorentz 规范条件

设空间为均匀介质, 介质参数 ε、μ 等于常数, 有源 Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\
&\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\Rightarrow\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\rho\Rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0
\end{aligned}\right\}\tag{6-1}$$

式中, 电荷、电流满足电荷守恒定律,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\tag{6-2}$$

由于任意矢量旋度的散度恒为零, 由式 (6-1) 第四式可引入矢量势, 令

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{6-3}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 为矢量势函数. 将式 (6-3) 代入式 (6-1) 第一式可得

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0\tag{6-4}$$

由于任意矢量梯度的旋度恒为零, 由式 (6-4) 可引入标量势, 令

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

即

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\tag{6-5}$$

式中, φ 为标量势函数. 将式 (6-3)、式 (6-5) 代入式 (6-1) 第二式可得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)+\mu\boldsymbol{J}\tag{6-6}$$

利用矢量旋度公式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$, 式 (6-6) 变为

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t}+\mu\boldsymbol{J}\tag{6-7}$$

或

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\mu\varepsilon\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t}-\mu\boldsymbol{J}\\&=\nabla\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]-\mu\boldsymbol{J}\end{aligned}\tag{6-8}$$

将式 (6-5) 代入式 (6-1) 第三式可得

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)=\left[\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial t}+\nabla^2\varphi\right]=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{6-9}$$

式 (6-9) 又可写为

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{6-10}$$

电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 共有六个分量, 势函数 $\boldsymbol{A}$、φ 只有四个分量. 所以用势函数描写电磁场减少了所需分量数目. 式 (6-8) 和式 (6-10) 为势函数 $\boldsymbol{A}$、φ 满足的方程, 是一组 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 相互耦合的偏微分方程.

根据场论中矢量场唯一性定理, 只有当矢量场的散度和旋度都给定后矢量场才被唯一确定. 以上所引进矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的旋度由式 (6-3) 给定, 其散度值尚未给定. 为了简化势函数方程 (6-8) 和式 (6-10), 可将 $\boldsymbol{A}$ 的散度设定为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\tag{6-11}$$

式中,

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\tag{6-12}$$

为介质中光速. 式 (6-11) 可重写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\tag{6-13}$$

式 (6-13) 称为 Lorentz 规范条件.

在 Lorentz 条件下式 (6-8) 和式 (6-10) 变为

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\tag{6-14}$$

式 (6-14) 为势函数的有源波动方程. 由此可见, 在设定 Lorentz 规范后势函数 $\boldsymbol{A}$、φ 满足的方程不再出现相互耦合, 成为形式相同的有源波动方程.

6.1.2 推迟势公式

无界均匀介质情况下有源波动方程 (6-14) 的推迟势解为 (郭硕鸿, 1997)

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}\mathrm{d}v'\\ \varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}\mathrm{d}v'\end{aligned}\right\}\tag{6-15}$$

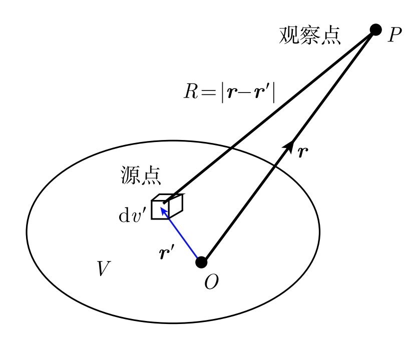


图 6-1 辐射公式中的源点和观察点

式中, $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 是观察点 (或场点)$\boldsymbol{r}$ 与源点 (或积分点)$\boldsymbol{r}'$ 之间的距离, 如图 6-1 所示. 推迟势解 (6-15) 给出空间电荷、电流及其辐射场之间的关系式. 在辐射问题中, 若已知电荷、电流分布即可用来计算空间电磁场分布. 这时先由电荷、电流分布用式 (6-15) 计算势函数, 再用式 (6-3)、式 (6-5) 计算空间电磁场.

6.2 时谐场 Green 函数

6.2.1 标量 Green 函数

在时谐场情形下, 设时谐因子为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 均匀介质中场方程 (6-1) 变为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0\end{aligned}\right\}\tag{6-16}$$

时谐场情形下势函数有源波动方程 (6-14) 可写为

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi+k^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\tag{6-17}$$

式 (6-17) 为 Helmholtz 方程, 式中,

$$k=\frac{\omega}{c}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

称为波数.

推迟势解 (6-15) 的时谐场形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-R/c\right)}{R}\mathrm{d}v'\\&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-R/c\right)\right]}{R}\mathrm{d}v'\\&=\left[\frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\exp\left(\mathrm{i}\omega R/c\right)\mathrm{d}v'\right]\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)\end{aligned}$$

式 (6-15) 中标量势的推迟解有同样形式. 省略时谐因子后得到

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\exp\left(\mathrm{i}kR\right)\mathrm{d}v'=\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\\\varphi(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_V\frac{q(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}\mathrm{d}v'=\frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_V\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\end{aligned}\right\}\tag{6-18}$$

式 (6-18) 右端积分号下的权函数

$$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\tag{6-19}$$

称为标量 Green 函数. 可以证明, Green 函数满足点源波动方程,

$$\nabla^2G\left(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'\right)+k^2G\left(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'\right)=-\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\tag{6-20}$$

所以, Green 函数的物理意义可看做点电荷所产生的标量势函数.

式 (6-20) 的推导如下：首先设式 (6-17) 第二式中激励源为点电荷, 且位于坐标原点, 即 $\boldsymbol{r}'=0$, 电荷密度 $\rho\left(\boldsymbol{r}\right)=\varepsilon\delta\left(r\right)$, 其中 $r=\left|\boldsymbol{r}\right|$ 代表观察点到坐标原点的距离. 于是, 式 (6-18) 第二式变为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_V\varepsilon\delta\left(\boldsymbol{r}'\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\mathrm{d}v'=\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}=G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'=0\right)$$

以上结果代入式 (6-17) 第二式得到

$$\nabla^2G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'=0\right)+k^2G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'=0\right)=-\delta\left(r\right)$$

如果点电荷不是位于坐标原点, 即 $\boldsymbol{r}' \neq 0$, 距离 r 应改为 $r = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$. 上式改写为

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$$

这就是式 (6-20). 证毕.

6.2.2 从势函数计算电磁场

在用式 (6-18) 计算势函数后, 可以由式 (6-3)、式 (6-5) 从势函数计算电磁场, 即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega \boldsymbol{A} - \nabla\varphi \end{aligned}\right\} \tag{6-21}$$

另外, 也可以用式 (6-16) 第二式用磁场计算电场,

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J} \tag{6-22}$$

如果观察点位于 $\rho, \boldsymbol{J}$ 为零的无源区, 上式变为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{6-23}$$

式 (6-23) 对电场 $\boldsymbol{E}$ 的计算只用到矢量势 $\boldsymbol{A}$. 所以, 如果观察点在辐射源以外, 只需由电流 $\boldsymbol{J}$ 出发计算矢量势 $\boldsymbol{A}$, 然后用式 (6-21) 第一式计算磁场 $\boldsymbol{H}$, 用式 (6-23) 计算电场 $\boldsymbol{E}$.

6.2.3 张量 Green 函数

由式 (6-16) 中的旋度方程,

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{H} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \end{aligned}$$

对于均匀介质, 将上式中第一式取旋度后再将第二式代入消去 $\boldsymbol{H}$ 可得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - k^2 \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{J}$$

式中, $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$. 上式为 $\boldsymbol{E}$ 的有源波动方程. 它的解也可以改用张量 Green 函数表示如下:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu \iiint \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}v' \tag{6-24}$$

式中, 张量 Green 函数 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\vec{r}, \vec{r'})$ 的物理意义可理解为它与电流的点乘 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 结果代表电流 $\boldsymbol{J}$ 所产生的电场.

式 (6-24) 的导出过程如下. 将式 (6-18)~ 式 (6-20) 代入式 (6-22) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J}\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\left\{\nabla\times\left[\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\right]\right\}-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J}\end{aligned}\tag{6-25}$$

注意到式 (6-25) 中算子 ∇ 的求导是对观察点 $\boldsymbol{r}$, 而不是作用在源点 $\boldsymbol{r}'$, 所以式 (6-25) 中

$$\begin{aligned}&\nabla\times\left(\nabla\times\left[\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\right]\right)\\&=\iiint\limits_V\nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\,\mathrm{d}v'\\&=\iiint\limits_V\left\{\nabla[\nabla\cdot(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'))]-\nabla^2[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\right\}\mathrm{d}v'\\&=\iiint\limits_V\left\{\nabla[(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'))]-\left[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\right\}\mathrm{d}v'\end{aligned}$$

利用 Green 函数满足点源波动方程 (6-20), 以及矢量公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

上式可写为

$$\begin{aligned}&\nabla\times\left\{\nabla\times\left[\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\right]\right\}\\&=\iiint\limits_V\left(\nabla\{[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\}-\left[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\right)\mathrm{d}v'\\&=\iiint\limits_V\left([\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla]\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\left[-k^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]\right\}\right)\mathrm{d}v'\\&=\iiint\limits_V\left\{[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla]\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')k^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\right\}\mathrm{d}v'\\&=\iiint\limits_V\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\left[\nabla\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}k^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\right\}\mathrm{d}v'+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 为单位张量, $\nabla\nabla$ 为并矢 (张量) 微分算子, 其矩阵形式分别为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \nabla\nabla=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}&\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}&\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z}\\\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}&\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}&\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\\\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial x}&\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial y}&\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\end{bmatrix}$$

前式代入式 (6-25) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\left(\nabla\times\left[\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\right]\right)-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J}\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}k^2\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'+\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J}-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{J}\\&=\mathrm{i}\omega\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'\end{aligned}\tag{6-26}$$

式中, 令

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\tag{6-27}$$

称为无界空间张量 Green 函数. 于是, 式 (6-26) 可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'\\&=\mathrm{i}\omega\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'\\&=\mathrm{i}\omega\mu\iiint\limits_V\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'\end{aligned}$$

上式的后一等式中用了等式 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$, 这是由于如式 (6-27) 所示张量 Green 函数 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 具有对称性, 即其矩阵元素 $G_{ij}=G_{ji}$. 上式即为式 (6-24). 证毕.

6.3　电偶极子辐射公式

电偶极子是辐射的一种基本单元. 电偶极子为一段小电流元 Il, 如图 6-2 所示, 其电流密度写为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=\hat{\boldsymbol{z}}Il\delta(\boldsymbol{r}')\tag{6-28}$$

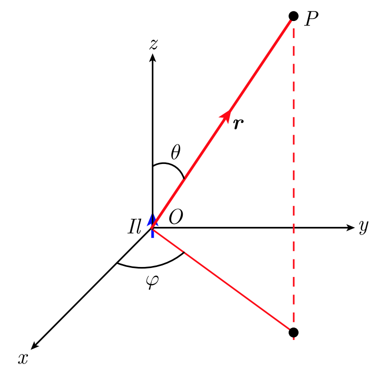


图 6-2　电偶极子

考虑包括近区在内的电偶极子辐射. 将电偶极子电流密度 (6-28) 代入一般公式 (6-18), 根据 δ 函数挑选性得到辐射场势函数,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\mu\iiint\limits_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\\&=\mu\iiint\limits_V \hat{\boldsymbol{z}}Il\delta(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}v'\\&=\hat{\boldsymbol{z}}Il\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\tag{6-29}$$

于是, 由式 (6-21) 可得辐射场,

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\left[\hat{\boldsymbol{z}}Il\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]=-\hat{\boldsymbol{z}}Il\times\nabla\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]$$

式中,

$$\nabla\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\nabla r=\hat{\boldsymbol{r}}\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}$$

所以电偶极子磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=-\hat{\boldsymbol{z}}Il\times\nabla\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\\&=-\hat{\boldsymbol{z}}Il\times\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right)\\&=-\hat{\boldsymbol{\varphi}}vkIl\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta\end{aligned}\tag{6-30}$$

按照式 (6-23) 可得电场,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right]\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\left[-k^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right]\end{aligned}$$

将式 (6-29) 代入得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\left[-k^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right]\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\left(-k^2\hat{\boldsymbol{z}}Il\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}-\nabla\left\{\nabla\cdot\left[\hat{\boldsymbol{z}}Il\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\right\}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}Il\mu}{\omega\mu\varepsilon}\left(-k^2\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} - \nabla\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\right\}\right) \tag{6-31}$$

式中,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right] = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right) = \left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\cos\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}$$

根据球坐标中公式,

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$$

所以在式 (6-31) 中,

$$\begin{aligned}
&\nabla\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\right\} \\
&= \nabla\left[\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\cos\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right] \\
&= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(vk - \frac{1}{r}\right)\cos\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\cos\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right] \\
&= \hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)^2\right]\cos\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[\hat{\boldsymbol{r}}\left(-k^2 - \frac{2\mathrm{i}k}{r} + \frac{2}{r^2}\right)\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\right]
\end{aligned}$$

代入式 (6-31) 得到电偶极子电场,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{-\mathrm{i}Il\mu}{\omega\mu\varepsilon}\left\{-k^2\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} - \nabla\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}Il\mu}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[k^2\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right) + \hat{\boldsymbol{r}}\left(-k^2 - \frac{2\mathrm{i}k}{r} + \frac{2}{r^2}\right)\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}Il\mu}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}k^2\left[\hat{\boldsymbol{r}}\left(-\frac{2\mathrm{i}}{kr} + \frac{2}{k^2r^2}\right)\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\theta\right] \\
&= -\mathrm{i}\omega Il\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr} + \left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} + \left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}
\end{aligned} \tag{6-32}$$

式 (6-30) 和式 (6-32) 是电偶极子的辐射磁场和电场. 该公式适用于包括电偶极子近场的计算.

6.4 磁偶极子辐射公式

6.4.1 对偶原理

引入磁荷、磁流后有源 Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\\\nabla\times\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\}\tag{6-33}$$

如果区域内具有介质分界面, 则边界条件变为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)&=\boldsymbol{J}_\mathrm{s}\\-\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)&=\boldsymbol{M}_\mathrm{s}\end{aligned}\right\}\tag{6-34}$$

显然. 在作以下替换时上述方程和边界形式不变:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}\\&\mu\to\varepsilon,\qquad \varepsilon\to\mu\\&\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{6-35}$$

这一关系称为对偶关系, 既可用于电磁场公式中电场和磁场二者之间的对偶转换, 也可用于两个电磁问题之间有关公式之间的对偶转换.

对于无界空间辐射问题, 设问题 a 和问题 b 分别含有电流 $\boldsymbol{J}$ 和磁流 $\boldsymbol{M}$, 场方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}_a&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_a+\boldsymbol{J}\\\nabla\times\boldsymbol{E}_a&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_a\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}_b&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_b\\\nabla\times\boldsymbol{E}_b&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\}\tag{6-36}$$

式中, 下标 a 和 b 代表两个问题中的电磁场. 根据对偶关系, 由电流源过渡为磁流源的辐射可用以下对偶关系:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}\\&\varepsilon\to\mu,\quad \mu\to\varepsilon\\&\boldsymbol{E}_a\to\boldsymbol{H}_b,\quad \boldsymbol{H}_a\to-\boldsymbol{E}_b\end{aligned}\right\}\tag{6-37}$$

反之, 由磁流源过渡为电流源的辐射对偶关系为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{J}\\&\varepsilon\to\mu,\quad \mu\to\varepsilon\\&\boldsymbol{E}_b\to\boldsymbol{H}_a,\quad \boldsymbol{H}_b\to-\boldsymbol{E}_a\end{aligned}\right\}\tag{6-38}$$

如前所述, 由方程和对偶关系, 设问题 a 为电流源辐射, 问题 b 为磁流源辐射, 两者的势函数分别为 $\boldsymbol{A}$, φ 和 $\boldsymbol{F}$ 和 φ_{m}(这里略去下标 a 和 b), 则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}_a&=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}_a&=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_b&=\frac{-1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{H}_b&=-\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}-\nabla\varphi_{\mathrm{m}}\end{aligned}\right\}\tag{6-39}$$

以上引入了磁流辐射情形的矢量和标量势函数 $\boldsymbol{F}$ 和 φ_{m}. 相应的推迟势公式也可利用对偶关系式 (6-37) 得到,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})&=\varepsilon\iiint\limits_V\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\end{aligned}\tag{6-40}$$

标量势有类似形式.

另外, 如果观察点在辐射源之外, 在获得矢量势以后, 也可以利用无源区电场与磁场之间关系 (6-23) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_a&=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}_a=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{H}_b&=\frac{-\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{E}_b=\frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}\end{aligned}\tag{6-41}$$

式 (6-41) 只用到矢量势, 计算方便, 但是仅在无源区适用.

当电流和磁流同时存在时, 其辐射场是二者之和,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_a+\boldsymbol{E}_b=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}_a+\boldsymbol{H}_b=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}\end{aligned}\right\}\tag{6-42}$$

6.4.2 磁偶极子辐射

引入磁荷、磁流后, 磁偶极子即为一小段磁流元, 其磁流密度为

$$\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{r}'\right)=\hat{\boldsymbol{z}}I_{\mathrm{m}}l\delta\left(\boldsymbol{r}'\right)$$

式中, I_{m} 为磁流强度. 为了获得磁偶极子的辐射场, 根据电偶极子的电磁场公式 (6-30)、式 (6-32),

$$\boldsymbol{H}=-\hat{\varphi}\mathrm{i}kIl\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta$$

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\omega Il\mu\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}$$

利用对偶关系 (6-37), 便可由上式得到磁偶极子的电磁场为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \hat{\varphi}\mathrm{i}kI_\mathrm{m}l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta \\ \boldsymbol{H} &= -\mathrm{i}\omega I_\mathrm{m}l\varepsilon\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}\end{aligned}\right\} \tag{6-43}$$

该公式适用于包括近区的磁偶极子电磁场计算.

6.4.3　圆电流辐射

磁偶极子的另一种基本模型为小电流回路 (圆形电流半径为 a). 圆电流在 xoy 面内, 中心位于坐标原点, 如图 6-3 所示, 其电流密度为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = \hat{\boldsymbol{\varphi}}'I\delta(\rho'-a)\delta(z') \tag{6-44}$$

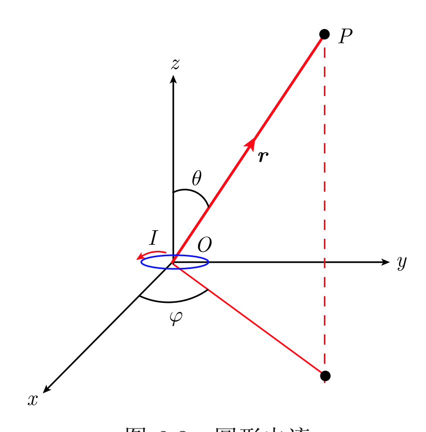


图 6-3　圆形电流

将式 (6-44) 代入势函数公式 (6-18), 根据 δ 函数挑选性得到辐射场势函数,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \mu\iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}\mathrm{d}v' \\ &= \mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\infty}\rho'\mathrm{d}\rho'\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\boldsymbol{\varphi}}'I\delta(\rho'-a) \\ &\quad\cdot\delta(z')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}dz'\end{aligned} \tag{6-45}$$

为了计算积分, 对于圆形电流, 需注意式 (6-45) 中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \hat{\boldsymbol{x}}r\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}r\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}r\cos\theta \\ \boldsymbol{r}' &= \hat{\boldsymbol{x}}a\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}a\sin\varphi\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= |\hat{\boldsymbol{x}}(r\sin\theta\cos\varphi-a\cos\varphi')+\hat{\boldsymbol{y}}(r\sin\theta\sin\varphi-a\sin\varphi')+\hat{\boldsymbol{z}}r\cos\theta| \\ &= \sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi-a\cos\varphi')^2+(r\sin\theta\sin\varphi-a\sin\varphi')^2+(r\cos\theta)^2} \\ &= r\sqrt{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')} \\ &= r\sqrt{1+\xi^2-2\xi\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')}\end{aligned} \tag{6-46}$$

式中, $\xi = a/r$. 记式 (6-45) 等式右端积分号下标量 Green 函数为

$$f(\xi)=\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|},\quad \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|=r\sqrt{1+\xi^2-2\xi\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}$$

然后, 再将式 (6-45) 右端积分号下标量 Green 函数在 $\xi=(a/r)\ll 1$(即圆环半径远小于观察点距离) 条件下展开为 Taylar 级数并取其前两项, 得到

$$f\left(\xi\right)\simeq f\left(0\right)+\xi\left[\frac{\mathrm{d}f\left(\xi\right)}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=0}$$

式中,

$$f\left(0\right)=f\left(\xi\right)|_{\xi=0}=\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f\left(\xi\right)}{\mathrm{d}\xi}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right]\\&=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\left[\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}{\mathrm{d}\xi}\\&=\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\cdot r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\sqrt{1+\xi^2-2\xi\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}\\&=\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\cdot\frac{r}{2}\frac{2\xi-2\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}}\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f\left(\xi\right)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}&=\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\cdot\frac{r}{2}\left.\frac{2\xi-2\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}}\right|_{\xi=0}\\&=-\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\cdot r\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\\&=\left(1-\mathrm{i}kr\right)\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\end{aligned}$$

于是可得

$$\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\simeq\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}+\frac{a}{r}\left(1-\mathrm{i}kr\right)\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\tag{6-47}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}'=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi'$, 将式 (6-47) 代入式 (6-45) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}\right)&=\mu\iiint\limits_V\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}'\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\mathrm{d}v'\\&=\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\infty}\rho'\mathrm{d}\rho'\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}'I\delta(\rho'-a)\delta(z')\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\mathrm{d}z'\\&=\mu aI\int_0^{2\pi}\left(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi'\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}+\frac{a}{r}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\mathrm{d}\varphi'\\
&=\mu a I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\int_0^{2\pi}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi')\\
&\quad\cdot\left[1+\frac{a}{r}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')\right]d\varphi'\\
&=\mu a I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\int_0^{2\pi}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi')\\
&\quad\cdot\left[\frac{a}{r}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')\right]\mathrm{d}\varphi' \qquad (6\text{-}48)
\end{aligned}
$$

式中, 积分

$$
\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin\varphi+\sin(2\varphi'-\varphi)]\,d\varphi'=\pi\sin\varphi
$$

$$
\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos\varphi+\cos(2\varphi'-\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi'=\pi\cos\varphi
$$

代入式 (6-48) 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\mu a I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\int_0^{2\pi}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi')\left[\frac{a}{r}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')\right]\mathrm{d}\varphi'\\
&=\mu\pi a^2 I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r^2}(1-\mathrm{i}kr)(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi)\sin\theta\\
&=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\mu\pi a^2 I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r^2}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta\\
&=\hat{\boldsymbol{\varphi}}A_\varphi \qquad (6\text{-}49)
\end{aligned}
$$

以上用到柱坐标单位矢量公式 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi$. 式 (6-49) 代入辐射场公式 (6-21) 得圆形电流的磁场为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}&=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}\\
&=\frac{1}{\mu}\left[\hat{\boldsymbol{r}}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)\right)-\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\\
&=-k^2\pi a^2 I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta\right.\\
&\quad\left.+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\} \qquad (6\text{-}50)
\end{aligned}
$$

根据 Lorentz 条件式 (6-13), $\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\omega\mu\varepsilon\varphi=0$, 即 $\varphi=\nabla\cdot\boldsymbol{A}/(\mathrm{i}\omega\mu\varepsilon)$. 由圆形电流矢量势 (6-49) 可得

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=0
$$

可见圆形电流的标量势 $\varphi = 0$. 代入辐射场公式 (6-21) 得电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\varphi = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A} \\ &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}\mathrm{i}\omega\mu\pi a^2 I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r^2}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta \\ &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}\omega\mu k\pi a^2 I\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta\end{aligned} \tag{6-51}$$

以上结果和式 (6-43) 相同, 表明一小段磁流元和圆形电流的辐射为等价. 而且, 磁流元和圆形电流的对应关系为 $\mathrm{i}kI_{\mathrm{m}}l = \omega\mu k\pi a^2 I$ 或 $-\mathrm{i}\omega I_{\mathrm{m}}l\varepsilon = -k^2\pi a^2 I$, 即

$$I_{\mathrm{m}}l = -\mathrm{i}\omega\mu I\pi a^2 \tag{6-52}$$

由此可见, 圆形电流辐射等同于一小段磁流的辐射.

6.4.4 圆磁流辐射

如上所述, 圆形电流辐射等同于小段磁流的辐射, 如图 6-4(a) 所示, 且对应关系为式 (6-52). 根据对偶原理, 圆形磁流可以等效为电偶极子的辐射, 如图 6-4(b) 所示. 按照对偶关系式 (6-37) 和式 (6-50)、式 (6-51), 圆形磁流的辐射为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= k^2 I_{\mathrm{m}}\pi a^2\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\} \\ \boldsymbol{H} &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}\omega\varepsilon kI_{\mathrm{m}}\pi a^2\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{6-53}$$

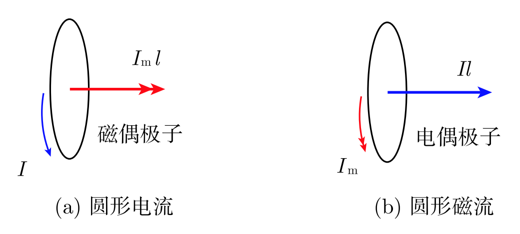
已知一小段电流元的辐射为式 (6-30) 和式 (6-32), 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}}\mathrm{i}kIl\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta \\ \boldsymbol{E} &= -\mathrm{i}\omega Il\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}\end{aligned} \tag{6-54}$$

比较可得 $\omega\varepsilon kI_{\mathrm{m}}\pi a^2 = -\mathrm{i}kIl$ 或 $k^2 I_{\mathrm{m}}\pi a^2 = -\mathrm{i}\omega Il\mu$, 即

$$Il = \mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}}\pi a^2 \tag{6-55}$$

注意：式 (6-52) 和式 (6-55) 右端系数分别包含虚数 $(-\mathrm{i})$ 和 i, 在时谐场情形表示圆形电 (磁) 流和小段磁 (电) 流之间具有相位差.



(a) 圆形电流　　(b) 圆形磁流

图 6-4　圆形电流和圆形磁流的对偶

6.5　远区场近似

6.5.1　远区条件和电流矩矢量

对于辐射问题, 当观察点满足以下远区条件:

$$\left.\begin{array}{c}\text{场点距离}r \gg \text{源的尺寸}D \\ kr \gg 1, \quad r \gg \lambda(\text{波长}) \\ \dfrac{kD^2}{r} = 2\pi\dfrac{D^2}{\lambda r} \ll 1, \quad r \gg 2\pi\dfrac{D^2}{\lambda}\end{array}\right\} \tag{6-56}$$

观察点到源点的距离可近似为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= \sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \\ &= \sqrt{r^2 - 2\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r} + r'^2} \\ &\simeq r\sqrt{1 - 2\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &\simeq r\left(1 - \frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{2r^2}\right) \\ &\simeq r - \boldsymbol{r}'\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned} \tag{6-57}$$

式中, $\boldsymbol{r}'\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$ 为观察点到坐标原点和到源点的程差, 如图 6-5 所示. 于是 Green 函数 (6-19) 可近似为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \simeq \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\exp(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}') \tag{6-58}$$

式中, $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{r}}$ 是远区波矢量. 式 (6-58) 表明, 远区 Green 函数可以表示为球面波距离因子 $[\exp(\mathrm{i}kr)]/(4\pi r)$ 和方向因子 $\exp(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}')$ 的乘积.

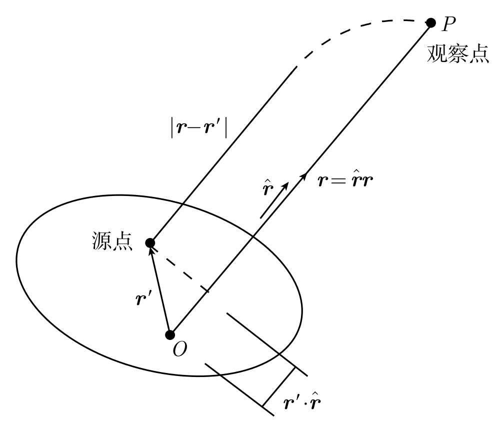


图 6-5 远区的程差

下面讨论远区条件和辐射源尺寸的关系. 式 (6-57) 代入式 (6-58) 指数函数因子, 略去 $r'^2/(2r)$ 一项意味要求 $\exp\left[\mathrm{i}kr'^2/(2r)\right] \approx 1$. 这就要求满足 $kr'^2/(2r) < 1/8(1/8\text{弧度} = 7.16°)$. 由于 $(r')_{\max} = D/2$, D 为辐射源的最大尺寸, 即有

$$k\frac{(D/2)^2}{2r} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{D^2}{8r} < \frac{1}{8}, \quad r > 2\pi\frac{D^2}{\lambda} \tag{6-59}$$

式 (6-59) 就是远区条件 (6-56) 的第三式.

式 (6-58) 代入式 (6-18) 得到远区辐射场的势函数为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \mu\iiint\limits_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,G(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v' \\ &\simeq \mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\iiint\limits_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'\end{aligned} \tag{6-60}$$

定义电流矩矢量为

$$\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) = \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}v' \tag{6-61}$$

它与电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 及观察方向有关, 与观察距离 r 无关. 于是式 (6-60) 可写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\iiint\limits_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,G(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v' = \mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) \tag{6-62}$$

由势函数计算电磁场见式 (6-21), 即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}\end{aligned}\right\} \tag{6-63}$$

对于远区场, 式 (6-63) 中算子 ∇ 可替换为

$$\nabla \to \mathrm{i}\boldsymbol{k} \tag{6-64}$$

式中, $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{r}}$.

以上替换关系的证明如下. 以 $\boldsymbol{A}$ 的散度为例,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\right] &= \left\{\nabla\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\right\}\cdot\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) + \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\nabla\cdot\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\\ &\simeq \left[\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\right]\cdot\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\\ &= \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\right]\end{aligned}$$

上式运算中对于远区场略去 $1/r^2$ 项. 可见上式中算子 ∇ 可替换 $\mathrm{i}\boldsymbol{k}$. 对于旋度运算有类似推导. 证毕.

将式 (6-64)、式 (6-62) 代入式 (6-63) 得远区场,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \frac{\mathrm{i}}{\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\\ &= \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\\ &= \mathrm{i}k\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[\hat{\boldsymbol{\varphi}}f_\theta(\theta,\varphi) - \hat{\boldsymbol{\theta}}f_\varphi(\theta,\varphi)\right]\\ \boldsymbol{E} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}\\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\varepsilon\mu}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A})\\ &= \frac{-\mathrm{i}k^2}{\omega\varepsilon\mu}\left[\hat{\boldsymbol{k}}\left(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{A}\right) - \boldsymbol{A}\right]\\ &= -\mathrm{i}\omega\left[\hat{\boldsymbol{k}}\left(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{A}\right) - \boldsymbol{A}\right]\\ &= \mathrm{i}\omega\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}}A_\varphi\right)\\ &= \mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta(\theta,\varphi) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}f_\varphi(\theta,\varphi)\right]\end{aligned}\right\} \tag{6-65}$$

由式 (6-65) 可见, 远区场的电场和磁场之间满足如下关系:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

这一特性与平面波相似.

远区场的平均能流密度为

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S}\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right\} \\ &= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|f_\theta|^2+|f_\varphi|^2\right)\end{aligned} \tag{6-66}$$

以上分析表明, 远区场的计算可以先求得电流矩矢量 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$, 特别是 f_θ, f_φ 分量, 然后代入式 (6-65) 和式 (6-66) 便可得到远区电磁场和能流.

6.5.2 电偶极子的远区场：任意取向情形

先计算沿 z 方向电偶极子的远区场. 将式 (6-28) 代入式 (6-61), 并应用 δ 函数挑选性得到电流矩矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) &= \iiint \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}v' \\ &= \hat{\boldsymbol{z}}\iiint Il\delta\left(\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}'\right)\mathrm{d}v' = \hat{\boldsymbol{z}}Il\end{aligned}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$, 代入上式得电流矩矢量的 θ, φ 分量为

$$\begin{aligned}f_\theta(\theta,\varphi) &= -Il\sin\theta \\ f_\varphi(\theta,\varphi) &= 0\end{aligned}$$

由式 (6-65) 得远区场.

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}f_\theta(\theta,\varphi) = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu Il\sin\theta\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r} \\ \boldsymbol{H} &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}\ \mathrm{i}k\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}f_\theta(\theta,\varphi) = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}\mathrm{i}kIl\sin\theta\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\end{aligned}\right\} \tag{6-67}$$

由电偶极子辐射场公式 (6-32) 略去 $1/(kr)$, $1/(kr)^2$ 项也可获得式 (6-67).

考虑电偶极子电流任意取向的情形, 如图 6-6(a) 所示. 设电偶极子的电流密度为

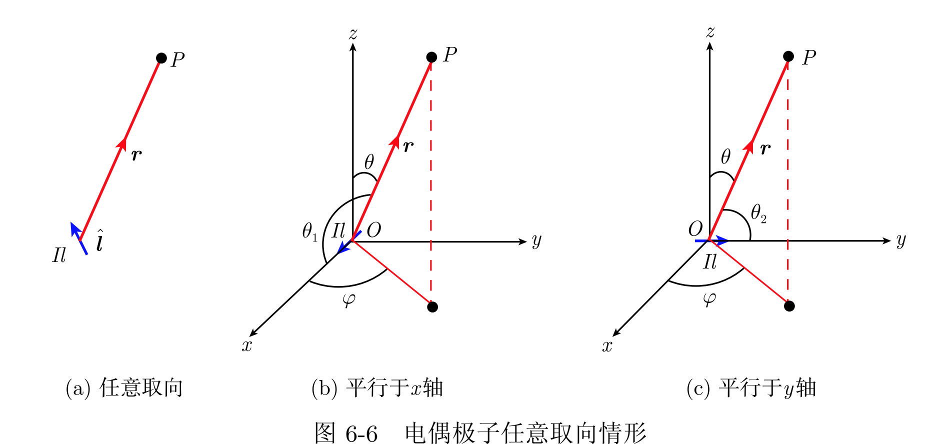
$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}'\right)=\hat{\boldsymbol{l}}Il\delta\left(\boldsymbol{r}'\right) \tag{6-68}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{l}}$ 为电流方向单位矢. 电流矩矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) &= \iiint \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}v' \\ &= \hat{\boldsymbol{l}}\iiint Il\delta\left(\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}'\right)dv' = \hat{\boldsymbol{l}}Il\end{aligned}$$

势函数为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) \\
&= \hat{\boldsymbol{l}} Il\mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-69}
$$



(a) 任意取向　　(b) 平行于x轴　　(c) 平行于y轴

图 6-6　电偶极子任意取向情形

利用远区情形的算子关系,

$$
\nabla \to \mathrm{i}\boldsymbol{k} = \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}} \tag{6-70}
$$

远区辐射场的磁场为

$$
\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} = \mathrm{i}kIl\left(\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{l}}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-71}
$$

根据远区辐射场具有平面波的特性,

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{E} &= -\eta\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}
\end{aligned}\right\} \tag{6-72}
$$

式中, $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为波阻抗, 所以远区辐射场的电场为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\eta\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H} \\
&= -\mathrm{i}kIl\eta\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{l}}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-73}
$$

式 (6-73) 和坐标系无关, 可用于电偶极子电流任意取向情形.

以下考虑几种特殊情形.

情形一：电偶极子平行于 z 轴, 即 $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{z}}$, 则式 (6-73) 变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\end{aligned}\tag{6-74}$$

注意以下直角坐标系和球坐标系单位矢之间的等式：

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}&=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\\\hat{\boldsymbol{y}}&=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\\\hat{\boldsymbol{z}}&=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{6-75}$$

式 (6-75) 代入式 (6-74) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}\right]\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\theta\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=-\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu Il\sin\theta\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\end{aligned}\tag{6-76}$$

式 (6-76) 和式 (6-67) 第一式相同.

情形二：电偶极子平行于 x 轴, 即 $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{x}}$, 如图 6-6(b) 所示, 则式 (6-73) 变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\end{aligned}\tag{6-77}$$

式 (6-75) 代入式 (6-77) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}\right]\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\varphi\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\\&=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\end{aligned}\tag{6-78}$$

情形三：电偶极子平行于 y 轴, 即 $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{y}}$, 如图 6-6(c) 所示, 则式 (6-73) 变为

$$\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\hat{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}$$

$$= \mathrm{i}\omega\mu Il\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-79}$$

式 (6-75) 代入式 (6-79) 得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{r}})\, \mathrm{i}\omega\mu Il \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \hat{\boldsymbol{r}} \times \left[\left(\hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cos\varphi\right) \times \hat{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{i}\omega\mu Il \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \hat{\boldsymbol{r}} \times \left(-\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cos\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\varphi\right) \mathrm{i}\omega\mu Il \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cos\varphi\right) \mathrm{i}\omega\mu Il \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-80}$$

6.5.3 磁偶极子的远区场：任意取向情形

利用对偶关系 (6-37),

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M} \\
\varepsilon \to \mu, \quad \mu \to \varepsilon \\
\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}
\end{gathered}$$

由式 (6-73) 可以得到磁偶极子磁流任意取向情形的辐射场.

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}} l\hat{\boldsymbol{r}} \times \left(\hat{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}\right) \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-81}$$

由远区场平面波特性 (6-72), 相应电场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = -\eta\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H} &= -\mathrm{i}\eta\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}} l\hat{\boldsymbol{r}} \times \left[\hat{\boldsymbol{r}} \times \left(\hat{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}\right)\right] \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= -\mathrm{i}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} I_{\mathrm{m}} l \left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}\right)\right] - \left(\hat{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}\right)\right\} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \mathrm{i}kI_{\mathrm{m}} l \left(\hat{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}\right) \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-82}$$

以下考虑几种特殊情形.

情形一：磁偶极子平行于 z 轴, 即 $\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{z}}$, 则式 (6-81) 变为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}} l\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= -\hat{\boldsymbol{\theta}} \mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}} l \sin\theta \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
\boldsymbol{E} &= \mathrm{i}kI_{\mathrm{m}} l (\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \mathrm{i}kI_{\mathrm{m}} l \sin\theta \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned}\right\} \tag{6-83}$$

式 (6-83) 和式 (6-43) 第二式的远区结果相同.

情形二：磁偶极子平行于 x 轴, 即 $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{x}}$, 则式 (6-81) 变为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}}l\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{r}})\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&=-\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right)\mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}}l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}kI_{\mathrm{m}}l(\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{r}})\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&=-\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\cos\varphi\right)\mathrm{i}kI_{\mathrm{m}}l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\right\}\tag{6-84}$$

情形三：磁偶极子平行于 y 轴, 即 $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{y}}$, 则式 (6-81) 变为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}}l\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{r}})\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\right)\mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}}l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}kI_{\mathrm{m}}l(\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{r}})\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\sin\varphi\right)\mathrm{i}kI_{\mathrm{m}}l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\right\}\tag{6-85}$$

6.5.4 天线的辐射方向增益

天线的辐射方向图可区分为幅值和功率方向图两种. 由辐射电场的大小 $|\boldsymbol{E}|$ 给出幅值的方向特性, 由能流给出辐射功率的方向特性.

辐射方向增益定义为

$$G(\theta,\varphi)=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{ave}}}{\left(\dfrac{P_r}{4\pi r^2}\right)}=\frac{\text{天线辐射在球面上}(\theta,\varphi)\text{方位的能流密度}}{\text{总辐射功率平均分布在球面的能流密度}}\tag{6-86}$$

代表辐射在半径为 r 球面上 (θ,φ) 方位能流和球面平均能流的比值.

天线方向性定义为方向增益的最大值, 即

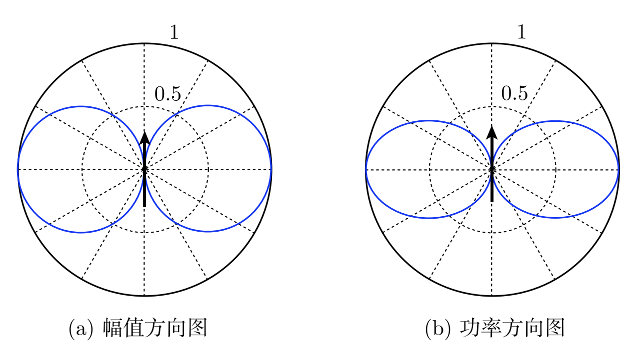
$$D=G(\theta,\varphi)_{\max}=\frac{\text{天线辐射在球面上能流密度最大值}}{\text{总辐射功率平均分布在球面的能流密度}}\tag{6-87}$$

代表辐射在半径为 r 球面上最大能流和球面平均能流的比值, 表征天线辐射能量向最大值方向集中的程度. 如果 $D=1$, 称为是全向性天线, 即对于所有方向有相同辐射.

由式 (6-66) 得电偶极子 (沿 z 轴放置) 的辐射平均能流密度为

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S} \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right\} \\ &= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{2\pi r}\right)^2 |f_\theta|^2 \\ &= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{2\pi r}\right)^2 (Il\sin\theta)^2 \end{aligned} \tag{6-88}$$

由式 (6-67) 和式 (6-88) 得到电偶极子辐射方向特性 (用最大值归一化) 如图 6-7 所示.



(a) 幅值方向图　　(b) 功率方向图

图 6-7　电偶极子辐射方向图

将辐射能流密度对半径为 r 的球面进行积分得到天线的总辐射功率为

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{r}} &= \oiint (\langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{r}}) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{\eta}{2}\left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\pi}{3}\eta\left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2 \end{aligned} \tag{6-89}$$

式中, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为波阻抗. 式 (6-88) 和式 (6-89) 代入式 (6-86) 得到电偶极子的辐射方向增益为

$$G(\theta, \varphi)_{\mathrm{dipole}} = \frac{\dfrac{\eta}{2}\left(\dfrac{kIl}{4\pi r}\right)^2 \sin^2\theta}{\dfrac{4\pi}{3}\eta\left(\dfrac{kIl}{4\pi}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{4\pi r^2}} = \frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{6-90}$$

再按照式 (6-87), 电偶极子的方向性为

$$D_{\mathrm{dipole}} = G_{\mathrm{dipole}}(\theta, \varphi)_{\max} = \left(\frac{3}{2}\sin^2\theta\right)_{\max} = \frac{3}{2} \tag{6-91}$$

即电偶极子在辐射最大方向的能流密度只有球面平均能流密度的 1.5 倍.

6.6 线 天 线

6.6.1 线天线及辐射电阻

考虑电流分布在直导线的情形. 设电流沿 z 轴, 如图 6-8 所示, 电流密度为

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}'\right)=\hat{\boldsymbol{z}}\ I(z')\delta(x')\delta(y')$$

式中, $I(z')$ 为线天线上电流. 它的电流矩矢量为

$$\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)=\hat{\boldsymbol{z}}\int I(z')\exp\left(-\mathrm{i}kz'\cos\theta\right)\mathrm{d}z' \tag{6-92}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$, 代入得电流矩矢量的 θ,φ 分量为

$$\begin{aligned}&f_\theta\left(\theta,\varphi\right)=-\sin\theta\int I(z')\exp\left(-\mathrm{i}kz'\cos\theta\right)\mathrm{d}z'\\&f_\varphi\left(\theta,\varphi\right)=0\end{aligned}$$

注意线天线 $f_\varphi\left(\theta,\varphi\right)=0$, 代入式 (6-65) 可求得线天线的远区辐射场,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta(\theta,\varphi)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}f_\varphi(\theta,\varphi)\right)=\hat{\boldsymbol{\theta}}\ \mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}f_\theta\\\boldsymbol{H}&=\mathrm{i}k\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}f_\theta(\theta,\varphi)-\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\varphi(\theta,\varphi)\right)=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\mathrm{i}k\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}f_\theta\end{aligned}\right\} \tag{6-93}$$

代入式 (6-66) 得辐射平均能流密度为

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right\}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\ \frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|f_\theta|^2+|f_\varphi|^2\right)\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\ \frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2|f_\theta|^2\end{aligned} \tag{6-94}$$

总辐射功率为

$$\begin{aligned}P_\mathrm{r}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\langle S_r\rangle\ r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=2\pi\int_0^{\pi}r^2\sin\theta\frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2|f_\theta|^2\,\mathrm{d}\theta\\&=\pi\eta\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2\int_0^{\pi}|f_\theta|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{6-95}$$

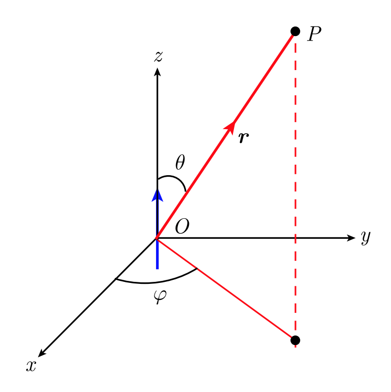


图 6-8　线天线所用球坐标系

如果把天线看做是馈线 (传输线) 的负载, 可以将天线的辐射功率等效为电阻上的损耗功率, 如图 6-9 所示. 相应的等效电阻称为天线的辐射电阻, 即

$$R_{\rm r}=\frac{2P_{\rm r}}{I_{\rm input}^2} \tag{6-96}$$

式中, $I_{\rm input}$ 是输入端电流的幅值.

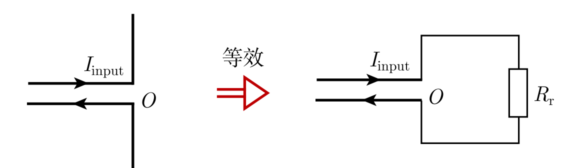


图 6-9　天线的辐射电阻

6.6.2　短天线

如果线天线长度 l 远小于波长, 在 6.5.2 节已经讨论电偶极子的电流矩矢量的 θ 分量为

$$f_\theta(\theta,\varphi)=-I_0 l\sin\theta$$

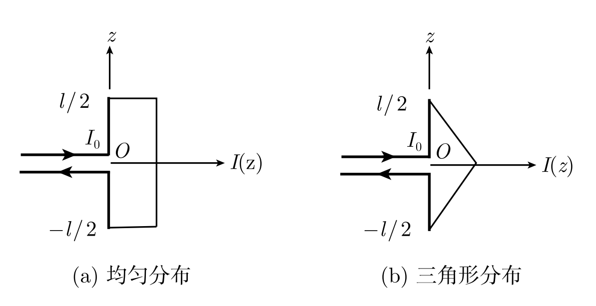
这里设电流元的长度为 l, 均匀分布电流为 I_0, 如图 6-10(a) 所示, 其辐射总功率为

$$\begin{aligned}P_{\rm r}&=\oiint(\langle\vec{S}\rangle\cdot\hat{r})r^2\sin\theta{\rm d}\theta{\rm d}\varphi=\frac{\eta}{2}\left(\frac{kI_0l}{4\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}{\rm d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta{\rm d}\theta\\&=\frac{4\pi}{3}\eta\left(\frac{kI_0l}{4\pi}\right)^2=\eta\frac{(kI_0l)^2}{12\pi}\end{aligned}$$

式中, 波阻抗 $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}=120\pi{\rm ohms}$. 电偶极子天线的输入端电流 $I_{\rm input}=I_0$, 上

式代入式 (6-96) 得辐射电阻为

$$R_{\mathrm{r}}=\frac{2P_{\mathrm{r}}}{I_0^2}=\frac{(kl)^2}{6\pi}\eta=20\,(kl)^2$$



(a) 均匀分布　　(b) 三角形分布

图 6-10　短天线的电流分布

若天线为导体, 在 $z=\pm l/2$ 两端的边界条件要求端点处电流为零. 当 l 较小时可近似认为电流呈三角形 (线性) 分布, 如图 6-10(b) 所示, 即

$$I\,(z')=\frac{I_0}{(l/2)}\left(\frac{l}{2}-|z'|\right)=\frac{2I_0}{l}\left(\frac{l}{2}-|z'|\right)$$

其电流矩矢量的 θ 分量为

$$f_\theta(\theta,\varphi)=-\sin\theta\int_{-l}^{l}\frac{2I_0}{l}\left(\frac{l}{2}-|z'|\right)\mathrm{d}z'=-\frac{I_0 l}{2}\sin\theta$$

由于天线很小 $l\ll\lambda$, 以上略去相位推迟因子 $\exp\left(-\mathrm{i}kz'\cos\theta\right)$. 辐射平均能流密度为

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right\}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\ \frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2|f_\theta|^2\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\ \frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(\frac{I_0 l}{2}\sin\theta\right)^2\end{aligned}\tag{6-97}$$

辐射总功率为

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{r}}&=\oiint\left(\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\ r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\eta}{2}\left(\frac{kI_0 l}{8\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4\pi}{3}\eta\left(\frac{kI_0 l}{8\pi}\right)^2\end{aligned}$$

$$= \eta \frac{(kI_0 l)^2}{48\pi} \tag{6-98}$$

电偶极子天线的输入端电流 $I_{\text{input}} = I_0$, 式 (6-98) 及 $\eta = 120\pi$ 代入式 (6-96) 得辐射电阻为

$$R_{\text{r}} = \frac{2P_{\text{r}}}{I_0^2} = \frac{(kl)^2}{24\pi}\eta = 5\,(kl)^2 \tag{6-99}$$

6.6.3 长天线

当线天线长度可以和波长相比较时, 天线上的电流分布和激励源及波长有关. 如果线上电流可以用正弦函数描述, 且在天线两端 $z' = \pm l/2$ 处电流等于零, 通常假设天线上电流分布为

$$I(z') = I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right], \quad |z'| < \frac{l}{2} \tag{6-100}$$

式中, I_0 为电流驻波的幅值. 以上电流分布为 z' 的偶函数. 它的电流矩矢量 θ 分量为

$$\begin{aligned} f_\theta(\theta,\varphi) &= -\sin\theta \int I(z') \exp(-\mathrm{i}kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z' \\ &= -\sin\theta \int_{-l/2}^{l/2} I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \exp(-\mathrm{i}kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z' \\ &= -\frac{2I_0}{k} \cdot \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{6-101}$$

式 (6-101) 中积分的计算过程如下. 计算中用到三角函数的 Euler 公式和函数的奇偶特性,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \exp(-\mathrm{i}kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z' \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \left[\cos(kz'\cos\theta) - i\sin(kz'\cos\theta)\right]\mathrm{d}z' \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \cos(kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z' \\ &= 2\int_0^{l/2} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right] \cos(kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z' \\ &= 2\int_0^{l/2} \frac{\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right] - \exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right]}{2\mathrm{i}} \cos(kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^l \left\{ \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}kz'\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \exp\left(\mathrm{i}kz'\right) \right] \cos\left(kz'\cos\theta\right) \right\} \mathrm{d}z'$$

完成上式中的积分需要用到积分公式：

$$\int \exp\left(ax\right) \cos bx \mathrm{d}x = \frac{\exp\left(ax\right)}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\cos bx\right)$$

积分结果得到

$$\begin{aligned}
I = &\frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^{l/2} \left\{ \exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}kz'\right) \cos\left(kz'\cos\theta\right) \right.\\
&\left. - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \exp\left(\mathrm{i}kz'\right) \cos\left(kz'\cos\theta\right) \right\} \mathrm{d}z'\\
= &\frac{1}{\mathrm{i}} \left\{ \exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \frac{\exp\left(-\mathrm{i}kz'\right)\left[-\mathrm{i}k\cos\left(kz'\cos\theta\right) + k\cos\theta\sin\left(kz'\cos\theta\right)\right]}{-k^2+k^2\cos^2\theta} \right.\\
&\left. - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \frac{\exp\left(\mathrm{i}kz'\right)\left[\mathrm{i}k\cos\left(kz'\cos\theta\right) + k\cos\theta\sin\left(kz'\cos\theta\right)\right]}{-k^2+k^2\cos^2\theta} \right\}_{z'=0}^{z'=l/2}\\
= &\frac{-1}{\mathrm{i}k^2\sin^2\theta} \left\{ \exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \left[-\mathrm{i}k\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) + k\cos\theta\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) \right] \right.\\
&- \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \left[\mathrm{i}k\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) + k\cos\theta\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) \right]\\
&\left. - \exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right)\cdot\left(-\mathrm{i}k\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right)\cdot\left(\mathrm{i}k\right) \right\}\\
= &\frac{-1}{\mathrm{i}k^2\sin^2\theta} \left\{ \left[-\mathrm{i}k\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) + k\cos\theta\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) \right] \right.\\
&\left. - \left[\mathrm{i}k\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) + k\cos\theta\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) \right] + \mathrm{i}k \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\frac{kl}{2}\right) \right] \right\}\\
= &\frac{-1}{\mathrm{i}k^2\sin^2\theta} \left[-2\mathrm{i}k\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) + 2\mathrm{i}k\cos\left(\frac{kl}{2}\right) \right]\\
= &\frac{2\mathrm{i}k}{\mathrm{i}k^2\sin^2\theta} \left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \right] = \frac{2}{k\sin^2\theta} \left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

以上积分结果代入式 (6-101) 即可得该式的最后结果. 证毕.

根据式 (6-65), 由电流矩矢量 (6.101) 可求得天线的辐射场,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\ \mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r} f_\theta\\
&= -\hat{\boldsymbol{\theta}}\ \mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\frac{2I_0}{k}\left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right]
\end{aligned}$$

$$= -\hat{\boldsymbol{\theta}}\ \mathrm{i}\eta I_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\left[\frac{\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right] \tag{6-102}$$

辐射平均能流密度为

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{S}\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}\\
&= \hat{\boldsymbol{r}}\ \frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 |f_\theta|^2\\
&= \hat{\boldsymbol{r}}\ \frac{\eta}{2}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left[\frac{2I_0}{k}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2\\
&= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\eta}{2}\left(\frac{I_0}{2\pi r}\right)^2\left[\frac{\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2
\end{aligned} \tag{6-103}$$

辐射总功率为

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{r}} &= \oiint (\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\ r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\
&= 2\pi\int_0^\pi \sin\theta\frac{\eta}{2}\left(\frac{I_0}{2\pi}\right)^2\left[\frac{\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{\eta I_0^2}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\left[\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)\right]^2}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{\eta I_0^2}{4\pi}\left\{\gamma+\ln(kl)-\mathrm{Ci}(kl)+\sin(kl)\left[\frac{1}{2}\mathrm{Si}(2kl)-\mathrm{Si}(kl)\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\cos(kl)\left[\gamma+\ln\left(\frac{kl}{2}\right)\ +\mathrm{Ci}(2kl)-2\mathrm{Ci}(kl)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{6-104}$$

式中, $\eta=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=120\pi$ ohms, $\gamma=0.5772$(Eular 常数), 以及

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin x'}{x'}\mathrm{d}x',\quad \mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos x'}{x'}\mathrm{d}x'=\int_\infty^x\frac{\cos x'}{x'}\mathrm{d}x'\\
&\mathrm{C_{in}}(x)=\int_0^x\frac{1-\cos x'}{x'}\mathrm{d}x'=\gamma+\ln x-\mathrm{Ci}(x),\quad \gamma=0.5772
\end{aligned}\right\} \tag{6-105}$$

分别为特殊函数中的正弦积分 $\mathrm{Si}(x)$, 余弦积分 $\mathrm{Ci}(x)$ 和修正余弦积分 $\mathrm{C_{in}}(x)$, 几个函数列表和曲线参见 Balanis(1997: 889). 式 (6-104) 中积分的具体计算过程见 6.6.4 节.

辐射电阻通常以输入端电流 I_{in} 来计算, 如图 6-9 所示. 对于短天线, 其输入端电流 I_{in} 就是天线电流的幅值的 I_0, 如图 6-10 所示. 对于长天线, 其输入端电流 I_{in} 可能并不是如式 (6-100) 所示天线上电流驻波的幅值 I_0, 而是 $I_{\text{in}} = I(z=0) = I_0 \sin kl$, 如图 6-11 所示. 为了便于比较, 以下不用输入端电流 I_{in}, 而以电流驻波的幅值 I_0 来计算辐射电阻, 即

$$R_{\mathrm{r}} = \frac{2P_{\mathrm{r}}}{I_0^2} \tag{6-106}$$

图 6-11 线天线输入端电流

将式 (6-104) 代入式 (6-106) 得到

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{r}} &= \frac{2P_{\mathrm{r}}}{I_0^2} \\ &= \frac{\eta}{2\pi}\left\{\gamma + \ln(kl) - \mathrm{Ci}(kl) + \sin(kl)\left[\frac{1}{2}\mathrm{Si}(2kl) - \mathrm{Si}(kl)\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\cos(kl)\left[\gamma + \ln\left(\frac{kl}{2}\right) + \mathrm{Ci}(2kl) - 2\mathrm{Ci}(kl)\right]\right\} \end{aligned} \tag{6-107}$$

辐射电阻 R_{r} 和天线长度 l 的关系如图 6-12 所示. 图中横坐标为天线长度和波长的比值.

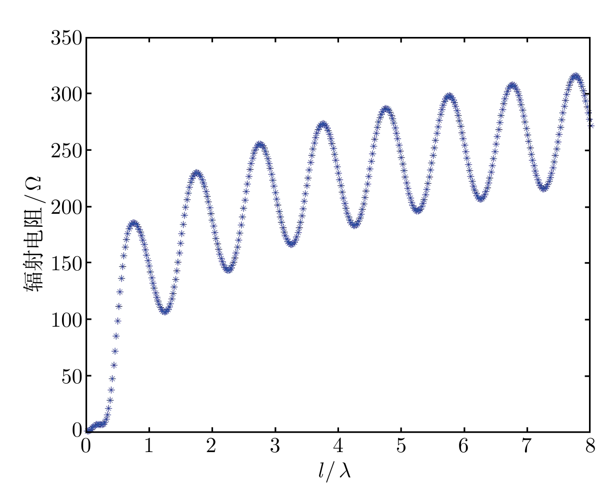


图 6-12 辐射电阻随天线长度的变化

6.6.4 线天线辐射总功率的计算

本节给出线天线辐射功率 (6-104) 中积分的计算过程. 式 (6-104) 中的积分为

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kl}{2}\right)\right]^2}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta \tag{6-108}$$

式 (6-108) 中, 被积函数的分母在积分上限和下限处趋于零, 但由于分子也趋于零, 因而被积函数仍为有限值, 在积分计算中需要注意. 令 $A=kl/2$, 并作变量替换,

$$\begin{aligned}&u=\cos\theta,\quad \mathrm{d}u=-\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&\theta=0,\quad u=1\\&\theta=\pi,\quad u=-1\end{aligned}$$

代入式 (6-108) 得

$$\begin{aligned}I&=\int_1^{-1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{-\sin^2\theta}\mathrm{d}u\\&=\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1-u^2}\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{6-109}$$

利用因式分解,

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)$$

上式变为

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1-u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1+u}\mathrm{d}u+\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1-u}\mathrm{d}u\right\}\end{aligned} \tag{6-110}$$

式中,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1+u}\mathrm{d}u&=-\int_{1}^{-1}\frac{[\cos(A\xi)-\cos A]^2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi\\&=\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1-u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

代入后积分化作

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{[\cos(Au)-\cos A]^2}{1-u}\mathrm{d}u \tag{6-111}$$

又令

$$\begin{aligned}&1-u=v,\quad \mathrm{d}u=-\mathrm{d}v\\&u=-1,\quad v=2\\&u=1,\quad v=0\end{aligned}$$

代入后得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \frac{\left[\cos(Au) - \cos A\right]^2}{1-u} \mathrm{d}u \\ &= -\int_{2}^{0} \frac{\left[\cos(A(1-v)) - \cos A\right]^2}{v} \mathrm{d}v \\ &= \int_{0}^{2} \frac{\left[\cos(A - Av) - \cos A\right]^2}{v} \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{6-112}$$

根据三角函数公式,

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

上式变为

$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{2} \frac{\left[\cos(A - Av) - \cos A\right]^2}{v} \mathrm{d}v \\ &= \int_{0}^{2} \frac{\left[\cos A\cos Av + \sin A\sin Av - \cos A\right]^2}{v} \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{6-113}$$

下面将式 (6-113) 中的分子作适当改写, 以便利用式 (6-105) 所定义的正弦积分 $\mathrm{Si}(x)$ 和余弦积分 $\mathrm{Ci}(x), \mathrm{C_{in}}(x)$. 重写上式中分子,

$$\begin{aligned} F =& \left[\cos A\cos Av + \sin A\sin Av - \cos A\right]^2 \\ =& (\cos A\cos Av)^2 + (\sin A\sin Av)^2 + \cos^2 A + 2(\cos A\cos Av)(\sin A\sin Av) \\ & - 2\cos A(\cos A\cos Av) - 2\cos A(\sin A\sin Av) \end{aligned}$$

根据三角函数公式,

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

分子又可写为

$$\begin{aligned} F =& (\cos A\cos Av)^2 + (\sin A\sin Av)^2 + \cos^2 A + 2(\cos A\cos Av)(\sin A\sin Av) \\ & - 2\cos A(\cos A\cos Av) - 2\cos A(\sin A\sin Av) \\ =& \cos^2 A\left(\frac{1+\cos 2Av}{2}\right) + \sin^2 A\left(\frac{1-\cos 2Av}{2}\right) + 2\cos^2 A - \cos^2 A \\ & + \frac{\sin 2A\sin 2Av}{2} - 2\cos^2 A\cos Av - \sin 2A\sin Av \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{2} + \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{2} \cos 2Av + 2\cos^2 A\,(1 - \cos Av) \\
&\quad - \cos^2 A + \frac{\sin 2A}{2} \sin 2Av - \sin 2A \sin Av \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 2\cos^2 A\right) + \frac{\cos 2A}{2} \cos 2Av + 2\cos^2 A\,(1 - \cos Av) \\
&\quad + \frac{\sin 2A}{2}\,(\sin 2Av - 2\sin Av) \\
&= \frac{-1}{2} \cos 2A + \frac{\cos 2A}{2} \cos 2Av + 2\cos^2 A\,(1 - \cos Av) \\
&\quad + \frac{\sin 2A}{2}\,(\sin 2Av - 2\sin Av) \\
&= \frac{-\cos 2A}{2}\,(1 - \cos 2Av) + 2\cos^2 A\,(1 - \cos Av) + \frac{\sin 2A}{2}\,(\sin 2Av - 2\sin Av)
\end{aligned}
$$

上式代入式 (6-113) 得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \frac{(\cos A \cos Av + \sin A \sin Av - \cos A)^2}{v} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^2 \frac{dv}{v} \left[\frac{-\cos 2A}{2}\,(1 - \cos 2Av) + 2\cos^2 A\,(1 - \cos Av) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin 2A}{2}\,(\sin 2Av - 2\sin Av) \right] \\
&= \frac{-\cos 2A}{2} \int_0^2 \frac{(1 - \cos 2Av)}{v} \mathrm{d}v + 2\cos^2 A \int_0^2 \frac{(1 - \cos Av)}{v} \mathrm{d}v \\
&\quad + \frac{\sin 2A}{2} \left(\int_0^2 \frac{\sin 2Av}{v} \mathrm{d}v - 2\int_0^2 \frac{\sin Av}{v} \mathrm{d}v \right)
\end{aligned} \tag{6-114}
$$

将式 (6-114) 中四项积分再作变量替换, 分别令 $u = 2Av$, $u = Av$, 可得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 \frac{(1 - \cos 2Av)}{v} \mathrm{d}v = \int_0^{4A} \frac{(1 - \cos u)}{u} \mathrm{d}u = \mathrm{C}_{\mathrm{in}}\,(4A) \\
I_2 &= \int_0^2 \frac{(1 - \cos Av)}{v} \mathrm{d}v = \int_0^{2A} \frac{(1 - \cos u)}{u} \mathrm{d}u = \mathrm{C}_{\mathrm{in}}\,(2A) \\
I_3 &= \int_0^2 \frac{\sin 2Av}{v} \mathrm{d}v = \int_0^{4A} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \mathrm{Si}\,(4A) \\
I_4 &= \int_0^2 \frac{\sin Av}{v} \mathrm{d}v = \int_0^{2A} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \mathrm{Si}\,(2A)
\end{aligned}
$$

上式代入式 (6-114) 得

$$
I = \frac{-\cos 2A}{2} I_1 + 2\left(\cos^2 A\right) I_2 + \frac{\sin 2A}{2}\,(I_3 - 2I_4)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\cos 2A}{2}\mathrm{C_{in}}(4A) + 2\left(\cos^2 A\right)\mathrm{C_{in}}(2A) + \frac{\sin 2A}{2}[\mathrm{Si}(4A) - 2\mathrm{Si}(2A)] \\
&= \frac{-\cos 2A}{2}\mathrm{C_{in}}(4A) + 2\left(\frac{1+\cos 2A}{2}\right)\mathrm{C_{in}}(2A) + \frac{\sin 2A}{2}[\mathrm{Si}(4A) - 2\mathrm{Si}(2A)] \\
&= \mathrm{C_{in}}(2A) + \frac{\cos 2A}{2}\left[2\mathrm{C_{in}}(2A) - \mathrm{C_{in}}(4A)\right] + \frac{\sin 2A}{2}[\mathrm{Si}(4A) - 2\mathrm{Si}(2A)] \qquad (6\text{-}115)
\end{aligned}
$$

根据式 (6-105) 上式中余弦积分为

$$
\mathrm{C_{in}}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos x'}{x'}\mathrm{d}x' = \gamma + \ln x - \mathrm{Ci}(x), \quad \gamma = 0.5772
$$

代入得到

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{C_{in}}(2A) + \frac{\cos 2A}{2}\left[2\mathrm{C_{in}}(2A) - \mathrm{C_{in}}(4A)\right] + \frac{\sin 2A}{2}[\mathrm{Si}(4A) - 2\mathrm{Si}(2A)] \\
&= \gamma + \ln(2A) - \mathrm{Ci}(2A) + \frac{\cos 2A}{2}[2\gamma + 2\ln(2A) - 2\mathrm{Ci}(2A) - \gamma \\
&\quad - \ln(4A) + \mathrm{Ci}(4A)] + \frac{\sin 2A}{2}[\mathrm{Si}(4A) - 2\mathrm{Si}(2A)] \\
&= \gamma + \ln(2A) - \mathrm{Ci}(2A) + \frac{\cos 2A}{2}[\gamma + \ln A - 2\mathrm{Ci}(2A) + \mathrm{Ci}(4A)] \\
&\quad + \frac{\sin 2A}{2}[\mathrm{Si}(4A) - 2\mathrm{Si}(2A)] \qquad (6\text{-}116)
\end{aligned}
$$

最后, 将 $A = kl/2$ 代入式 (6-116) 得到

$$
\begin{aligned}
I =& \gamma + \ln(kl) - \mathrm{Ci}(kl) + \frac{\sin kl}{2}[\mathrm{Si}(2kl) - 2\mathrm{Si}(kl)] \\
&+ \frac{\cos kl}{2}\left[\gamma + \ln\left(\frac{kl}{2}\right) - 2\mathrm{Ci}(kl) + \mathrm{Ci}(2kl)\right] \qquad (6\text{-}117)
\end{aligned}
$$

式 (6-117) 代入式 (6-104) 即得线天线辐射功率. 证毕.

6.6.5 半波天线

实际上常用线天线中的半波天线, 即 $l = \lambda/2, kl = \pi$, 其上电流分布 (6-100) 变为

$$
\begin{aligned}
I(z') &= I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \\
&= I_0 \sin\left[k\left(\frac{\lambda}{4} - |z'|\right)\right] \\
&= I_0 \sin\left[\frac{\pi}{2} - k|z'|\right] \\
&= I_0 \cos(kz') \qquad (6\text{-}118)
\end{aligned}
$$

式中, $z' \leqslant \lambda/4$, 如图 6-13 所示. 电流矩矢量 (6-101) 为

$$f_\theta = -\frac{2I_0}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \tag{6-119}$$

z, $\lambda/4$, I, O, $I(z)=I_0\cos(kz)$, $-\lambda/4$

图 6-13　半波天线

由式 (6-102) 可得半波天线的辐射场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}f_\theta \\ &= -\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\eta I_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\cdot\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]\end{aligned} \tag{6-120}$$

将 $kl=\pi$ 代入式 (6-107) 可得半波天线辐射电阻为

$$\begin{aligned}R_\mathrm{r} &= \frac{2P_\mathrm{r}}{I_0^2} \\ &= \frac{\eta}{2\pi}\left\{\gamma+\ln(\pi)-\mathrm{Ci}(\pi)-\frac{1}{2}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{Ci}(2\pi)-2\mathrm{Ci}(\pi)\right]\right\} \\ &= \frac{\eta}{4\pi}\{\gamma+\ln(2\pi)-\mathrm{Ci}(2\pi)\} \\ &= \frac{120\pi}{4\pi}[0.5772+1.8379-(-0.02309)] \\ &= 73.1\ \mathrm{ohms}\end{aligned} \tag{6-121}$$

以上分析中先假设线天线上的电流分布, 然后再计算辐射场. 只有在所设电流分布接近实际分布时, 计算结果符合实际值. 严格说, 天线上的电流分布应当由 Maxwell 方程结合边界条件来决定, 而无需先作假设. 在工程应用中, 借助计算电磁学和数值方法可以获得所需结果.

6.7　电偶极子阵列

6.7.1　平行排列阵列的电流矩矢量

设天线阵列由 N 个电偶极子构成, 电偶极子沿 z 轴平行排列, 彼此为等间距 d, 如图 6-14 所示. 电流幅值为 $I_n(n=0,\ 1,\cdots,\ N-1)$, 相邻单元的相移为 α. 天线阵列的电流密度可表示为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = \hat{\boldsymbol{z}}\sum_{n=0}^{N-1} I_n l\exp(\mathrm{i}n\alpha)\,\delta(x'-nd)\delta(y')\delta(z') \tag{6-122}$$

如前所述, 天线辐射场特性可以由电流矩矢量来计算. 电流矩矢量为

$$\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) = \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')(r')\exp(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$$

式中, $\hat{\boldsymbol{r}}$ 为观察点方向的单位矢,

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\\
&\boldsymbol{r}'=\hat{\boldsymbol{x}}x'+\hat{\boldsymbol{y}}y'+\hat{\boldsymbol{z}}z'\\
&\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'=x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\cos\varphi+z'\cos\theta
\end{aligned}$$

式 (6-122) 代入后得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)&=\hat{\boldsymbol{z}}\sum_{n=0}^{N-1}I_n l\exp(\mathrm{i}n\alpha)\exp(-\mathrm{i}knd\sin\theta\cos\varphi)\\
&=\hat{\boldsymbol{z}}\sum_{n=0}^{N-1}I_n l\exp(-\mathrm{i}n(kd\sin\theta\cos\varphi-\alpha))
\end{aligned}\tag{6-123}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$, 式 (6-123) 的 θ, φ 分量为

$$\left.\begin{aligned}
&f_\theta(\theta,\varphi)=-\sin\theta\sum_{n=0}^{N-1}I_n\ l\exp(-\mathrm{i}nu)\\
&f_\varphi=0
\end{aligned}\right\}\tag{6-124}$$

式中, 采用符号 u,

$$u=kd\sin\theta\cos\varphi-\alpha=kd\cos\psi-\alpha\tag{6-125}$$

式中, ψ 为观察点方向和天线阵列方向之间的夹角, 如图 6-14 所示. 由于 $0\leqslant\psi\leqslant\pi$, 所以 u 的实际可观察范围为

$$-kd-\alpha\leqslant u\leqslant kd-\alpha\tag{6-126}$$

天线阵列辐射特性取决于电流幅值和相移. 下面分别讨论阵列各单元电流模值相等和不相等的两种情形.

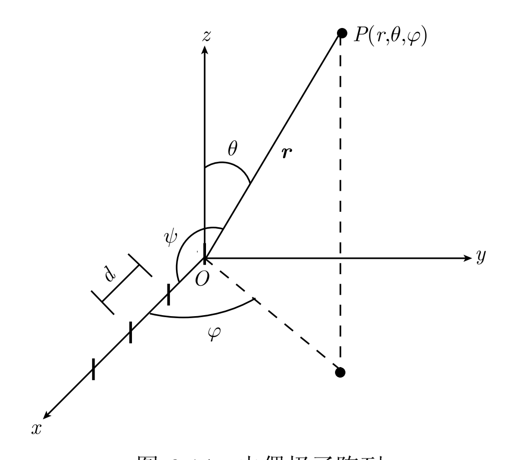


图 6-14　电偶极子阵列

6.7.2 各单元电流模值相等情形

设式 (6-124) 中各单元电流幅值相等, 即 $I_n = 1$. 由式 (6-65) 和式 (6-124) 得辐射场为

$$\begin{aligned} E_\theta &= \mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}f_\theta \\ &= -\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}Il\sin\theta\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu) \\ &= E_{\text{element}}\cdot F_{\text{array}} \end{aligned} \tag{6-127}$$

式 (6-127) 最后等式将天线阵列的辐射场写成两个因子相乘的形式. 一部分为电偶极子场.

$$E_{\text{element}} = -\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}Il\sin\theta \tag{6-128}$$

另一部分为阵列因子.

$$F_{\text{array}} = \sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu) \tag{6-129}$$

式中, 求和项可求得为

$$F_{\text{array}}(u) = \sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{(N-1)u}{2}\right)\frac{\sin\left(\dfrac{Nu}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)} \tag{6-130}$$

式 (6-130) 的推导过程如下：由因式分解公式

$$a^N - b^N = (a-b)\left(a^{N-1} + a^{N-2}b + \cdots + ab^{N-2} + b^{N-1}\right)$$

令 $a = 1$, 上式变为

$$1 - b^N = (1-b)\left(1 + b + \cdots + b^{N-2} + b^{N-1}\right) = (1-b)\sum_{n=0}^{M-1}b^n$$

又令 $b = \exp(-\mathrm{i}u)$, 代入上式得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu) &= \frac{1-\exp(-\mathrm{i}Nu)}{1-\exp(-\mathrm{i}u)} \\ &= \frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{i}Nu}{2}\right)}{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{i}u}{2}\right)}\cdot\frac{\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}Nu}{2}\right)-\exp\left(-\dfrac{\mathrm{i}Nu}{2}\right)}{\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}u}{2}\right)-\exp\left(-\dfrac{\mathrm{i}u}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{(N-1)\,u}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{Nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

上式就是式 (6-130). 证毕.

由式 (6-127) 可见, 天线阵的方向特性等于单元天线辐射场和阵列因子的乘积. 其中, 阵列因子 (6-130) 的模值为

$$|F_{\mathrm{array}}(\theta)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{Nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right| \tag{6-131}$$

算例. 设电偶极子单元数 $N=5$, 间距 $d=\lambda/2$, 即 $kd=(2\pi/\lambda)\cdot(\lambda/2)=\pi$, 相邻单元的相移分为两种情形, 分别为 $\alpha=0$ 和 π, 按照式 (6-126), 参数 u 的取值范围如表 6-1 所示. 所对应的阵列因子方向图如图 6-15 所示. 图 6-15(a) 为 $\alpha=0$, 主极大 $(u=0)$ 方向 $\psi=\pi/2$ 垂直于阵列的排列方向, 称为侧向 (边射) 阵列 (broadside array). 图 6-15(b) 为 $\alpha=\pi$, 主极大 $(u=\pi)$ 方向 $\psi=0$ 平行于阵列的排列方向, 称为列向 (端射) 阵列 (endfire array). 若相移在 $\alpha=0$ 和 π 之间, 则天线阵的主极大方向将在 $\psi=\pi/2$ 和 $\psi=0$ 之间变化. 由此可见, 阵列天线中相邻单元之间相移的变化可以改变 (控制) 天线阵的主极大方向. 这就是实际应用中相控阵天线的基本概念.

表 6-1 不同相移所对应的参数

算例	例 1, $\alpha=0$	例 2, $\alpha=\pi$
u 的表示式	$u=kd\cos\psi-\alpha$ $=\pi\cos\psi$	$u=kd\cos\psi-\alpha$ $=\pi(\cos\psi-1)$
u 的可观察范围 $(0\leqslant\psi\leqslant\pi)$	$-\pi\leqslant u\leqslant\pi$	$0\leqslant u\leqslant 2\pi$
主极大方向	$\psi=\pi/2$	$\psi=0$
阵列因子方向图	侧向 (边射) 阵列	列向 (端射) 阵列

6.7.3 阵列因子特点

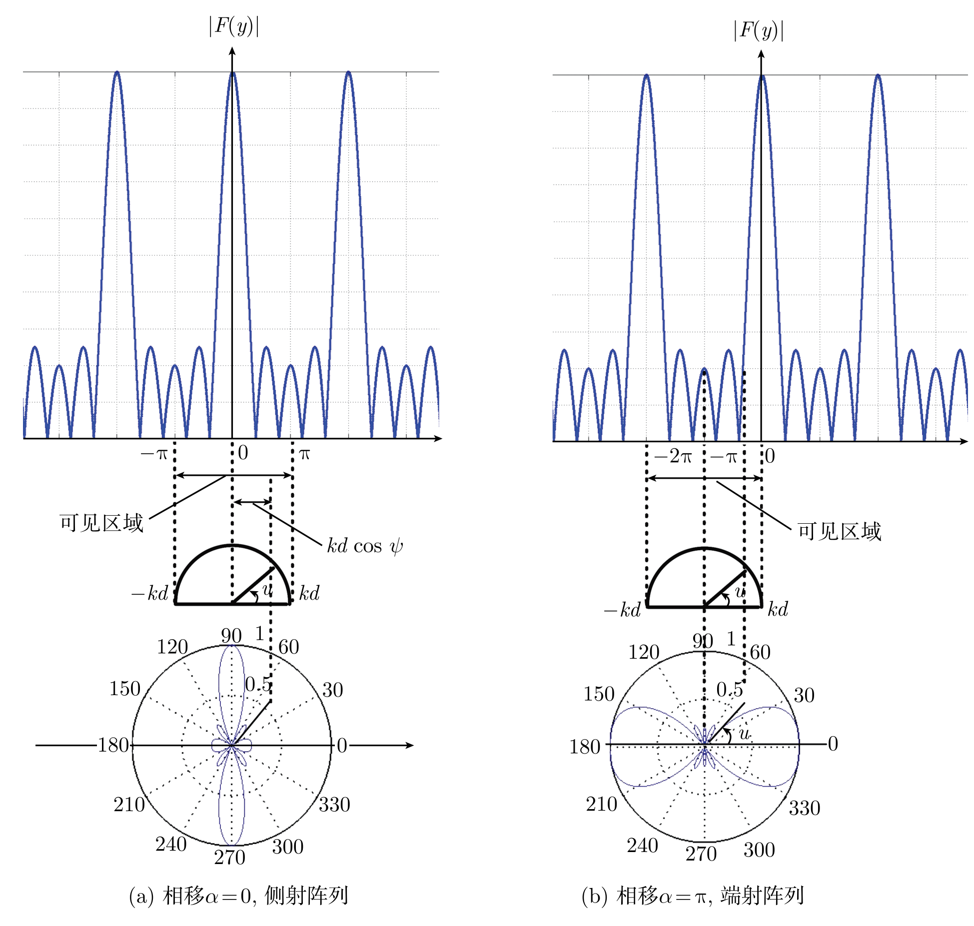
下面讨论如式 (6-131) 所示单元电流幅值相等时阵列因子的特性, 即 $|F(u)|\sim u$ 曲线特点.

(a) 主极大. 当式 (6-131) 的分子和分母同时为零, 即

$$u=u_{\max}=2m\pi,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{6-132}$$

式 (6-131) 给出主极大的模值为

$$|F_{\mathrm{array}}(u_{\max})|=N \tag{6-133}$$



(a) 相移α = 0, 侧射阵列　　(b) 相移α = π, 端射阵列

图 6-15　主瓣方向不同的阵列, $N = 5$

(b) 零点. 当式 (6-131) 的分子为零, 即

$$u = u_{\text{null}} = \frac{2n\pi}{N}, \quad n = \pm 1, \ \pm 2, \cdots \tag{6-134}$$

由式 (6-131) 得

$$|F(u_{\text{null}})| = 0$$

式 (6-134) 给出阵列因子零点的方向, 其中和 $u_{\max}$ 相同的值应当剔除.

(c) 次极大. 在相邻二零点之间会出现一个极大值. 按照数学方法, 由 $|F(u)|$ 导数为零可以求得次极大的位置 u_{m}. 但当阵列单元数 N 较大时, u_{m} 可近似认为在二个相邻零点的中间, 即

$$u_m \simeq \frac{(2m+1)\pi}{N} \tag{6-135}$$

式 (6-135) 代入式 (6-131), 可得次极大的模值为

$$|F(u_m)| \simeq \frac{\left|\sin\left(\dfrac{N}{2}\cdot\dfrac{(2m+1)\pi}{N}\right)\right|}{\left|\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{2N}\right|} \simeq \frac{2N}{(2m+1)\pi} \tag{6-136}$$

所以次极大和主极大之比为

$$\frac{次级大}{主极大} = \frac{|F(u_m)|}{F(u_{\max})} = \frac{2}{(2m+1)\pi} \tag{6-137}$$

主极大两侧相邻零点之间所对应范围称为主瓣; 其他次极大所对应的范围称为旁瓣. 当阵列单元数 N 较大, 由上式可得第一旁瓣 $(m=1)$ 与主瓣极大值之比为

$$\frac{|F(u_1)|}{|F(u_{\max})|} = \frac{2}{3\pi} \approx 0.2 \tag{6-138}$$

或者用分贝表示

$$\frac{|F(u_1)|}{|F(u_{\max})|} = 20\log\frac{2}{3\pi} \approx -13.5\ \text{dB}$$

(d) 主瓣宽度. 定义为从最大值下降到某个值时所对应的角宽度. 常用有两种定义, 分别称为第一零点宽度和半功率点宽度, 如图 6-16 所示. 前者指两个第一零点之间的角宽度, 根据式 (6-134) 和式 (6-125), 第一零点的位置为

$$u_{\pm1} = kd\cos\psi_{\pm1} - \alpha = \pm\frac{2\pi}{N}$$

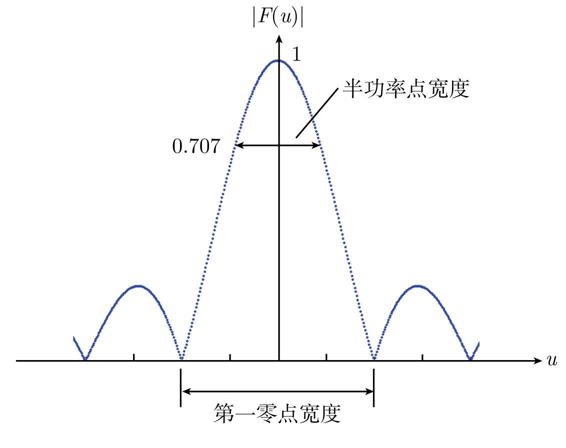


图 6-16　主瓣宽度的两种定义

或者,

$$\cos\psi_{\pm 1} = \frac{\alpha \pm \dfrac{2\pi}{N}}{kd} \tag{6-139}$$

对于侧向阵列, 相移 $\alpha = 0$, 主极大出现在 $\psi_{\max} = \pi/2$, 第一零点宽度为

$$(BW)_{\text{broadside}} = 2\left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

式 (6-139) 变为

$$\cos\psi_{\pm 1} = \frac{\pm\dfrac{2\pi}{N}}{kd}$$

即

$$\frac{2\pi}{Nkd} = \cos\psi_1 = \sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \simeq \left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right), \quad \psi_1 = \frac{2\pi}{Nkd} + \frac{\pi}{2}$$

于是

$$(BW)_{\text{broadside}} = 2\left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \simeq \frac{4\pi}{Nkd} \tag{6-140}$$

对于列向阵列, 相移 $\alpha = kd = \pi$, 主极大出现在 $\psi_{\max} = 0$, 第一零点宽度为

$$(BW)_{\text{endfire}} = 2\psi_1$$

式 (6-139) 变为

$$\cos\psi_{\pm 1} = \frac{kd \pm \dfrac{2\pi}{N}}{kd} = 1 \pm \frac{\dfrac{2\pi}{N}}{kd}$$

即

$$\frac{2\pi}{Nkd} = \cos\psi_1 - 1 = -2\sin^2\frac{\psi_1}{2} \simeq -\frac{\psi_1^2}{2}, \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{Nkd}}$$

于是

$$(BW)_{\text{endfire}} = 2\psi_1 \simeq 2\sqrt{\frac{4\pi}{Nkd}} \tag{6-141}$$

比较式 (6-140) 和式 (6-141) 可见, 当阵列单元数 N 较大, 侧向阵列的波束宽度与 N 成反比, 而列向阵列的波束宽度与 $\sqrt{N}$ 成反比.

半功率点宽度是指主瓣范围内阵列因子模值平方减小到最大值一半时两个对应方向之间的角宽度, 如图 6-16 所示.

6.7.4　天线阵的方向性

天线的方向增益定义见式 (6-86),

$$G(\theta,\varphi)=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{ave}}}{\left(\dfrac{P_r}{4\pi r^2}\right)}=\frac{4\pi\left|E(\theta,\varphi)\right|^2}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\left|E(\theta,\varphi)\right|^2\mathrm{d}\theta}\tag{6-142}$$

显然, $G(\theta,\varphi)\propto\left|E(\theta,\varphi)\right|^2$. 天线方向性 D 定义为方向增益的最大值, 见式 (6-87), 即 $D=G(\theta,\varphi)_{\max}$.

下面计算单元电流幅值相等阵列的方向增益和方向性. 由式 (6-127), 天线阵的远区场为

$$E_\theta=E_0\sin\theta\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\tag{6-143}$$

式中,

$$E_0=-\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r},\quad u=kd\cos\psi-\alpha$$

式 (6-142) 中电场的模值平方为

$$\left|E(\theta,\varphi)\right|^2=\left|E_\theta\right|^2=\left|E_0\right|^2\cdot\left|\sin\theta\right|^2\cdot\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2$$

式中, 求和项的模值平方为

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2&=\left[\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right]\cdot\left[\sum_{m=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}mu)\right]^*\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\exp[\mathrm{i}(m-n)u]\\&=\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\cos[(m-n)u]+\mathrm{i}\sin[(m-n)u]\right\}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\cos[(m-n)u]\end{aligned}$$

上式最后等式去掉虚部是因为求和项模值的平方应当等于实数, 故其虚部等于零. 由于上式双重求和中包含 $m=n$ 和 $m\neq n$ 两部分, $m=n$ 的项共有 N 个, 而 $m\neq n$ 的项在双重求和中又具有对称性, 所以上式可改写为

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\cos[(m-n)u]$$

$$= N + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \cos\left[(m-n)u\right]$$

式中, $\sum_{m=0}^{N-1}$ 表示求和中不包含 $m = n$ 项. 将上式中双重求和写出具体形式以后可以归纳得到

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2 = N + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \cos\left[(m-n)u\right]$$
$$= N + 2\sum_{m=1}^{N-1} (N-m)\cos(mu) \tag{6-144}$$

为了完成式 (6-142) 分母的积分, 以下采用如图 6-8 中所示方向角 ψ、ξ. 它们是直角坐标系 xyz 中所对应的球坐标方向角. 方向角 ψ、ξ 和直角坐标系 xyz 中所对应的球坐标方向角 θ、φ 之间关系为

$$x = r\sin\theta\cos\varphi = r\cos\psi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi = r\sin\psi\sin\xi$$
$$z = r\cos\theta = r\sin\psi\cos\xi$$

由 $x^2 + y^2$ 可得

$$\sin^2\theta = \cos^2\psi + \sin^2\psi\sin^2\xi$$
$$= \cos^2\psi + \left(1-\cos^2\psi\right)\sin^2\xi$$
$$= \sin^2\xi + \cos^2\xi\cos^2\psi$$

将式 (6-142) 分母的积分变量由 θ、φ 改换为 ψ、ξ, 这时积分元则由 $\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\sin\theta$ 改为 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\psi\sin\psi$. 注意 $u = k\mathrm{d}\cos\psi - \alpha$ 和 ξ 无关, 因而以下积分中可以交换积分顺序. 于是, 式 (6-142) 分母的积分为

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\sin\theta \left|E(\theta,\varphi)\right|^2$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\xi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi\sin\psi \left|E_0\sin\theta\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2$$
$$= |E_0|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\xi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi\sin\psi\,|\sin\theta|^2 \left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2$$
$$= |E_0|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\xi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi\sin\psi\left(\sin^2\xi + \cos^2\xi\cos^2\psi\right)\cdot\left[N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos(mu)\right]$$

$$= |E_0|^2 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi \sin\psi \left[N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos(mu)\right] \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\xi \left(\sin^2\xi + \cos^2\xi\cos^2\psi\right)$$

$$= |E_0|^2 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi \sin\psi \left[N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos(mu)\right] \cdot \left(\pi + \pi\cos^2\psi\right)$$

再将上式积分变量 ψ 改换为 u, 且 $du = -kd\sin\psi d\psi$, 于是,

$$\begin{aligned}
I &= |E_0|^2 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi \sin\psi \left[N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos(mu)\right] \cdot \left(\pi + \pi\cos^2\psi\right) \\
&= \pi|E_0|^2 \int_{-kd-\alpha}^{kd+\alpha} \frac{\mathrm{d}u}{kd} \left[N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos(mu)\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{u+\alpha}{kd}\right)^2\right] \\
&= \pi|E_0|^2 \left\{\frac{8}{3}N + \frac{2}{kd}\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\left[\frac{4}{m}\sin(mkd)\cos(m\alpha)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{4}{m^2kd}\cos(mkd)\cos(m\alpha) - \frac{4}{m^3(kd)^2}\sin(mkd)\cos(m\alpha)\right]\right\} \\
&= 4\pi|E_0|^2 \left\{\frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\left[\left(\frac{1}{mkd} - \frac{1}{(mkd)^3}\right)\sin(mkd)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{(mkd)^2}\cos(mkd)\right]\cos(m\alpha)\right\}
\end{aligned}$$

以上结果代入式 (6-142) 得到单元电流幅值相等阵列的方向增益,

$$\begin{aligned}
G(\theta,\varphi) &= \frac{4\pi|E(\theta,\varphi)|^2}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta|E(\theta,\varphi)|^2\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{4\pi|E_0|^2\sin^2\theta\cdot\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2}{I} \\
&= \sin^2\theta\left[N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos(mu)\right] \times \left\{\frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\right. \\
&\quad \left.\times\left[\left(\frac{1}{mkd} - \frac{1}{(mkd)^3}\right)\sin(mkd) + \frac{1}{(mkd)^2}\cos(mkd)\right]\cos(m\alpha)\right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{6-145}$$

另外, 式 (6-142) 分子的最大值为

$$4\pi|E(\theta,\varphi)|^2_{\max} = 4\pi|E_0|^2\left[\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}nu)\right|^2\right]_{\max}$$

由于

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-\mathrm{i}nu)\right|_{\max} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} |\exp(-\mathrm{i}nu)|\right]_{\max} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

所以,

$$4\pi |E(\theta,\varphi)|^2_{\max} = 4\pi E_0^2 N^2 \tag{6-146}$$

由式 (6-145) 可得天线阵的方向性为

$$\begin{aligned} D =& G(\theta,\varphi)_{\max} \\ =& N^2 \left\{ \frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \left[\left(\frac{1}{mkd} - \frac{1}{(mkd)^3} \right) \sin(mkd) \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{1}{(mkd)^2} \cos(mkd) \right] \cos(m\alpha) \right\}^{-1} \end{aligned} \tag{6-147}$$

若阵列 (侧向) 为 $kd = \pi$, $\alpha = 0$, 式 (6-147) 变为

$$\begin{aligned} D_{\text{broadside}} = & G(\theta,\varphi)_{\max} \\ = & N^2 \left[\frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \frac{1}{(m\pi)^2} \cos(m\pi) \right]^{-1} \\ = & N^2 \left[\frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \frac{(-1)^m}{(m\pi)^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

若阵列 (列向) 为 $kd = \pi, \alpha = \pi$, 式 (6-147) 变为

$$\begin{aligned} D_{\text{endfire}} = & G(\theta,\varphi)_{\max} \\ = & N^2 \left[\frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \frac{1}{(m\pi)^2} \cos(m\pi)\cos(m\pi) \right]^{-1} \\ = & N^2 \left[\frac{2}{3}N + 2\sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \frac{1}{(m\pi)^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

可见在 N 相同时, $D_{\text{broadside}} > D_{\text{endfire}}$.

6.7.5 各单元电流模值不等情形

以上对于各单元电流模值相等阵列的分析表明, 无论是侧向阵列还是列向阵列, 第一旁瓣和主极大之比其相对功率电平都为 -13.5dB. 改变阵列单元的数目也不能降低第一旁瓣的电平. 分析表明, 如果阵列中各单元用适当的非均匀电流来激

励, 旁瓣电平可以降低. 改善阵列特性的其他形式, 如非等间距阵列, 圆形阵列等, 可见 Ishimaru(1991: 263).

设相邻单元的相移为 α, 但各单元电流为非均匀, 则式 (6-127) 改为

$$\begin{aligned}E_\theta &= \mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}f_\theta \\ &= -\mathrm{i}\omega\mu l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\sin\theta\sum_{m=0}^{M-1}I_m\exp(-\mathrm{i}mu)\end{aligned} \tag{6-148}$$

式中, M 为非均匀电流阵列的单元数目. 求和号前的因子是单位电流的电偶极子辐射场. 这时的阵列因子为

$$\tilde{F}(u) = \sum_{m=0}^{M-1}I_m\exp(-\mathrm{i}mu) \tag{6-149}$$

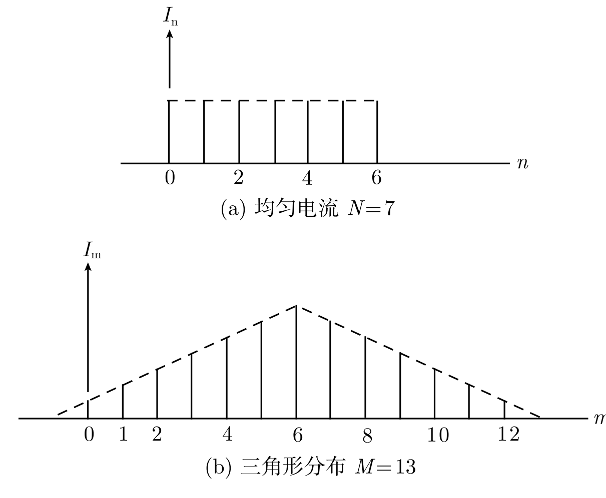
下面从阵列因子的要求出发讨论非均匀阵列的电流分布. 考虑两个简单的例子. 第一个例子：从降低阵列因子第一旁瓣电平出发来设计阵列电流的分布. 设非均匀电流阵列因子等于某一均匀电流阵列因子的平方, 即

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u) &= \left[\sum_{n=0}^{N-1}I_n\exp(-\mathrm{i}nu)\right]^2 \\ &=1+2\exp(-\mathrm{i}u)+\cdots+N\exp[-\mathrm{i}(N-1)u]+\cdots \\ &\quad +2\exp[-\mathrm{i}2(N-2)u]+\cdots+\exp[-\mathrm{i}2(N-1)u] \\ &= \sum_{m=0}^{2(N-1)}I_m\exp(-\mathrm{i}mu)\end{aligned} \tag{6-150}$$

式中, N 为均匀电流阵列的单元数目. 比较式 (6-150) 和式 (6-149) 可见, 非均匀电流阵列由 $M = 2N-1$ 个单元组成, 电流幅值 I_m 呈三角形分布, 其中心单元电流幅值等于最边上单元电流幅值的 N 倍, 即

$$I_m = \begin{cases} m+1, & m = 0,1,\cdots N-1 \\ 2N-m-1, & m = N, N+1, \cdots 2(N-1)\end{cases}$$

由于此非均匀电流阵列因子为 N 单元均匀电流阵列因子的平方, 由式 (6-138) 可得它的第一旁瓣电平等于 $(0.2)^2 = 0.04$ 或分贝数为 $2\times(-13.5)$ dB $= -27$ dB. 如果均匀电流阵列单元数 $N = 7$, 如图 6-17(a) 所示. 按照阵列因子平方要求所构造的三角形电流阵列单元数目为 $M = 2\times 7 - 1 = 13$, 电流分布如图 6-17(b) 所示.



(a) 均匀电流 $N=7$

(b) 三角形分布 $M=13$

图 6-17　三角形电流分布

第二个非均匀电流的例子是无旁瓣阵列. 先看由两个电流元构成的均匀阵列, 根据式 (6-131) 其阵列因子为

$$|F_2(u)| = \left|\sum_{n=0}^{1} \exp(-\mathrm{i}nu)\right| = \left|\frac{\sin u}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}\right| = \left|2\cos\frac{u}{2}\right|$$

如果选择 $kd \leqslant \pi$, 即 $d \leqslant \lambda/2$, 这时无论 $u = kd\cos\psi - \alpha$ 中相位差 α 如何选择, 其方向图均无旁瓣. 但主瓣不尖锐. 为了降低主瓣的半功率点宽度, 构造非均匀电流阵列使其阵列因子等于 $|F_2(u)|$ 的 N 次方幂. 这时仍然没有旁瓣, 但主瓣的半功率点宽度会减小. 设非均匀电流阵列因子为

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{F}(u)\right| &= |F_2(u)|^N = \left|\sum_{n=0}^{1} \exp(-\mathrm{i}nu)\right|^N \\
&= |1 + \exp(-\mathrm{i}u)|^N \\
&= \left|[1 + \exp(-\mathrm{i}u)]^N\right| \\
&= \left|1 + C_1^N \exp(-\mathrm{i}u) + C_2^N \exp(-\mathrm{i}2u) + \cdots + C_N^N \exp(-\mathrm{i}Nu)\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N} C_k^N \exp(-\mathrm{i}nu)\right| \qquad (6\text{-}151)
\end{aligned}$$

式中, C_k^N 也可记作 $\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}$, 是 N 个元素中取 k 个不同元素的组合数, 且 $C_0^N = 1$. 式 (6-151) 中 C_k^N 为二项式展开中第 n 项系数. 例如, 当 N=2, 各项系数为 1, 2, 1.

当 N=3, 各项系数为 1, 3, 3, 1. 上式表明, 当所构造的非均匀电流幅值按二项式系数形式分布时, 其阵列因子无旁瓣; 且主瓣随二项式电流分布项数增多变得更加尖锐. 对于如图 6-18(a) 所示二单元均匀电流阵列, 如果要求式 (6-151) 阵列因子中方幂数 $N=4$, 则所构造的非均匀阵列元素 $M=5$, 其二项式电流分布如图 6-18(b) 所示.

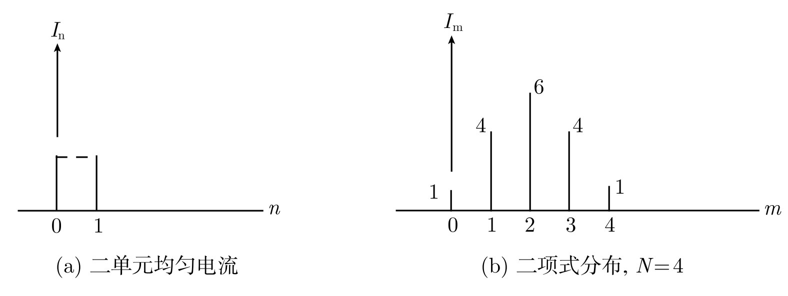


图 6-18 二项式电流分布

6.7.6 天线阵列因子概念的推广应用

对于阵列天线, 重写式 (6-127)

$$E_\theta = E_{\text{element}} \cdot F_{\text{array}} \tag{6-152}$$

式 (6-152) 表明, 平行等间距电偶极子阵列的辐射等于单元辐射和阵列因子的乘积. 对于半波天线或其他线天线的阵列, 式 (6-152) 也可以适用. 以上概念还可以推广应用于由若干电偶极子构成的单元情形, 参见 Kong(2004: 333). 下面给出几个算例.

算例一：由四个电偶极子构成的阵列, 如图 6-19 所示. 设相邻电偶极子间距为 $d_1=\lambda/2$, 即 $kd_1=\pi$, 电流模值相等, 相移 α 为零. 可以将此阵列划分为两个单元, 每个单元包含两个电偶极子, 即 A 和 B 为一个单元, C 和 D 为另一个单元, 两个单元之间的距离为 $d_2=\lambda$. 先看单元的辐射场. 根据式 (6-127), 两个电偶极子所构成单元的场为

$$E_{\text{element}} = -\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}Il\sin\theta\sum_{n=0}^{1}\exp(-\mathrm{i}nu_1) \tag{6-153}$$

式中, $u_1=kd_1\sin\theta\cos\varphi-\alpha=kd_1\cos\psi-\alpha=\pi\cos\psi$. 由两个单元所构成阵列的阵列因子为

$$F_{\text{array}} = \sum_{n=0}^{1}\exp(-\mathrm{i}nu_2) \tag{6-154}$$

式中, $u_2=kd_2\sin\theta\cos\varphi-\alpha_2=kd_2\cos\psi-\alpha_2=2\pi\cos\psi$. 式 (6-153) 和式 (6-154) 的乘积就是如图 6-19 所示四个电偶极子的辐射场.

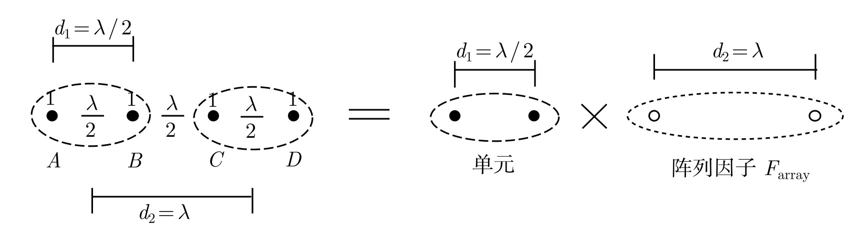


图 6-19　四个电偶极子的阵列

算例二：由五个电偶极子构成的阵列, 如图 6-20 所示, 设相邻电偶极子间距为 $d_1=\lambda/2$, 即 $kd_1=\pi$, 电流模值不相等, 相移 α 为零. 可以将此阵列划分为两个单元, 分别为电偶极子 A、B、C 以及 C、D、E. 注意：由于电偶极子 C 的电流为 2, 它被分配到两个单元. 这两个单元之间的距离为 λ. 先看单元的辐射场. 根据式 (6-127), 三个电偶极子构成的单元的场为

$$E_{\text{element}}=-\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}Il\sin\theta\sum_{n=0}^{2}\exp(-\mathrm{i}nu_1) \tag{6-155}$$

式中, $u_1=kd_1\sin\theta\cos\varphi-\alpha=kd_1\cos\psi-\alpha=\pi\cos\psi$. 阵列因子为

$$F_{\text{array}}=\sum_{n=0}^{1}\exp(-\mathrm{i}nu_2) \tag{6-156}$$

式中, $u_2=kd_2\sin\theta\cos\varphi-\alpha_2=kd_2\cos\psi-\alpha_2=2\pi\cos\psi$. 式 (6-155) 和式 (6-156) 的乘积就是如图 6-20 所示五个电偶极子的辐射场.

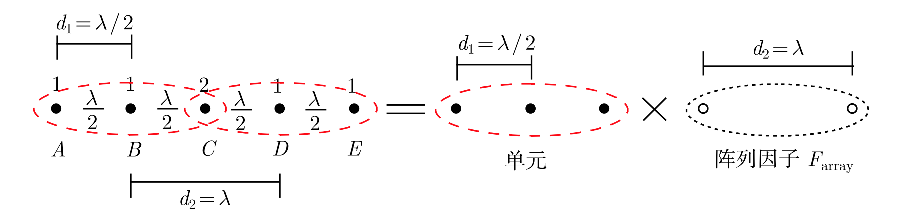


图 6-20　五个电偶极子的阵列

算例三：由六个电偶极子构成的 2×3 的阵列, 如图 6-21 所示, 设相邻电偶极子间距分别为 $d_1=\lambda$, 即 $kd_1=2\pi$; $d_2=\lambda/2$, 即 $kd_2=\pi$, 电流模值相等, 相移 α 为零. 可以将此阵列划分为三个单元, 分别为电偶极子 A、D; B、E 以及 C、F. 相邻单元之间的距离为 $d_2=\lambda/2$. 先看单元的辐射场. 根据式 (6-127), 二个电偶极子构成的单元的场为

$$E_{\text{element}}=-\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}Il\sin\theta\sum_{n=0}^{1}\exp(-\mathrm{i}nu_1) \tag{6-157}$$

式中, $u_1 = kd_1 \cos\psi_1 - \alpha = 2\pi\cos\psi_1$, 其中 ψ_1 是图 6-22 中 OP 与 x 轴的夹角. 阵列因子为

$$F_{\text{array}} = \sum_{n=0}^{2} \exp(-inu_2) \tag{6-158}$$

式中, $u_2 = kd_2 \cos\psi_2 - \alpha_2 = \pi\cos\psi_2$, 其中 ψ_2 是图 6-22 中 OP 与 y 轴的夹角. 由图可见,

$$\cos\psi_1 = \sin\theta\cos\varphi$$
$$\cos\psi_2 = \sin\theta\sin\varphi$$

式中, (θ,φ) 是观察点在球坐标中的方位角. 式 (6-157) 和式 (6-158) 的乘积就是如图 6-21 所示六个电偶极子的辐射场.

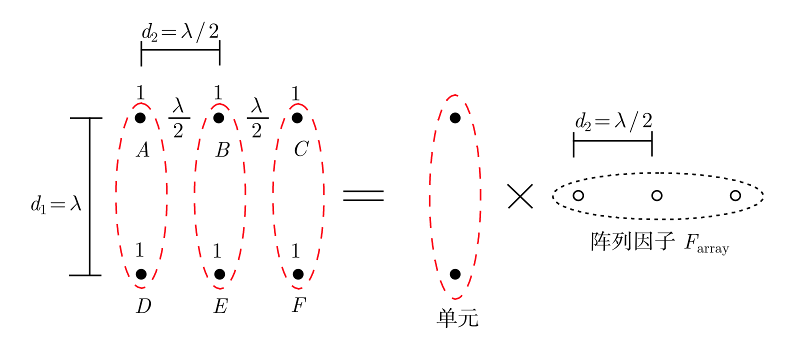


图 6-21　六个电偶极子的阵列

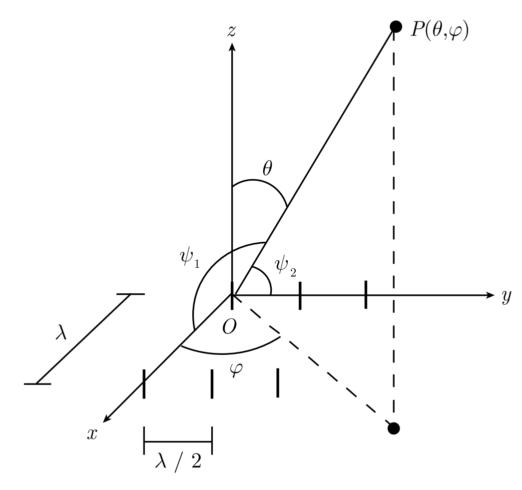


图 6-22　六个电偶极子的阵列的空间方位角

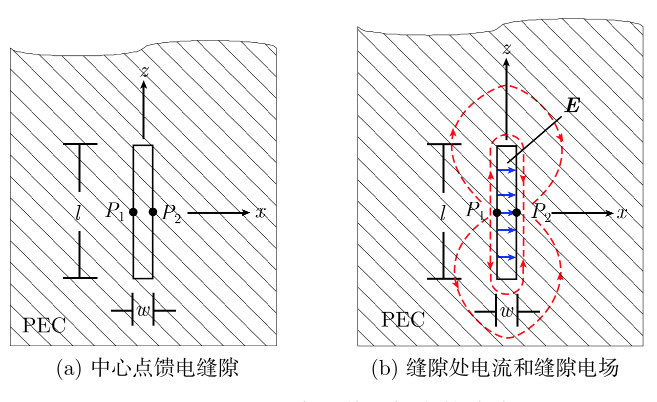
6.8　缝 隙 天 线

6.8.1　中心馈电缝隙天线的辐射

设无限大导体平板上的缝隙宽度 w 远小于其长度 l, 传输线馈电到缝隙两侧 $x = \pm w/2$ 的中点 P_1 和 P_2, 如图 6-23(a) 所示. P_1 和 P_2 之间的电流路径如图 6-23(b) 所示, 在缝隙两端 $z = \pm l/2$ 电流为短路, 是电流驻波的波腹. 相应的在 $z = \pm l/2$ 处为电压波节, $|x| < w/2$ 的缝隙电场可近似为 (Elliott, 1981: 86)

$$\boldsymbol{E}_{\text{slot}}(z') = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{V_0}{w}\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right], \quad |z'| < l/2 \tag{6-159}$$

式中, V_0 为电压的幅值.



(a) 中心点馈电缝隙　　(b) 缝隙处电流和缝隙电场

图 6-23　无限大导体平板上的缝隙

中心点馈电的缝隙向 PEC 板两侧辐射. 对于 $y > 0$ 半空间, 缝隙面处电场式 (6-159) 可以等效为面磁流,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\text{s}}(z') &= -2\hat{\boldsymbol{y}} \times \boldsymbol{E}_{\text{slot}}(z') \\ &= -2\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{x}}\frac{V_0}{w}\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{z}}\frac{2V_0}{w}\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right]\end{aligned} \tag{6-160}$$

由于缝宽度 w 很小, 式 (6-160) 对应的沿 z 方向线磁流为

$$I_{\text{m}}(z') = M_{\text{s}}w = 2V_0\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \tag{6-161}$$

式 (6-161) 和线天线电流分布 (6-100) 类似. 根据对偶关系, 线磁流的远区辐射场为

式 (6-102) 的对偶形式, 即

$$\boldsymbol{H} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mathrm{i}2V_0}{\eta}\frac{\exp{(\mathrm{i}kr)}}{2\pi r}\left[\frac{\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right] \tag{6-162}$$

式 (6-162) 为中心馈电缝隙向 $y > 0$ 半空间的辐射场, $y < 0$ 半空间有类似处理.

如果缝隙长度 l 为半波长, 即 $kl = (2\pi/\lambda)\cdot(\lambda/2) = \pi$, 则式 (6-162) 变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= -\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mathrm{i}2V_0}{\eta}\frac{\exp{(\mathrm{i}kr)}}{2\pi r}\left[\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta}\right]\\ &= -\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mathrm{i}V_0}{\eta}\frac{\exp{(\mathrm{i}kr)}}{\pi r}\frac{\cos{(\pi\cos\theta/2)}}{\sin\theta}\end{aligned} \tag{6-163}$$

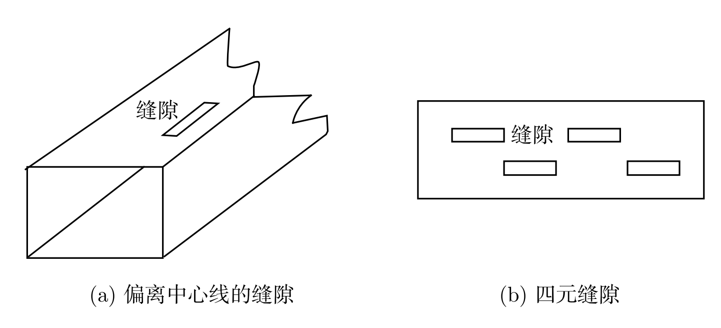
式 (6-163) 为半波长缝隙的辐射场. 在 6.6 节中对线电流天线的讨论可以应用于缝隙天线, 只需要作相应对偶替换.

6.8.2 波导表面的缝隙

实际应用中的缝隙是位于波导或腔体壁面, 通过波导或腔体内的电磁场耦合产生辐射, 而不采用上述缝隙中心点馈电的方式. 波导或腔体表面缝隙的辐射只是向外侧半空间. 矩形波导中的 TE_{10} 模的场分布为

$$\left.\begin{aligned}H_z &= H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}x\right)\exp{(\mathrm{i}k_z z)}\\ H_x &= \frac{-\mathrm{i}k_z a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}x\right)\exp{(\mathrm{i}k_z z)}\\ E_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}x\right)\exp{(\mathrm{i}k_z z)}\end{aligned}\right\} \tag{6-164}$$

根据波导壁面电流分布特点, 波导壁表面的缝隙可以设置在宽边或窄边对应的面上, 如图 6-24 所示. 此外, 导体表面的缝隙阵列具有良好的频率选择性, 也是一种常用天线.



(a) 偏离中心线的缝隙　　(b) 四元缝隙

图 6-24　矩形波导壁面上的缝隙

6.9　互易定理

6.9.1　反应

设问题 a 和问题 b 有相同的介质环境, 但空间源的分布不同, 如图 6-25 所示. 问题 a 的源为 $\boldsymbol{J}_a, \boldsymbol{M}_a$, 所产生的场为 $\boldsymbol{E}_a, \boldsymbol{H}_a$, 满足方程

$$\left.\begin{array}{r}\nabla \times \boldsymbol{H}_a = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{J}_a \\ -\nabla \times \boldsymbol{E}_a = -\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_a + \boldsymbol{M}_a\end{array}\right\} \tag{6-165}$$

问题 b 的源为 $\boldsymbol{J}_b, \boldsymbol{M}_b$, 所产生的场为 $\boldsymbol{E}_b, \boldsymbol{H}_b$, 满足方程

$$\left.\begin{array}{r}\nabla \times \boldsymbol{H}_b = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_b + \boldsymbol{J}_b \\ -\nabla \times \boldsymbol{E}_b = -\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{M}_b\end{array}\right\} \tag{6-166}$$

定义源 a 对源 b 的反应 (reaction) 为

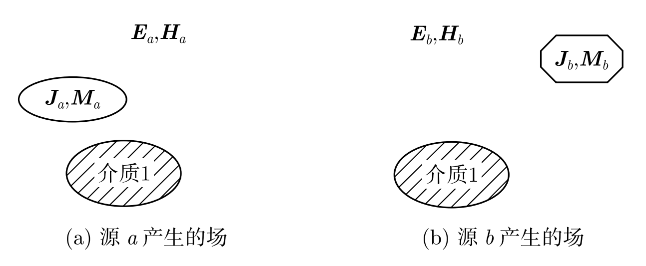
$$\langle a, b\rangle = \iiint\limits_{V_a} (\boldsymbol{J}_a \cdot \boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{M}_a \cdot \boldsymbol{H}_b)\mathrm{d}v \tag{6-167}$$

反之, 源 b 对于源 a 的反应为

$$\langle b, a\rangle = \iiint\limits_{V_b} (\boldsymbol{J}_b \cdot \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_b \cdot \boldsymbol{H}_a)\mathrm{d}v \tag{6-168}$$

以上定义中积分范围分别为源 a 与源 b 所在区域. 应当注意：如图 6-25 所示问题 a 和问题 b 具有相同的介质环境, 只是源不相同. 式 (6-167) 和式 (6-168) 所定义的 “反应” 是用来关联两个电磁问题, 具有功率的量纲, 但其物理意义不同于功率. 上述定义中涉及的是一个源的电磁流与另外一个源所产生场乘积的积分. 如果是一个源与其自身场乘积的积分, 则称之为自反应,

$$\langle a, a\rangle = \iiint\limits_{V_a} (\boldsymbol{J}_a \cdot \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_a \cdot \boldsymbol{H}_a)\mathrm{d}v \tag{6-169}$$



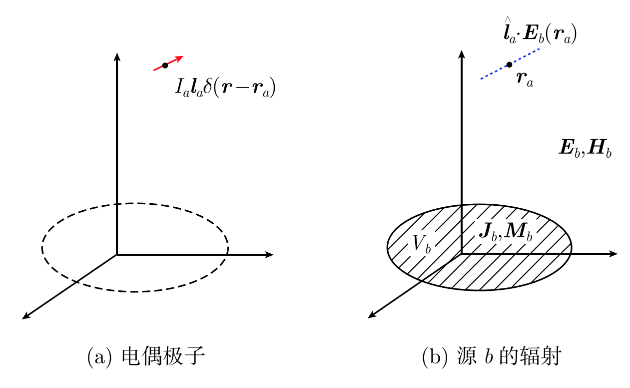
(a) 源 a 产生的场　　(b) 源 b 产生的场

图 6-25　空间介质环境相同但源不同的两个问题

为了理解反应的物理意义, 考虑一个特殊情况, 设源 a 是电偶极子, 即 $\boldsymbol{J}_a = I_a \boldsymbol{l}_a \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)$; 源 b 为另一电磁流 $\boldsymbol{J}_b$, $\boldsymbol{M}_b$. 于是, 源 a 对源 b 的反应为

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle &= \iiint\limits_{V_a} (\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b)\mathrm{d}v \\ &= \iiint\limits_{V_a} I_a\boldsymbol{l}_a\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot\boldsymbol{E}_b\mathrm{d}v \\ &= I\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}_b(\boldsymbol{r}_a)\end{aligned}$$

它正比于电偶极子所在位置处电场平行于电偶极子的分量. 当电偶极矩 $I_a l_a$ 等于 1 时, 它等于源 b 在电偶极子所在处电场沿电偶极子方向的分量, 如图 6-26 所示.



(a) 电偶极子　　(b) 源 b 的辐射

图 6-26　电偶极子对源 b 的反应

6.9.2　互易定理

如果源的周围空间为各向同性介质, 则源 a 和源 b 的场分别满足 Maxwell 方程 (6-165) 和式 (6-166). 用 $\boldsymbol{E}_b$ 点乘式 (6-165) 第一式, $\boldsymbol{H}_a$ 点乘式 (6-166) 第二式, 然后相加得到

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b + \boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b - \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_b\cdot\boldsymbol{H}_a + \boldsymbol{M}_b\cdot\boldsymbol{H}_a$$

再用 $\boldsymbol{H}_b$ 点乘式 (6-165) 第二式, $\boldsymbol{E}_a$ 点乘式 (6-166) 第一式, 然后相加得

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b) = -\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_a\cdot\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b - \mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_b\cdot\boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{J}_b\cdot\boldsymbol{E}_a$$

以上二式相减并在全空间积分可得

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_S (\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a - \boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iiint\limits_{V_a} (\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b)\mathrm{d}V - \iiint\limits_{V_b} (\boldsymbol{J}_b\cdot\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_b\cdot\boldsymbol{H}_a)\mathrm{d}V \qquad (6\text{-}170)\end{aligned}$$

当源和介质均在空间有限范围内, 可将积分范围延伸到无限远, 因而式 (6-170) 左端在无限远处的面积分等于零, 即

$$\oiint_S (\boldsymbol{E}_b \times \boldsymbol{H}_a - \boldsymbol{E}_a \times \boldsymbol{H}_b) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

将式 (6-167) 和式 (6-168) 代入式 (6-170) 可得

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \tag{6-171}$$

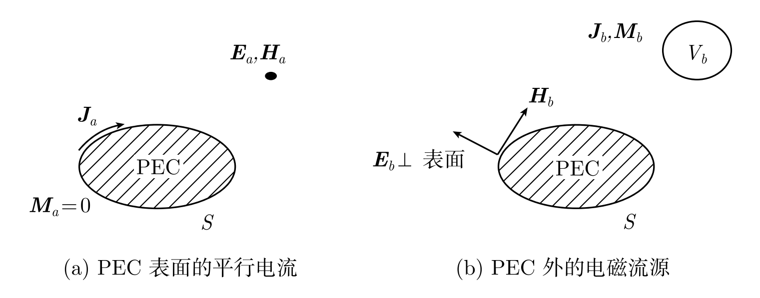
式 (6-171) 表明, 源 a 对源 b 的反应等于源 b 对源 a 的反应. 这一结论称为 Lorentz 互易定理. 互易原理将两个电磁问题关联起来, 常用于电磁辐射和散射问题的分析.

6.9.3 PEC 表面平行电流元没有辐射

设电流源 $\boldsymbol{J}_a$ 位于理想导体 (PEC) 物体表面, 且与表面平行, 如图 6-27(a) 所示. 利用互易定理可以证明, 该电流源在空间不产生电磁场. 为此, 考虑问题 b, 即在 PEC 物体外的任意电磁流源 $\boldsymbol{J}_b$, $\boldsymbol{M}_b$, 如图 6-27(b) 所示. 根据 (6-167), 源 a 对 b 的反应为

$$\langle a, b \rangle = \oiint_S (\boldsymbol{J}_a \cdot \boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{M}_a \boldsymbol{H}_b)\, \mathrm{d}S = 0 \tag{6-172}$$

式 (6-172) 右端积分范围在 PEC 表面. 上式最后等于零, 这是由于问题 b 中电磁流源在 PEC 表面处电场 $\boldsymbol{E}_b$ 的切向分量等于零, 而电流 $\boldsymbol{J}_a$ 只有平行于 PEC 表面分量, 因而 $\boldsymbol{J}_a \cdot \boldsymbol{E}_b = 0$. 此外, 问题 a 中没有磁流, 即 $\boldsymbol{M}_a = 0$.



(a) PEC 表面的平行电流 (b) PEC 外的电磁流源

图 6-27 PEC 物体表面平行电流的辐射

另一方面, 源 b 对源 a 的反应为

$$\langle b,\ a \rangle = \iiint_{V_b} (\boldsymbol{J}_b \cdot \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_b \cdot \boldsymbol{H}_a)\mathrm{d}V$$

根据互易定理,

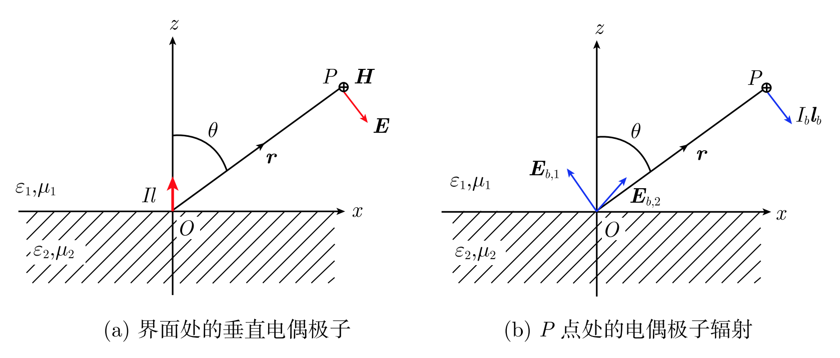
$$\langle b,\ a \rangle = \iiint_{V_b} (\boldsymbol{J}_b \cdot \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_b \cdot \boldsymbol{H}_a)\mathrm{d}V = \langle a, b \rangle = 0 \tag{6-173}$$

式 (6-173) 对任何 $\boldsymbol{J}_b$, $\boldsymbol{M}_b$ 成立, 故必 $\boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{H}_a = 0$, 亦即平行于理想导体表面的外加电流将不产生辐射场.

同样可以证明, 位于 PEC 物体表面的垂直磁流元不会产生辐射场. 类似的, 根据理想磁导体 (PMC) 物体表面边界条件, 在 PMC 表面磁场的切向分量和电场的法向分量等于零, 所以由互易定理也可以证明 PMC 物体表面的垂直电流元和平行磁流元均不会产生辐射场.

6.9.4 半空间介质界面垂直电偶极子的远区场

设垂直电偶极子 $\boldsymbol{Il} = \hat{\boldsymbol{z}}Il$ 位于半空间介质的分界面上原点 O 处, 欲求 θ 方向的远区场, 如图 6-28(a) 所示, 称为问题 a. 根据轴对称性可以判定远区观察点 $P(\boldsymbol{r})$ 的磁场为 φ 方向, $\boldsymbol{H} = \hat{\varphi}H(r,\theta)$; 远区电磁场具有平面波特性, 所以电场 $\boldsymbol{E}(r,\theta) = \hat{\boldsymbol{\theta}}E(r,\theta)$. 为了便于分析, 考虑 xoz 面上的远区场.



(a) 界面处的垂直电偶极子　　(b) P 点处的电偶极子辐射

图 6-28　半空间介质分界面处的垂直电偶极子

为了应用互易定理, 设问题 b 为位于 $P(\boldsymbol{r})$ 处电偶极子 $I_b\boldsymbol{l}_b = \hat{\boldsymbol{\theta}}I_bl_b$ 的辐射, 如图 6-28(b) 所示. 源 a(垂直电偶极子 $\boldsymbol{Il} = \hat{\boldsymbol{z}}Il$) 对源 b 的反应为 $\langle a,b\rangle = \boldsymbol{Il}\cdot\boldsymbol{E}_b(O)$, 源 b(电偶极子 $I_b\boldsymbol{l}_b = \hat{\boldsymbol{\theta}}I_bl_b$) 对源 a 的反应为 $\langle b,a\rangle = I_b\boldsymbol{l}_b\cdot\boldsymbol{E}(P)$. 于是, 由互易定理 (6-171) 得到

$$\boldsymbol{Il}\cdot\boldsymbol{E}_b(O) = I_b\boldsymbol{l}_b\cdot\boldsymbol{E}(P)$$

式中, $\boldsymbol{E}(P)$ 为待求量. 由于 $I_b\boldsymbol{l}_b$, $\boldsymbol{E}(P)$ 均为 θ 方向, 所以上式也可写成

$$Il\ E_{zb}(O) = I_bl_b\ E(P) \tag{6-174}$$

式中, $E_{zb}(O)$ 为问题 b 中原点 O 处电场的垂直分量. 电偶极子 $I_b\boldsymbol{l}_b = \hat{\boldsymbol{\theta}}I_bl_b$ 在原点 O 处的辐射场 $\boldsymbol{E}_b(O)$ 可以看做两部分之和. 一是它在自由空间的辐射场 $\boldsymbol{E}_{b1}$, 二是在分界面的反射波 $\boldsymbol{E}_{b2}$, 即 $\boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{E}_{b1} + \boldsymbol{E}_{b2}$.

自由空间中电偶极子 $\boldsymbol{Il} = \hat{\boldsymbol{z}}Il$ 的远区辐射场如式 (6-67), 即

$$\boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu Il\sin\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-175}$$

如果观察方向 $\theta = \pi/2$, 即垂直于电流元方向, 则式 (6-175) 变为

$$\boldsymbol{E}|_{\theta=\pi/2} = +\hat{\boldsymbol{l}}\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-176}$$

即电偶极子在垂直方向的辐射场和电流元自身平行同向.

由于图 6-28(b) 中 OP 垂直于电流元 $I_b\boldsymbol{l}_b = \hat{\boldsymbol{\theta}}I_bl_b$, 所以 $I_b\boldsymbol{l}_b$ 在 O 点处的辐射场为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{b1}(O) = +\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu_1I_bl_b\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} = (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta)\,\mathrm{i}\omega\mu_1I_bl_b\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&E_{zb1}(O) = -\mathrm{i}\omega\mu_1I_bl_b\sin\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\right\} \tag{6-177}$$

以 $\boldsymbol{E}_{b1}$ 作为入射波, 它在分界面 $z=0$ 处的反射波 $\boldsymbol{E}_{b2}$ 可以由半空间反折射 Fresnel 公式确定.

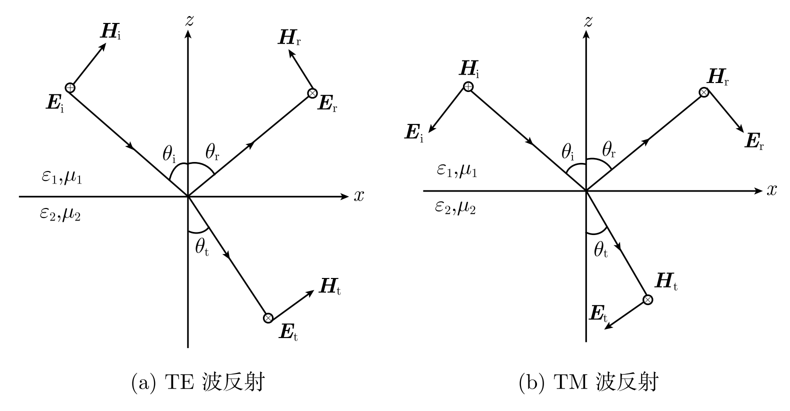
回顾半空间反折射的 TE 和 TM 情形, 如图 6-29 所示, 其中图 6-29(a) 为 TE 波, 即电场垂直于入射面; 图 6-29(b) 为 TM 波, 即电场平行于入射面. 已知反射系数分别定义为

$$\left.\begin{aligned}&R^{\mathrm{TE}} = \frac{E_{y\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{ri}}} = \frac{1-\dfrac{\mu_1k_{tz}}{\mu_2k_{0z}}}{1+\dfrac{\mu_1k_{tz}}{\mu_2k_{1z}}} = \frac{\mu_2k_{1z}-\mu_1k_{2z}}{\mu_2k_{1z}+\mu_1k_{2z}} = \frac{\mu_2k_1\cos\theta-\mu_1k_2\cos\theta_2}{\mu_2k_1\cos\theta+\mu_1k_2\cos\theta_2}\\&R^{\mathrm{TM}} = \frac{H_{y\mathrm{r}}}{H_{y\mathrm{i}}} = \frac{1-\dfrac{\varepsilon_1k_{tz}}{\varepsilon_2k_{0z}}}{1+\dfrac{\varepsilon_1k_{tz}}{\varepsilon_2k_{0z}}} = \frac{\varepsilon_2k_{1z}-\varepsilon_1k_{2z}}{\varepsilon_2k_{1z}+\varepsilon_1k_{2z}} = \frac{\varepsilon_2k_1\cos\theta-\varepsilon_1k_2\cos\theta_2}{\varepsilon_2k_1\cos\theta+\varepsilon_1k_2\cos\theta_2}\end{aligned}\right\} \tag{6-178}$$

式中, θ_2 为折射角, 可由 Snell 定律确定.

图 6-28(b) 中 $\boldsymbol{E}_{b1}, \boldsymbol{E}_{b2}$ 分别为入射波和反射波. 对于它们的 z 分量, 由于 $-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_z = -\partial H_y/\partial x$, 且反射波和入射波沿 x 传播方向彼此相同, 所以

$$\frac{E_{zb2}}{E_{zb1}} = \frac{H_{yb2}}{H_{yb1}} = R^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_2k_1\cos\theta-\varepsilon_1k_2\cos\theta_2}{\varepsilon_2k_1\cos\theta+\varepsilon_1k_2\cos\theta_2} \tag{6-179}$$



(a) TE 波反射 (b) TM 波反射

图 6-29 半空间介质分界面处 TE 波和 TM 波的反射

式 (6-179) 和式 (6-177) 代入式 (6-174) 得到

$$\begin{aligned}E(P) &= \frac{IlE_{zb}(O)}{I_b l_b} \\ &= \frac{Il(E_{zb1}+E_{zb1})}{I_b l_b} \\ &= \frac{Il\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)E_{zb1}}{I_b l_b} \\ &= -\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)\mathrm{i}\omega\mu_1 Il\sin\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned} \tag{6-180}$$

或者写为矢量式,

$$\boldsymbol{E}(r,\theta) = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)\mathrm{i}\omega\mu_1 Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-181}$$

以上即为半空间介质分界面上垂直电偶极子的远区辐射场公式 (杨儒贵, 2008).

如果分界面两侧介质参数一样, 这时 $R^{\mathrm{TM}}=0$, 上式还原为自由空间电偶极子远区辐射场公式 (6-67). 应用上述途径也可以由互易定理获得半空间介质分界面上的水平电偶极子的远区辐射场公式. 由于水平电偶极子远区场的方向不能预先判定, 分析中就需要分别讨论远区场的 θ 分量和 ϕ 分量. 根据对偶原理, 由上述分界面上电偶极子远区场公式可以过渡到磁偶极子的相应结果.

半空间分层介质界面附近垂直和水平电偶极子辐射的解析解首先由 Sommerfeld(1909, 1926) 给出. 研究表明, 除上述直达波和界面反射波以外, 还有侧向波 (lateral wave) 和吸附表面波 (trapped surface wave), 对于远区场, 特别当观察点远离分界面时, 直达波和反射波是主要部分 (Wait, 1985: 257; Li Kai, 2009).

6.9.5 半空间介质界面任意取向电偶极子的远区场

设电偶极子位于半空间介质的分界面上原点 O 处, 沿 $\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 方向, 即 $I\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{r}}_0 Il$.

它在球坐标系中的取向为 θ_0, φ_0, 如图 6-30(a) 所示. 欲求远区 P 点 θ, φ 方向的辐射场 E_φ, E_θ, 如图 6-30(b) 所示. 为了应用互易原理, 在 P 点放置电偶极子 $\hat{\boldsymbol{\varphi}} I_{\varphi b} l_{\varphi b}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}} I_{b2} l_{b2}$. 电偶极子 $\hat{\boldsymbol{\varphi}} I_{\varphi b} l_{\varphi b}$ 在 O 点的场是直射波和地面反射波之和, 直射波为

$$\boldsymbol{E}_{\varphi b1}(O) = +\hat{\boldsymbol{\varphi}} \mathrm{i}\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-182}$$

注意上述电场垂直于入射面, 反射系数定义为 $R^{\mathrm{TE}} = E^{\mathrm{r}}/E^{\mathrm{i}}$, 参见图 6-29(a). 经过分界面反射的场 $\boldsymbol{E}_{\varphi b2}(O)$ 为

$$\boldsymbol{E}_{\varphi b2}(O) = R^{\mathrm{TE}} \boldsymbol{E}_{\varphi b1}(O) \tag{6-183}$$

所以合成场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\varphi b}(O) &= \boldsymbol{E}_{\varphi b1}(O) + \boldsymbol{E}_{\varphi b2}(O) \\ &= \left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \boldsymbol{E}_{\varphi b1}(O) \\ &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \mathrm{i}\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned} \tag{6-184}$$

由互易定理式 (6-171) 得到

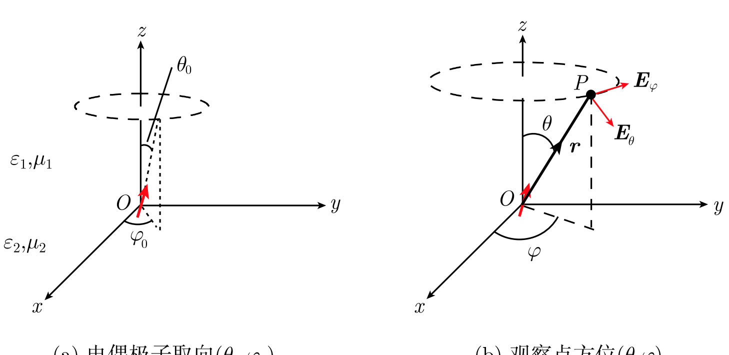
$$\left.\begin{aligned}&I\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_{\varphi b}(O) = I_{f\varphi b} \boldsymbol{l}_{\varphi b} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi(P) \\ &\hat{\boldsymbol{r}}_0 Il \cdot \boldsymbol{E}_{\varphi b}(O) = \hat{\boldsymbol{\varphi}} I_{\varphi b} l_{\varphi b} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi(P) = I_{\varphi b} l_{\varphi b} E_\varphi(P)\end{aligned}\right\} \tag{6-185}$$

式 (6-184) 代入式 (6-185) 得

$$I_{\varphi b} l_{\varphi b} E_\varphi(P) = \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il \cdot \boldsymbol{E}_{\varphi b}(O) = Il\hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \mathrm{i}\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}$$

所以电偶极子在远区 P 点的辐射场 φ 分量为

$$E_\varphi(P) = Il\hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \mathrm{i}\omega\mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-186}$$



(a) 电偶极子取向(θ_0,φ_0)　　(b) 观察点方位(θ,φ)

图 6-30　半空间介质分界面处的任意取向电偶极子

下面讨论中将用到球坐标和直角坐标系单位矢量之间关系式,

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\\
&\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\\
&\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi\\
&\hat{\boldsymbol{r}}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_0\cos\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_0\sin\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_0\\
&\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_0\cos\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_0\sin\varphi_0 - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_0\\
&\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0 = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi_0
\end{aligned}\right\} \tag{6-187}$$

位于 P 点的电偶极子 $\hat{\boldsymbol{\theta}} I_{\theta b} l_{\theta b}$ 在 O 点的直射波为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\theta b1}(O) &= +\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu I_{\theta b} l_{\theta b}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\
&= (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta)\,\mathrm{i}\omega\mu I_{\theta b} l_{\theta b}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-188}$$

注意上述电场平行于入射面, 相应反射系数见式 (6-178), 定义为 $R^{\mathrm{TM}} = H^{\mathrm{r}}/H^{\mathrm{i}}$, 参见图 6-29(b). 当 H^{r}, H^{i} 同相时, 电场垂直分量 E_z^{r}, E_z^{i} 也同相; 但是电场平行于界面的分量 E_x^{r} 与 E_x^{i}、E_y^{r} 与 E_y^{i} 却彼此反相. 所以, 在入射波电场为式 (6-188) 时, 分界面的反射波电场为

$$\boldsymbol{E}_{\theta b2}(O) = R^{\mathrm{TM}}(-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta)\,\mathrm{i}\omega\mu I_{\theta b} l_{\theta b}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{6-189}$$

合成场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\theta b}(O) &= \boldsymbol{E}_{\theta b1}(O) + \boldsymbol{E}_{\theta b2}(O)\\
&= \left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right)(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi)\right.\\
&\quad \left. - \left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\right]\mathrm{i}\omega\mu I_{\theta b} l_{\theta b}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-190}$$

由互易定理 (6-171) 可得

$$\left.\begin{aligned}
&I\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}_{\theta b}(O) = I_{\theta b}\boldsymbol{l}_{\theta b}\cdot\boldsymbol{E}_{\theta}(P)\\
&\hat{\boldsymbol{r}}_0 Il\cdot\boldsymbol{E}_{\theta b}(O) = \hat{\boldsymbol{\theta}} I_{\theta b} l_{\theta b}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} E_{\theta}(P) = I_{\theta b} l_{\theta b} E_{\theta}(P)
\end{aligned}\right\} \tag{6-191}$$

式 (6-190) 代入式 (6-191) 得到

$$I_{\theta b} l_{\theta b} E_{\theta}(P) = \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il\cdot\boldsymbol{E}_{\theta b}(\mathrm{O})$$

于是电偶极子在远区 P 点的辐射场 θ 分量为

$$E_{\theta}(P) = \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il\cdot\boldsymbol{E}_{\theta b}(O)/(I_{\theta b} l_{\theta b})$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right)(\hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta \cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta \sin\varphi)\right. \\
&\quad \left. - \hat{\boldsymbol{z}}\left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right) \sin\theta\right] \mathrm{i}\omega\mu I l \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-192}
$$

式 (6-187) 代入式 (6-192) 得到

$$
\begin{aligned}
E_\theta(P) &= I l \hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(O) / (I_{\theta b} l_{\theta b}) \\
&= I l (\hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta_0 \cos\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta_0 \sin\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta_0) \\
&\quad \cdot \left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right)(\hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta \cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta \sin\varphi) - \hat{\boldsymbol{z}}\left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right) \sin\theta\right] \mathrm{i}\omega\mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= I l \left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right)(\sin\theta_0 \cos\varphi_0 \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \cos\theta \sin\varphi)\right. \\
&\quad \left. - \left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right) \cos\theta_0 \sin\theta\right] \mathrm{i}\omega\mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= I l \left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right) \sin\theta_0 \cos\theta (\cos\varphi_0 \cos\varphi + \sin\varphi_0 \sin\varphi)\right. \\
&\quad \left. - \left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right) \cos\theta_0 \sin\theta\right] \mathrm{i}\omega\mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right) \sin\theta_0 \cos\theta \cos(\varphi_0 - \varphi) - \left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right) \cos\theta_0 \sin\theta\right] \mathrm{i}\omega\mu I l \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-193}
$$

对于辐射场的 φ 分量, 式 (6-187) 代入式 (6-186) 中的点乘项得

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= (\hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta_0 \cos\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta_0 \sin\varphi_0 + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta_0) \cdot (-\hat{\boldsymbol{x}} \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\varphi) \\
&= -\sin\theta_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi + \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi \\
&= \sin\theta_0 (\sin\varphi_0 \cos\varphi - \cos\varphi_0 \sin\varphi) \\
&= \sin\theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi)
\end{aligned} \tag{6-194}
$$

再代入式 (6-186) 得到

$$
\begin{aligned}
E_\varphi(P) &= -I l \hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \mathrm{i}\omega\mu \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \\
&= \sin\theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi)\left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \mathrm{i}\omega\mu I l \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{6-195}
$$

式中, $E_\varphi(P)$ 和 θ 的关系包含在反射系数中.

式 (6-195)、式 (6-193) 就是半空间介质界面任意取向电偶极子远区场的一般公式. 最后看几个特殊情形.

情形一：设 $\theta_0 = 0$, 即电偶极子平行于 z 轴, 垂直于分界面, 则式 (6-195)、式 (6-193) 分别变为

$$\left.\begin{aligned}E_\varphi(P) &= \sin\theta_0\sin(\varphi_0-\varphi)\,Il\left(1+R^{\mathrm{TE}}\right)\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}=0\\E_\theta(P) &= Il\left[\left(1-R^{\mathrm{TM}}\right)\sin\theta_0\cos\theta\cos(\varphi_0-\varphi)-\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)\cos\theta_0\sin\theta\right]\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&= -\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\sin\theta\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\right\} \tag{6-196}$$

式 (6-196) 和式 (6-181) 一致.

情形二：设 $\theta_0=\pi/2$, $\varphi_0=0$, 即电偶极子平行于 x 轴, 平行于分界面, 则式 (6-195) 和式 (6-193) 分别变为

$$\begin{aligned}E_\varphi(P) &= \sin\theta_0\sin(\varphi_0-\varphi)\,Il\left(1+R^{\mathrm{TE}}\right)\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&= -\left(1+R^{\mathrm{TE}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\sin\varphi\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\E_\theta(P) &= Il\left[\left(1-R^{\mathrm{TM}}\right)\sin\theta_0\cos\theta\cos(\varphi_0-\varphi)-\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)\cos\theta_0\sin\theta\right]\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&= \left(1-R^{\mathrm{TM}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\cos\theta\cos\varphi\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned} \tag{6-197}$$

如果分界面两侧介质相同, 则反射系数等于零, 式 (6-197) 退化为自由空间沿 x 方向水平电偶极子结果式 (6-78).

情形三：设 $\theta_0=\pi/2$, $\varphi_0=\pi/2$, 即电偶极子平行于 y 轴, 平行于分界面, 则式 (6-195) 和式 (6-193) 分别变为

$$\left.\begin{aligned}E_\varphi(P) &= \sin\theta_0\sin(\varphi_0-\varphi)\,Il\left(1+R^{\mathrm{TE}}\right)\mathrm{i}\omega\mu\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&= \left(1+R^{\mathrm{TE}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\cos\varphi\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\E_\theta(P) &= \left[\left(1-R^{\mathrm{TM}}\right)(\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta_0\sin\varphi_0\cos\theta\sin\varphi)\right.\\&\quad\left.-\left(1+R^{\mathrm{TM}}\right)\cos\theta_0\sin\theta\right]\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\&= \left(1-R^{\mathrm{TM}}\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\cos\theta\sin\varphi\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\right\} \tag{6-198}$$

如果分界面两侧介质相同, 则反射系数等于零, 上式退化为自由空间沿 y 方向水平电偶极子结果式 (6-80).

以上结果可以应用于下半空间为有耗介质 (例如地面) 情形; 也可以推广应用于下半空间为分层介质情形, 这时公式中的反射系数应当采用分层介质的反射系数.

6.9.6　天线的接收方向性和辐射方向性相同

互易定理的另一个重要推论就是天线的接收方向性和辐射方向性相同. 证明有多种方式, 以下讨论参照 Harrington(1961) 和谢处方和饶克谨 (1987). 首先分析电磁场和电路二者的关联. 电磁场理论中的源是电流 $\boldsymbol{J}$ 和磁流 $\boldsymbol{M}$, 电路理论中的源分为电流源和电压源.

如果 "源" 所输出的电流和负载无关, 则称之为电流源, 电流源的内阻为 ∞. 电流源可以想象为一小段外加电流丝, 如图 6-31(a) 所示, 其中 $I = I_i$ 为电流源提供的电流, 和负载无关. 如果 "源" 所提供的电压和负载无关, 则称之为电压源, 电压源的内阻为 0. 电压源可以想象为环绕导线的磁流环, 如图 6-31(b) 所示. 其中, $V = -M_i$ 为磁流环提供的电压, 与负载无关.

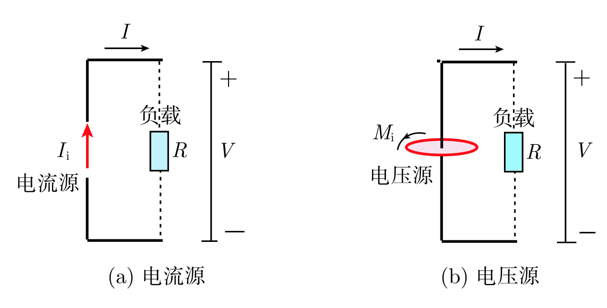


图 6-31　电路理论中的源

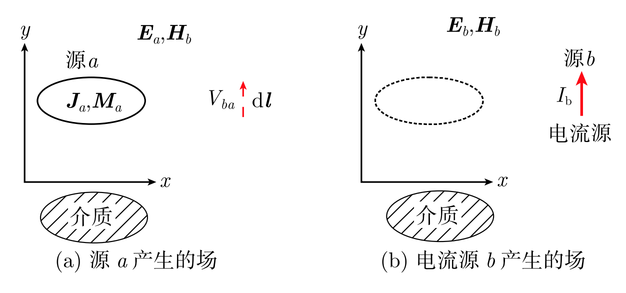
下面将 6.9 节的 "反应" 概念用于电路中的电流源和电压源. 由电磁场中的反应 (6-167), 源 a 对源 b 的反应为

$$\langle a,b\rangle = \iiint\limits_{V_a} (\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b)\mathrm{d}v$$

设源 a 为任意源, 源 b 为电流源, 如图 6-32 所示, 则源 b 对源 a 的反应为

$$\begin{aligned}\langle b,a\rangle &= \iiint\limits_{V_b} (\boldsymbol{J}_b\cdot\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_b\cdot\boldsymbol{H}_b)\mathrm{d}V \\ &= \iiint\limits_{V_b} \boldsymbol{J}_b\cdot\boldsymbol{E}_a\mathrm{d}V \\ &= I_b\int \boldsymbol{E}_a\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -V_{ba}I_b \end{aligned}\tag{6-199}$$

式中, I_b 为电流丝提供的电流, $V_{ba} = -\displaystyle\int \boldsymbol{E}_a\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为源 a 在源 b 电流丝所在处产生的电压.



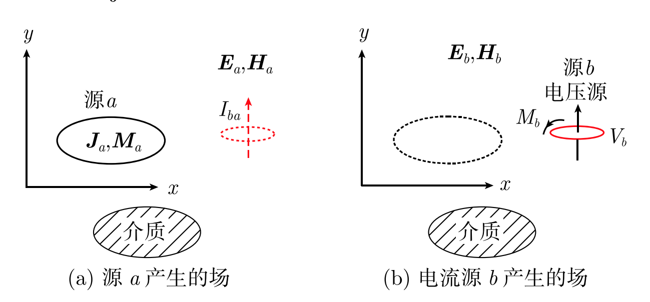
(a) 源 a 产生的场 (b) 电流源 b 产生的场

图 6-32 电流源 b 对源 a 对的反应

设源 a 为任意源, 源 b 为电压源, 如图 6-33 所示, 则源 b 对 a 的反应为

$$\begin{aligned}\langle b, a\rangle &= \iiint_{V_b} (\boldsymbol{J}_b - \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{M}_b \cdot \boldsymbol{H}_a)\mathrm{d}V \\ &= -\iiint_{V_b} \boldsymbol{M}_b \cdot \boldsymbol{H}_a \mathrm{d}V \\ &= -M_b \oint \boldsymbol{H}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -V_b I_{ba}\end{aligned} \tag{6-200}$$

式中, $M_b = -V_b$, $I_{ba} = \oint \boldsymbol{H}_a \cdot d\boldsymbol{l}$ 为源 a 在源 b 磁流丝回路处产生的电流.



(a) 源 a 产生的场 (b) 电流源 b 产生的场

图 6-33 电压源 b 对源 a 对的反应

为了获得电路中的互易定理, 考虑二口 (四端) 网络, 如图 6-34 所示. 线性网络的特性可以用阻抗矩阵描写,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{6-201}$$

式中, I_1, V_1 和 I_2, V_2 分别为 1 口和 2 口的电流与电压.

如果在 1 口加电流源 I_i, 但 2 口为开路, $I_2 = 0$, 则式 (6-201) 变为

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

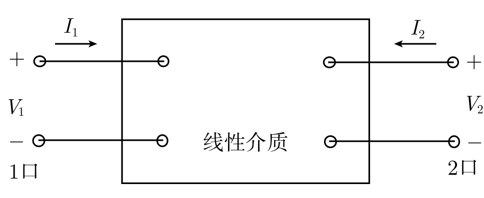


图 6-34　二口网络

所以, 阻抗矩阵元素 z_{ij} 的物理意义为

$$z_{11} = \left.\frac{V_{11}}{I_1}\right|_{I_2=0}, \quad z_{21} = \left.\frac{V_{21}}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

式中, V_{21} 表示电流源 1 在 2 口开路时产生的电压; V_{11} 表示电流源 1 在 1 口的电压. 由式 (6-199), 上式由可以用反应来表示,

$$z_{11} = \left.\frac{V_{11}}{I_1}\right|_{I_2=0} = -\frac{\langle 1,1\rangle}{I_1 I_1}, \quad z_{21} = \left.\frac{V_{21}}{I_1}\right|_{I_2=0} = -\frac{\langle 1,2\rangle}{I_1 I_2} \tag{6-202}$$

同样可得

$$z_{12} = \left.\frac{V_{12}}{I_2}\right|_{I_1=0} = -\frac{\langle 2,1\rangle}{I_2 I_1}, \quad z_{22} = \left.\frac{V_{22}}{I_2}\right|_{I_1=0} = -\frac{\langle 2,2\rangle}{I_2 I_2} \tag{6-203}$$

式中, V_{12} 表示电流源 2 在 1 口开路时产生的电压; V_{22} 表示电流源 2 在 2 口的电压. 归纳起来, 阻抗矩阵元素 z_{ij} 代表位于 j 口 ($j = 1,\ 2$) 的单位电流源在 i 口 ($i = 1,\ 2$) 开路时产生的电压. 根据互易定理, $\langle 1,2\rangle = \langle 2,1\rangle$, 或阻抗矩阵元素

$$z_{12} = z_{21} \tag{6-204}$$

即阻抗矩阵的对角元素彼此相等. 类似的, 如果用电压源代替电流源, 就可以获得导纳矩阵,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{6-205}$$

同样, 由互易定理可得 $y_{12} = y_{21}$. 这就是电路理论的互易定理. 以上概念也可以推广到 N 口网络, 即由线性各向同性介质构成的任何多口网络都具有对称的阻抗矩阵.

发射天线和接收天线以及它们周围介质可以看作二口网络, 只要构成天线的材料以及周围介质是线性各向同性介质, 就可以应用上述互易定理. 设天线位于 A 处作为发射天线, 其输入端为单位电流源 $I_a = 1$ 安培, 如图 6-35(a) 所示. 接收天线位于 B 处, 假设该接收天线具有全向性, 即对各个方向到达的平面波都有相同的响应. 记 B 处接收天线引起的电压为 V_{ba}. 设 A 和 B 之间距离 r 符合远场条件, 当

B 处接收天线在半径为 r 的球面移动, 其接收电压 V_{ba} 的变化正比于 A 处天线的辐射方向因子. 由于发射天线为单位电流源, 所以接收电压 $V_{ba} = \langle ab \rangle$.

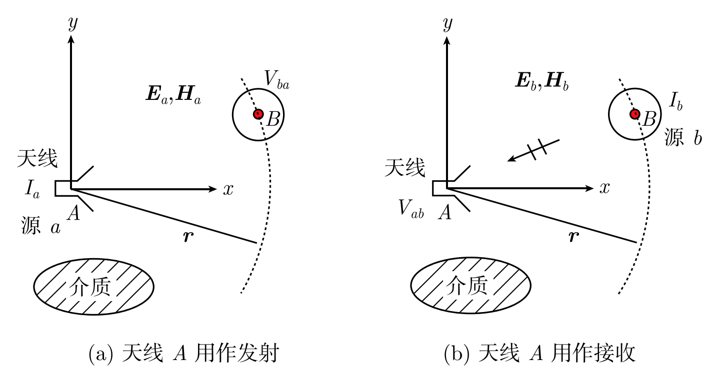


图 6-35　发射和接收天线以及空间介质构成的二口网络

设天线位于 A 处用作接收, 如图 6-35(b) 所示, B 处辐射源为单位电流源 $I_b = 1$ 安培, 且该源为全向性, 即对各个方向具有相同的辐射. 记 A 处接收天线引起的电压为 V_{ab}. 由于距离 r 符合远场条件, 到达 A 点的波为平面波. 当 B 处辐射源在半径为 r 的球面移动, 接收电压 V_{ab} 的变化正比于 A 处天线的接收方向因子. 由于 B 处辐射源为单位电流源, 所以接收电压 $V_{ab} = \langle ba \rangle$. 根据电路理论中的互易定理 (6-204), $\langle ba \rangle = \langle ab \rangle$, 即 $V_{ab} = V_{ba}$. 由此可见, 对于由线性各向同性介质构成的任何天线其接收方向图和辐射方向图是相同的.

如前所述, 天线辐射方向增益定义 (6-86) 为

$$G(\theta, \varphi) = \frac{\langle S_{\mathrm{r}}(\theta, \varphi) \rangle}{\left(\dfrac{P_{\mathrm{r}}}{4\pi r^2} \right)} = \frac{(\theta, \varphi)\text{方向平移能流密度}}{\text{所有方向的平均能流}}$$

接收天线的有效接收面积定义为

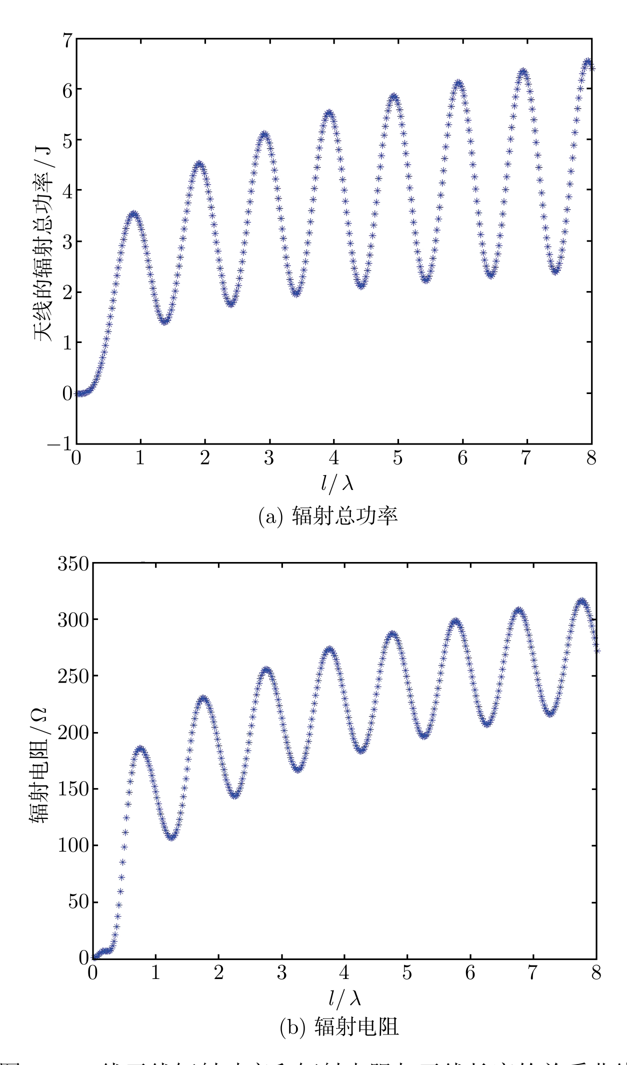
$$A(\theta, \varphi) = \frac{\text{平面波自}(\theta, \varphi)\text{入射时天线接收功率}}{\text{入射波平均能流密度}}$$

可以证明 (Balanis, 1997: 84), 对于任何天线二者之比为恒定常数, 即

$$\frac{A(\theta, \varphi)}{G(\theta, \varphi)} = \frac{\pi}{k^2} = \text{常数} \tag{6-206}$$

6.10　线天线辐射的 MATLAB 计算

本节给出用 MATLAB 计算线天线辐射总功率、辐射电阻和辐射方向图. 参见 6.6 节. 辐射总功率和辐射电阻与天线相对长度 l/λ 的关系曲线如图 6-36(a) 和图 6-36(b) 所示.



(a) 辐射总功率

(b) 辐射电阻

图 6-36　线天线辐射功率和辐射电阻与天线长度的关系曲线

6.10.1　线天线辐射总功率

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%            本程序绘制辐射电阻总功率 Rr 随天线长度 l 与波长比的变化
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc
gama=0.5772;                      %欧拉常数
eta=376.8;                        %真空波阻抗
wavelength=0.5;                   %波长
```

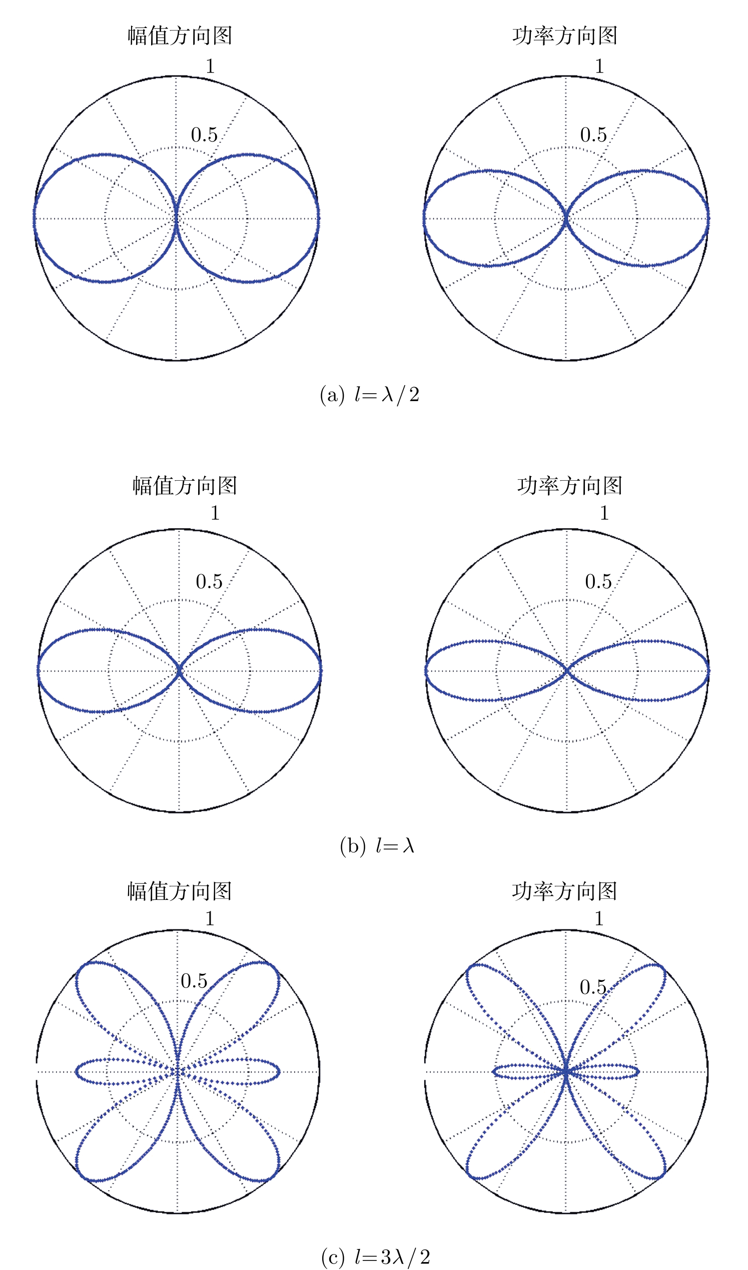
```
k=2*pi/wavelength;                    %波数
for L=0:0.01:4;
KL=k*L;
%y=mfun('Ci',x);                      %调用特殊数学函数 Cosine Integral
%z=mfun('Si',x);                      %调用特殊数学函数 Sine Integral
t1=gama+log(KL)-mfun('Ci',KL);
t2=mfun('Si',2*KL)-2*mfun('Si',KL);
t3=gama+log(KL/2)+mfun('Ci',2*KL)-2*mfun('Ci',KL);
I=t1+sin(KL)/2*t2+cos(KL)/2*t3;
plot(L/wavelength,I,'*')
hold on
end
xlabel('L/\lambda','FontSize',20,'FontName',' 黑体 ')
ylabel(' 天线的辐射总功率 (焦耳)','FontSize',20,'FontName',' 黑体 ')
```

6.10.2 线天线辐射电阻

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           本程序绘制辐射电阻 Rr 随天线长度 l 与波长比的变化情况
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc
gama=0.5772;                          %欧拉常数
eta=376.8;                            %真空波阻抗
wavelength=0.5;                       %波长
k=2*pi/wavelength;                    %波数
for L=0:0.01:4;
KL=k*L;
t1=gama+log(KL)-mfun('Ci',KL);
t2=mfun('Si',2*KL)/2-mfun('Si',KL);
t3=gama+log(KL/2)-mfun('Ci',2*KL)-2*mfun('Ci',KL);
Rr=eta/(2*pi)*(t1+sin(KL)*t2)+1/2*cos(KL)*t3;
plot(L/wavelength,Rr,'*')
hold on
end
xlabel('L/\lambda','FontSize',20,'FontName',' 黑体 ')
ylabel(' 辐射电阻 (\Omega)','FontSize',20,'FontName',' 黑体 ')
```

6.10.3　线天线辐射方向图

线天线辐射方向图的计算公式参见 6.6.3 节. 线天线在几种不同长度 $l = \lambda/2,\ \lambda,\ \cdots, 5\lambda/2,\ 3\lambda$ 时的方向图如图 6-37 所示. 其中, 左图为电场幅值方向图, 右图为功率方向图.



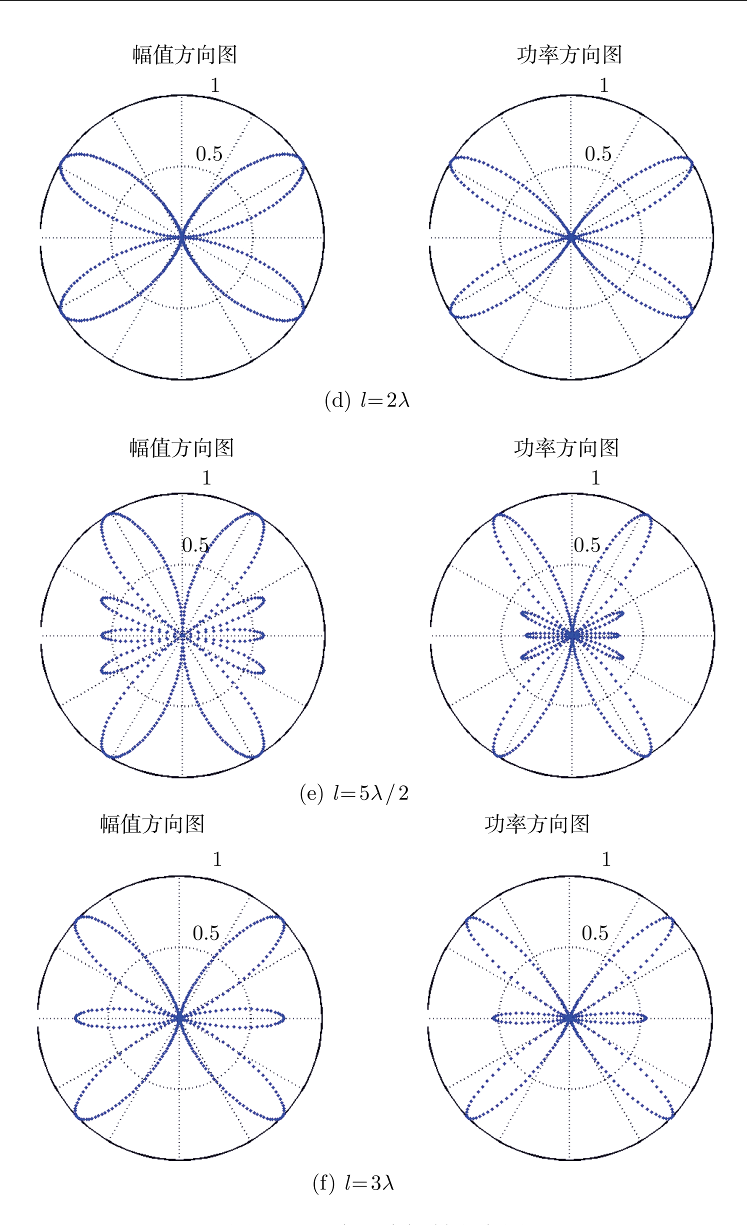


图 6-37　线天线辐射方向图

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                 线天线的电场幅值和功率方向图
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;clc
wavelength=1;                            % 工作波长
```

```
l=wavelength*6/2;                            % 天线长度
k=2*pi/wavelength;                           % 波矢量大小
ww=k*l/2;
theta=eps:2*pi/500:2*pi;                     % 方向角
E=(cos(ww*cos(theta))-cos(ww))./sin(theta);  % 电场幅值
E=abs(E);
E0=max(E);
subplot(1,2,1)
polar(theta+pi/2,E./E0,'.');                 % 电场幅值方向图 (最大值归一)
title(' 幅值方向图 ','FontSize',18,'FontName','bold')
subplot(1,2,2)
polar(theta+pi/2,(E./E0).*(E./E0),'.');      % 功率方向图 (最大值归一)
title(' 功率方向图 ','FontSize',18,'FontName','bold')
```

6.11　电偶极子及其阵列辐射的 MATLAB 计算

6.11.1　基本电偶极子的辐射场

本节给出用 MATLAB 计算电偶极子场分布, 可以适用于近场区, 参见 6.3 节. 设电偶极子 $Il = 0.002\ \mathrm{A \cdot m}$, 工作波长 1m. 通过电偶极子中心的垂直平面内电场 $\sqrt{|E_r|^2 + |E_\theta|^2}$ 的分布如图 6-38 所示. 需要注意的是偶极子的场随距离衰减很快, 为了便于显示图中场值是取两次对数以后的结果.

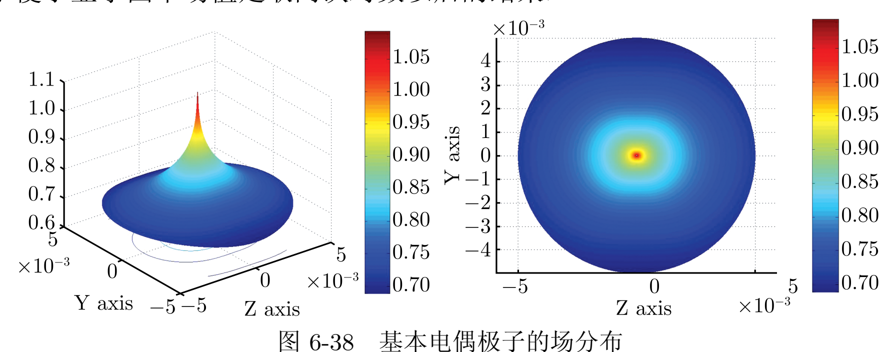


图 6-38　基本电偶极子的场分布

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%              本程序显示基本电偶极子的场分布
%              要求工作波长远大于偶极子长度
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;clc
epslion_0=8.85e-12;                 %真空中的介电常数
```

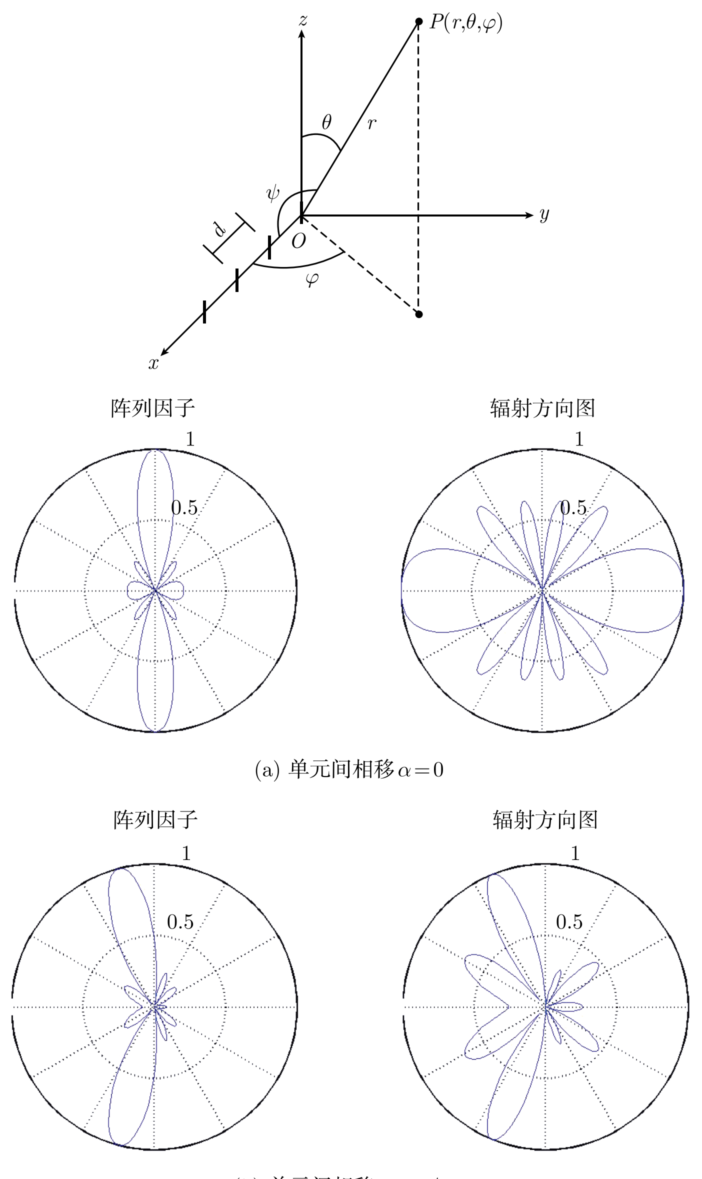
```
mur_0=4.0*pi*1.0e-7;                    %真空中的磁导系数
epslion_r=2;                            %填充介质的相对介电常数
mur_r=1.0;                              %填充介质的相对磁导系数
epslion=epslion_0*epslion_r;            %填充介质的介电常数
mur=mur_0*mur_r;                        %填充介质的磁导系数

wavelength=input(' 工作波长 =(米)');
l=input(' 单元长度 =(米)—— 要求远小于波长 ');

f=3.0e8/wavelength;
omega=f*2*pi;
I=1.0;                                  %设定电流强度
R=0.005;
r=linspace(0.00002,R,300)';             %将半径方向分为 300 分
phi=linspace(0.,2*pi,300);              %将圆周方向分为 300 分
theta=linspace(0,2*pi,300);             %将圆周方向分为 300 分
z=r*cos(theta);
y=r*sin(theta);
k=(2*pi/wavelength);                    %波数
T=exp(i*k.*r)./(4*pi.*r);               %球面波因子
ikr=i./(k.*r);
Er=-i*omega*mur*I*l*2*(ikr+ikr.^ 2).*T*cos(theta);
%偶极子电场的 r 方向分量
Er=abs(Er);
Etheta=-i*omega*mur*I*l*(1.+ikr+ikr.^ 2).*T*sin(theta);
%偶极子电场的 theta 方向分量
Etheta=abs(Etheta);
E=sqrt(Er. ^ 2+Etheta.^ 2);
surfc(z,y,log10(log10(E))),colorbar     %为便于显示场值取对数
xlabel('z axis')
ylabel('y axis')
shading flat
shading interp
```

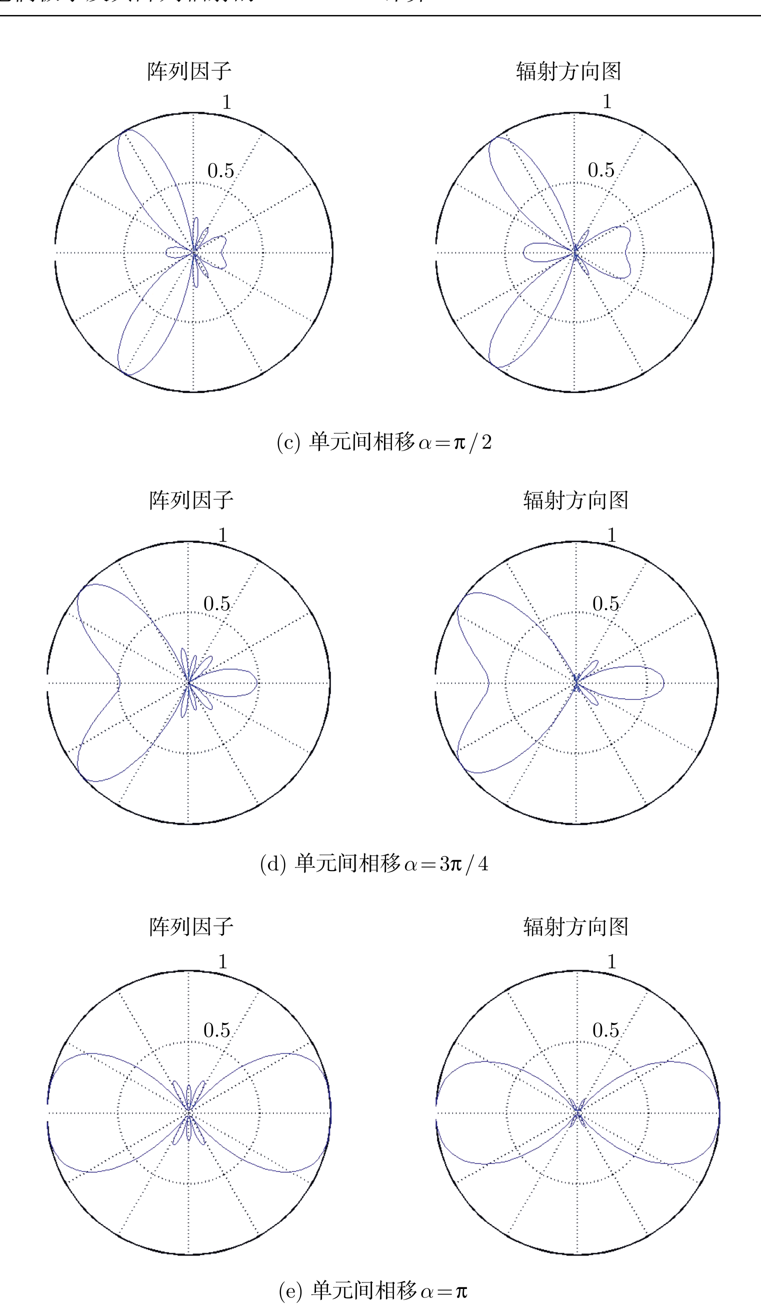
6.11.2　电偶极子阵列的辐射方向图

本节给出用 MATLAB 计算电偶极子阵列的辐射方向图, 参见 6.7 节. 设天线阵列由五个平行等间距排列的电偶极子组成, 电偶极子 $Il = 0.002\ \text{A} \cdot \text{m}$, 间距为 0.5m, 波长为 1m. 当单元间的相移 α 分别为 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π 时, xoz 面内 $(\varphi = 0, \pi)$ 方向图如图 6-39 所示, 左边为阵列因子方向图, 右边为单元天线与阵列



(a) 单元间相移 $\alpha = 0$

(b) 单元间相移 $\alpha = \pi/4$



(c) 单元间相移 $\alpha=\pi/2$

(d) 单元间相移 $\alpha=3\pi/4$

(e) 单元间相移 $\alpha=\pi$

图 6-39 单元间相移不同时阵列天线的辐射方向图

因子乘积的辐射方向图. 可见, 随着单元间相移的变化天线波束主瓣方向也相应改变.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%本程序显示沿轴等间距排列的 5 元偶极阵列的阵列因子和 xoz 面辐射方向图
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;
wavelength=1;                                  %波长
N=5;                                           %阵元数目
alfa=pi;                                       %递进相位
d=0.5;                                         %单元间距
l=0.002;                                       %偶极子长度
c=3e8;                                         %真空光速
k=(2*pi/wavelength);                           %波矢量大小
omega=k*c;                                     %圆频率
phi=0;                                         %方位角
theta= 0:pi/100:2*pi;                          %俯仰角
w=-alfa+k*d.*sin(theta)*cos(phi);
AF=sin(N*(w./2))./sin(w./2);                   %阵列因子
Ele=omega*l*abs(sin(theta));                   %电偶极单元
AF1=Ele.*abs(AF);
X1=max(AF);
X2=max(AF1);
subplot(1,2,1)
polar(theta+pi/2,abs(AF/X1))                   %阵列因子
title(' 阵列因子 ','FontSize',18,'FontWeight','bold')
subplot(1,2,2)
polar(theta+pi/2,abs(AF1/X2))                  %辐射方向图
title(' 辐射方向图 ','FontSize',18,'FontWeight','bold')
```

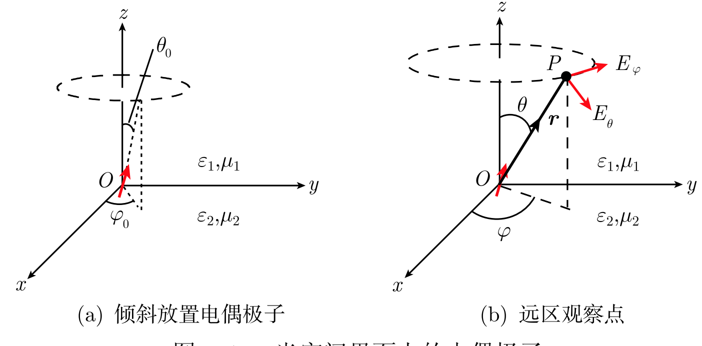
6.11.3 半空间界面上电偶极子的远区场

本节给出用 MATLAB 计算半空间介质界面电偶极子远区场, 参见 6.9.5 节. 计算公式重写如下：

$$E_\varphi(P) = \sin\theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi)\left(1 + R^{\mathrm{TE}}\right) \mathrm{i}\omega\mu Il \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}$$

$$\begin{aligned} E_\theta(P) = &\left[\left(1 - R^{\mathrm{TM}}\right)\sin\theta_0\cos\theta\cos(\varphi_0 - \varphi)\right. \\ &\left. - \left(1 + R^{\mathrm{TM}}\right)\cos\theta_0\sin\theta\right]\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \end{aligned}$$

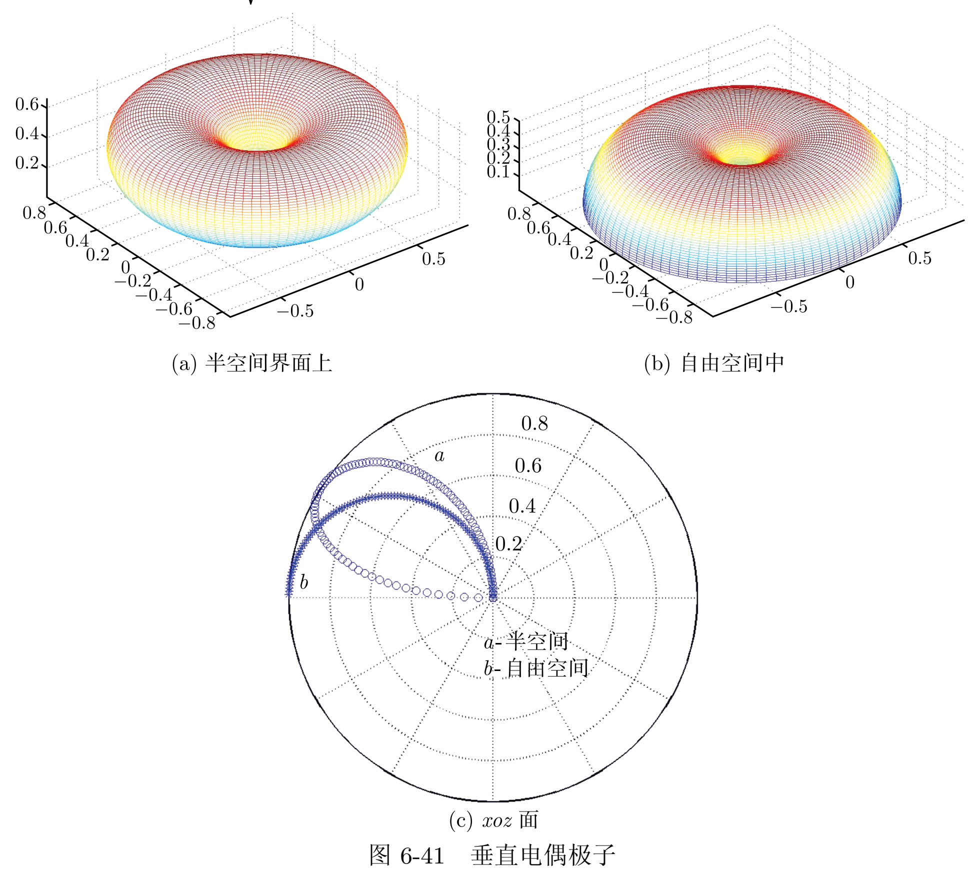
式中, (θ_0, φ_0) 为电偶极子的取向, (θ, φ) 为观察点方向, 如图 6-40 所示.



(a) 倾斜放置电偶极子　　(b) 远区观察点

图 6-40　半空间界面上的电偶极子

设上、下半空间介质参数分别为 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2r}\varepsilon_0 = 2.5\varepsilon_0$, 电偶极子 $Il = 0.002\ \mathrm{A \cdot m}$, 频率 $f = 6 \times 10^6\mathrm{Hz}$. 计算得到地面上方 $0 < \theta < 90°$, $0 < \varphi < 360°$ 的辐射场 $\sqrt{|E_\varphi|^2 + |E_\theta|^2}$ 方向图 (用最大值归一). 对于沿 z 方向的垂直



(a) 半空间界面上　　(b) 自由空间中

(c) xoz 面

图 6-41　垂直电偶极子

电偶极子 ($\theta_0 = 0$), 上半空间辐射的幅值方向图如图 6-41 所示, 其中图 6-41(a) 为电偶极子位于半空间界面情形; 作为比较图 6-41(b) 为电偶极子在自由空间辐射; (c) 为 xoz 面内方向图. 对于沿 x 方向的水平电偶极子 ($\theta_0 = 90°$, $\varphi_0 = 0$), 上半空间辐射的幅值方向图如图 6-42 所示, 图 6-42(a) 为电偶极子位于半空间界面情形, 图 6-42(b) 为电偶极子在自由空间辐射, 图 (c)、(d) 分别为 xoz 面、yoz 面内的方向图.

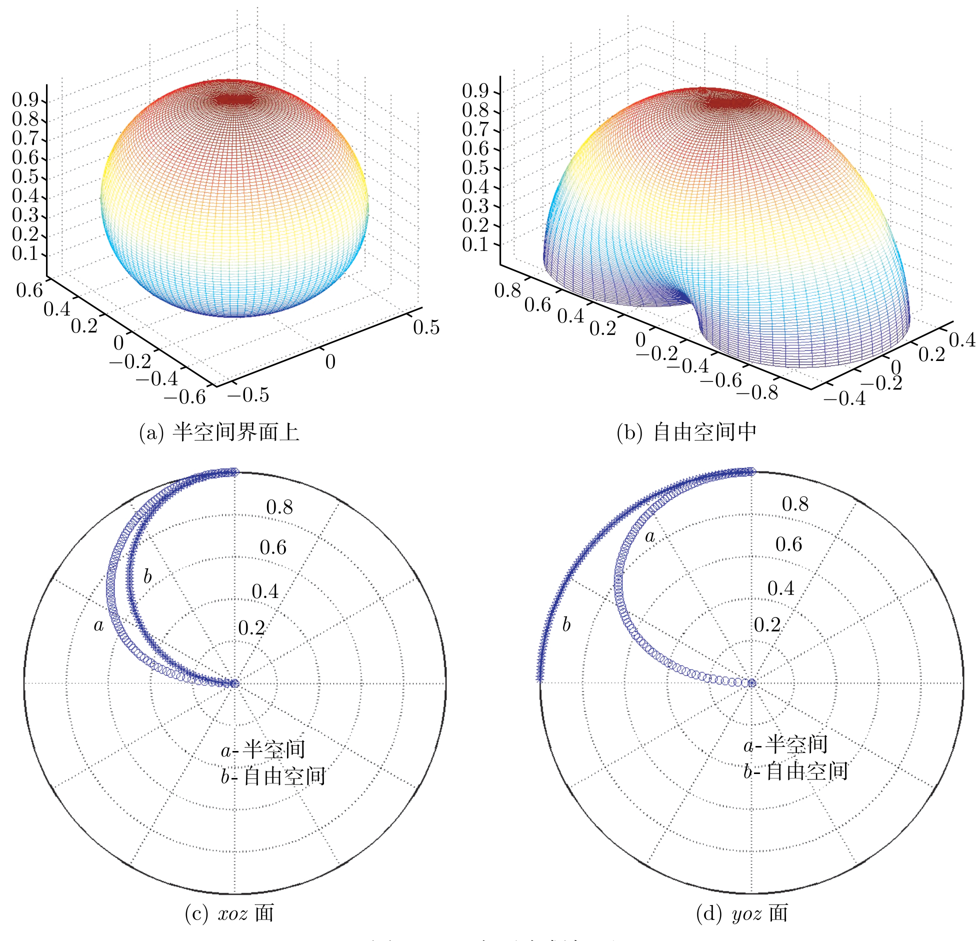


图 6-42　水平电偶极子

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      本程给出半空间界面任意方向放置偶极子的远场方向图 (上半空间)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;clc;
epslion_0=8.85e-12;                    %真空中的介电常数
mur_0=4.0*pi*1.0e-7;                   %真空中的磁导系数
```

```
epslion_r=2.5;                          %介质的相对介电常数
mur_r=1.0;                              %介质的相对磁导系数
sigma=0;                                %介质电导
sigmam=0;
f=6e6;                                  %频率
omega=2*pi*f;                           %圆频率
I=1;                                    %偶极子电流
l=0.02;                                 %偶极子长度
theta0=pi/2;                            %偶极子取向角
phi0=0;                                 %偶极子取向角
N=100;                                  %方向角的分割单元数
epslion=epslion_0*epslion_r+j*sigma/omega;   %复数介电常数
mur=mur_0*mur_r+j*sigmam/omega;         %复数磁导系数
k=omega*sqrt(epslion_0*mur_0);          %入射波波矢量
ktsqrt=omega 2*epslion*mur;             %透射波波矢量平方
theta=meshgrid(eps:pi/2/N:pi/2);        %俯仰角 0~ pi/2
phi=meshgrid(eps:2*pi/N:2*pi)′;         %方位角在 0~2pi
k_z=k*cos(theta);                       %入射波矢量在 Z 方向的投影
                                        (Z 为界面法向) —真空中
k_x=k*sin(theta);                       %入射波矢量在 X 方向的投影
                                        —相位匹配
kt_z=sqrt(ktsqrt*ones(N+1)-k_x. ∧ 2);   %透射波矢量在 z 方向的投影
                                        (z 为界面法向)
%TE 情形反射系数
p0t_te=mur_0*kt_z./(mur*k_z);
R_TE=(ones(N+1)-p0t_te)./(ones(N+1)+p0t_te);
%TM 情形反射系数
p0t_tm=epslion_0*kt_z./(epslion*k_z);
R_TM=(ones(N+1)-p0t_tm)./(ones(N+1)+p0t_tm);

Ephi=-sin(theta0)*(ones(N+1)+R_TE).
*sin(phi0*ones(N+1)-phi)*I*l*omega;
%电场 phi 分量
Etheta=(sin(theta0)*(ones(N+1)-R_TM).
*cos(theta).*cos(phi0*ones(N+1)-phi)...
```

```
        -cos(theta0)*(ones(N+1)+R_TM).
*sin(theta))*I*l*omega;                    %电场 theta 分量
E=sqrt((abs(Etheta)). 2.+(abs(Ephi)). 2);  %计算总辐射电场
Emax=max(max(E));
[x,y,z]=sph2cart(phi,pi/2-theta,E/Emax);
mesh(x,y,z);
axis equal
```

习　　题

1. 十字形 (turnstile) 天线由两个彼此相互垂直的 Hertz 电偶极子组成, 电流分别为 $\boldsymbol{J}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}Il\delta(\boldsymbol{r}')$ 和 $\boldsymbol{J}_2 = \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{i}Il\delta(\boldsymbol{r}')$.

(1) 试证此天线的远区辐射场为

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\exp(i\varphi)(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta + i\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

(2) 讨论在 xoy 平面和沿 z 方向 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 辐射场的极化特性.

2. 试证半波天线的方向性等于

$$D = G(\theta,\varphi)_{\max} = 1.64$$

【提示】　参见 Kraus(1984: 659).

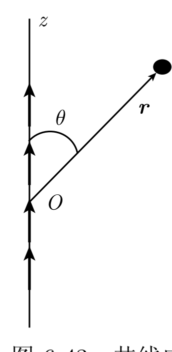


图 6-43　共线电偶极子阵列

3. 由 N 个 Hertz 电偶极子组成的共线均匀阵列如图 6-43 所示, 二相邻单元间距为 d, 相移为 α.

(1) 试求此阵列的阵列因子 $|F(u)|$. 若设相移 $\alpha = kd\cos\beta_0$, 其中 β_0 为常数, 试求主极大的方向.

(2) 给出辐射场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式, 并说明为什么此阵列不能成为 “列向阵列”.

4. 对于 6.7.5 节所讨论的电流分布为三角形天线阵列, 试证其主极大与第一次极大之比为 0.045, 即 -27dB.

5. 具有 24 单元的天线阵列, 各单元电流 Il 相同且平行于 $\hat{z}$, 沿 x 轴成等间距 $(d = \lambda/2)$ 排列, 相邻单元的累进相移为 α.

(1) 欲使天线辐射主瓣方向与 x 轴成 0°, 25°, 50° 和 90°, 计算累进相移 α 的相应取值.

(2) 计算此阵列作为列向阵列时, 主瓣的第一零点波束宽度.

6. 设两个电偶极子天线垂直于 xOy 面, 沿 x 轴放置, 相距为 d, 如图 6-44 所示. 电偶极子 1 的偶极矩为 I_0l, 电偶极子 2 为 $I_0l\exp(i\psi)$, 相位差 $-\pi < \psi \leqslant \pi$. 要求此天线阵列在 xOy 平面内 $\varphi = \pi$ 方向的辐射为零, 最大辐射方向位于 $\varphi = \pm\pi/3$, 并且在 $|\varphi| \leqslant \pi/2$ 的范围内没有零点. 试确定二天线之间距离 d 和相位差 ψ.

7. 四个电偶极子天线垂直于 xOy 面, 按照图示位置放置, 其电偶极矩均为 Il, 且为同相位. 试求此天线阵列在 xOy 平面内辐射零点的方向, 并给出 xOy 平面内的方向图 (图 6-45).

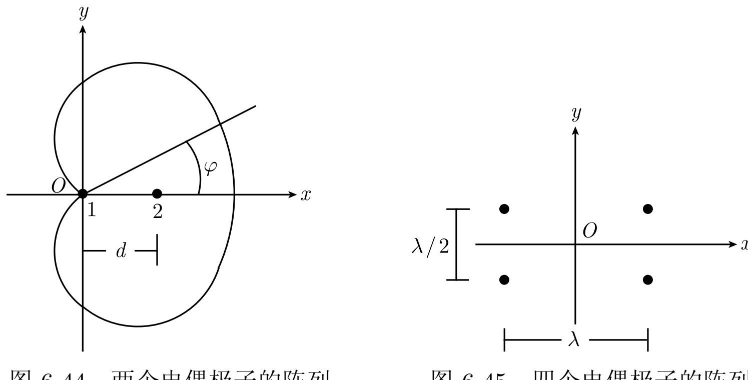


图 6-44　两个电偶极子的阵列　　图 6-45　四个电偶极子的阵列

8. 验证如图 6-19 所示四个电偶极子阵列的辐射特性用式 (6-153)、式 (6-154) 所得结果和 6.7.2 节方法计算结果相同.

9. 对于如图 6-20 所示五个电偶极子组成的阵列, 利用式 (6-152)、式 (6-155) 和式 (6-156) 画出该阵列在 xoy 平面内的辐射方向图.

10. 对于如图 6-21 所示六个电偶极子组成的阵列, 利用式 (6-152)、式 (6-157) 和式 (6-158) 画出该阵列在 xoy 平面内的辐射方向图.

11. 利用互易定理证明垂直于理想导体表面的外加磁流将不产生辐射场.

12. 两个平行放置的半波天线, 电流幅值和相位相同, 距离为 $\lambda/2$, 试求此阵列的辐射场.

13. 理想导体板上有两个平行缝隙, 宽为 w, 长为 $\lambda/2$, 距离为 $\lambda/2$, 如图 6-46 所示. 缝隙电场可近似为

$$\boldsymbol{E}_{\text{slot}}\left(z'\right)=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{V_0}{w}\sin\left[k\left(\frac{l}{2}-\left|z'\right|\right)\right],\quad \left|z'\right|<\frac{l}{2}$$

式中, $k=2\pi/\lambda$, $l=\lambda/2$. 试求此阵列的辐射场.

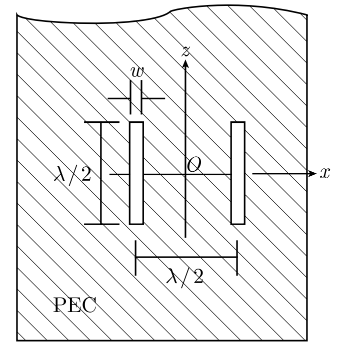


图 6-46　理想导体板上的两个缝隙

第 7 章　衍　　射

本章讨论等效原理和 Huygens 原理及其用于衍射分析. 在 Kirchhoff 近似基础上给出 Fresnel 衍射和 Fraunhofer 衍射基本关系式及几种孔、缝情形的衍射场计算. 最后, 介绍互补原理及其在衍射的应用.

7.1　等 效 原 理

7.1.1　唯一性定理

对于时谐电磁场, 若空间区域 V 内源的分布给定, 区域界面 S 上电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量为已知, 如图 7-1 所示, 则区域 V 中电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的分布由 Maxwell 方程唯一确定. 这一定理称为唯一性定理.

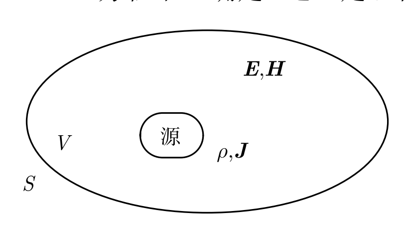


图 7-1　唯一性定理的区域和边界

为了证明唯一性定理, 假设对于给定的源存在两个不同的解, 其电磁场分别记为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$. 令它们之差为

$$\left.\begin{aligned}\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1\\ \delta\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\end{aligned}\right\}\tag{7-1}$$

因为两个解均满足具有相同源的 Maxwell 方程 (条件一), 所以二者之差应满足无源 Maxwell 方程, 即

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\delta\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\delta\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\delta\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\tag{7-2}$$

假设区域中介质具有小的损耗, 其本构参数为

$$\begin{aligned}\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}\\ \mu=\mu_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\mu_{\mathrm{I}}\end{aligned}$$

式中, ε_{R}、ε_{I}、μ_{R}、μ_{I} 均为实数. 将 $\delta\boldsymbol{H}^*$ 点乘式 (7-2) 第二式, $\delta\boldsymbol{E}$ 点乘式 (7-2) 第一式, 然后二者相减得到

$$\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*)=\mathrm{i}\omega\mu\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2-\mathrm{i}\omega\varepsilon^*\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2$$

上式的复数共轭为

$$\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H})=-\mathrm{i}\omega\mu^*\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2+\mathrm{i}\omega\varepsilon\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2$$

以上二式相加得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*+\delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H})&=\mathrm{i}\omega\mu\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2-\mathrm{i}\omega\varepsilon^*\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2-\mathrm{i}\omega\mu^*\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2+\mathrm{i}\omega\varepsilon\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2\\&=-2\omega\left(\mu_{\mathrm{I}}\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2+\varepsilon_{\mathrm{I}}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2\right)\end{aligned}$$

上式沿区域 V 积分可得

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*+\delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H})=-2\omega\iiint_V \mathrm{d}V\left(\mu_{\mathrm{I}}\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2+\varepsilon_{\mathrm{I}}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2\right)\tag{7-3}$$

当区域界面 S 上电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量为给定 (条件二), 即 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 或 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$ 在界面 $\boldsymbol{S}$ 上切向分量相同, 因而 $\delta\boldsymbol{E}$ 或 $\delta\boldsymbol{H}$ 在界面 S 上切向分量等于零, 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\delta\boldsymbol{E}=0$ 或 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\delta\boldsymbol{H}=0$. 从而式 (7-3) 左端等于零, 即

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*+\delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H})=0$$

代入式 (7.3) 得

$$\iiint_V \mathrm{d}V\left(\mu_{\mathrm{I}}\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2+\varepsilon_{\mathrm{I}}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2\right)=0$$

由于被积函数是 $\delta\boldsymbol{E}$ 和 $\delta\boldsymbol{H}$ 模值的平方, 所以当且仅当 $\delta\boldsymbol{E}$ 和 $\delta\boldsymbol{H}$ 在区域 V 中处处为零时上式成立. 这表示区域 V 中处处满足 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_1$, 即解为唯一.

唯一性定理表明在电磁场求解时需要已知区域中源的分布和区域边界条件. 唯一性定理也是镜像原理、等效原理等电磁基本定理的基础.

7.1.2　等效原理

设封闭面 S 内有源及介质, S 面以外的场分布为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$, 如图 7-2(a) 所示. 对于外部区域而言, 以下两种情形为等效：

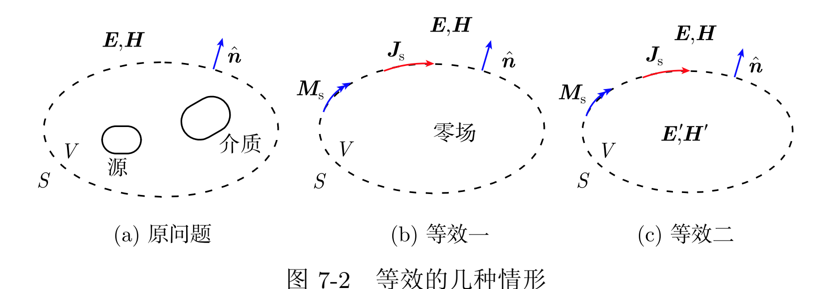


图 7-2　等效的几种情形

情形 a: 原问题. S 面内有源和介质, 全空间有场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$, 包括 S 面以外都有场分布.

情形 b: S 面外场分布 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 不变, S 面内为零场, 如图 7-2(b) 所示. 这时, 根据边界条件, 在 S 面上应有面电流和面磁流,

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E} \tag{7-4}$$

情形 a 和情形 b 在 S 面外均为无源, 在 S 面外侧 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 切向分量相同. 根据唯一性定理, 二者在 S 面外区域 (所关心区域) 中的场分布相同.

应当注意, 等效只是就空间某一区域而言. 只要所关心区域内源和介质分布不改变, 所关心区域以外源和介质的影响可以用区域边界上的面电磁流源来代替. 实际上, 等效方式并非唯一. 图 7-2(b) 中 S 面内的零场也可以采用其他 (物理上允许的) 电磁场分布 $\boldsymbol{E}',\boldsymbol{H}'$, 如图 7-2(c) 所示, 这时根据边界条件 S 面上的面电流和面磁流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}'\right),\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}'\right) \tag{7-5}$$

对于 S 面外区域而言, 如图 7-2 所示三种情形的场分布相同, 但是 S 面内并不一样.

7.1.3 镜像原理

在理想导体 (PEC) 表面有面电流, 所以理想导体表面边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}\Big|_{\mathrm{PEC}}&=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\Big|_{\mathrm{PEC}}&=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\end{aligned}\right\} \tag{7-6}$$

如前所述, 可以在 Maxwell 方程中引入磁荷磁流. 在理想磁导体 (PMC) 表面有面磁流, 所以理想磁导体表面边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\Big|_{\mathrm{PMC}}&=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}\Big|_{\mathrm{PMC}}&=-\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\end{aligned}\right\} \tag{7-7}$$

设理想导体平面前有平行电偶极子, 位于 $x<0$ 左半空间, 如图 7-3(a) 所示. 要求得 $x<0$ 半空间区域中的电磁场分布, 可以用等效原理处理. 为此, 考虑另一情形, 如图 7-3(b) 所示, 将理想导体平板去掉, 并在原来电偶极子的对称位置放置一个平行反相的电偶极子. 于是两个电偶极子在 $x=0$ 界面切向电场彼此相抵消, 即 $x=0$ 面上切向电场为零. 根据唯一性定理, 情形 a 与情形 b 在 $x<0$ 区域有相同源 (电偶极子) 分布; 且在 $x=0$ 界面上有相同切向电场 ($\boldsymbol{E}$ 的切向分量等于零).

所以, 情形 a 与情形 b 在 $x<0$ 区域有相同解, 即相同场分布. 或者说, 在 $x<0$ 区域, 情形 a 与情形 b 为等效. 换言之, 对于平行电偶极子, 理想导体平板的作用可以用一个平行反相的镜像电偶极子代替. 情形 b 的电磁场容易计算, 利用等效问题 b 便于获得原问题 a 的解.

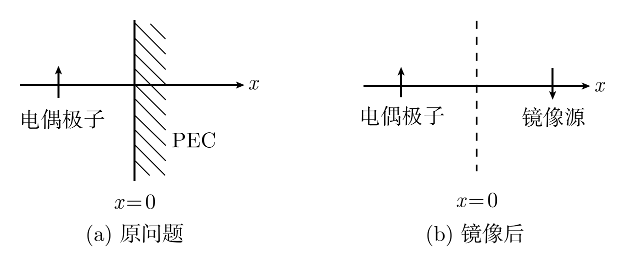


图 7-3 平行电偶极子的镜像

设电偶极子与磁偶极子平行或垂直位于 PEC 板前, 如图 7-4(a) 所示. 可以将 PEC 板对左半空间的影响用镜像偶极子代替, 如图 7-4(b) 所示. 由于在 $x<0$ 区域 (a) 和 (b) 有相同的源分布, 同时在 $x=0$ 面上 (a) 和 (b) 二者的切向电场均为零, 所以根据等效原理, 问题 a 和问题 b 在 $x<0$ 区域有相同的场分布. 图中磁偶极子用双箭头表示. 注意图中镜像偶极子的同相和反相关系. 特别, 当偶极子与 PEC 板的距离减小为零时, 平行电偶极子和垂直磁偶极子在左半空间将不产生场.

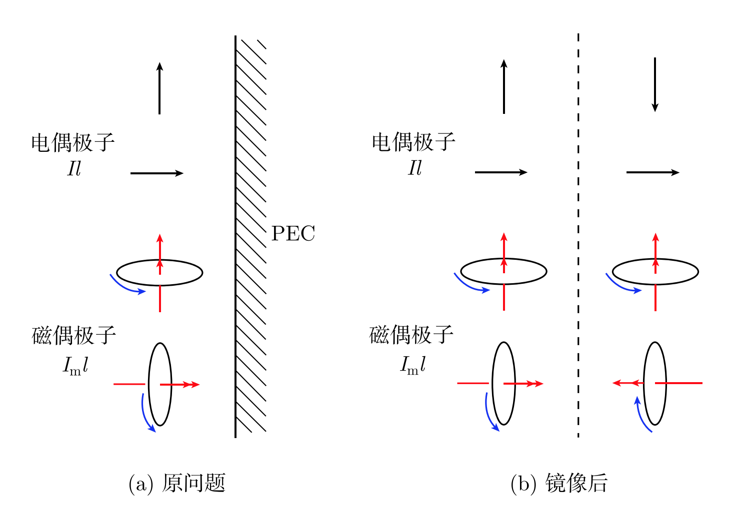


图 7-4 电偶极子的和磁偶极子的镜像：PEC 平面

同样, 图 7-5 给出电偶极子与磁偶极子在 PMC 板前及其镜像结果. 图中用双线表示 PMC 表面. 注意图中镜像偶极子的同相和反相关系. 特别, 当偶极子与 PMC 板距离减小为零时, 垂直电偶极子和平行磁偶极子在左半空间将不产生场.

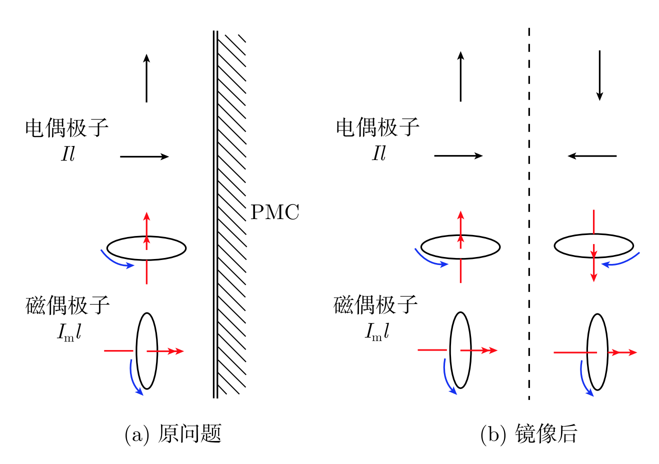


图 7-5　电偶极子的和磁偶极子的镜像：PMC 平面

上述镜像原理实质上是用镜像源来替代 PEC 或 PMC 平面边界的作用, 从而使原问题的半空间区域求解转变为无限大均匀自由空间问题的求解; 经过镜像等效后问题的求解大为简化. 此外, 对于 PEC 或 PMC 的平行或直角界面, 需要用多个镜像源来等效, 如图 7-6 所示. 矩形界面则可看做平行和直角界面的组合, 也需要用多重镜像来等效. 镜像原理的应用通常限于 PEC 和 PMC 无限大平面边界, 但在工程计算和分析中仍是一种重要的物理近似.

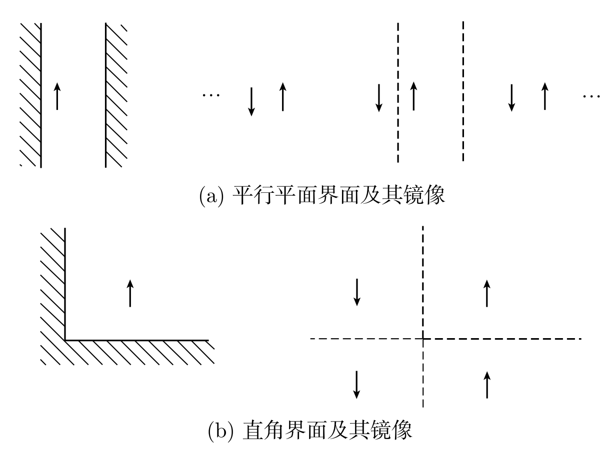
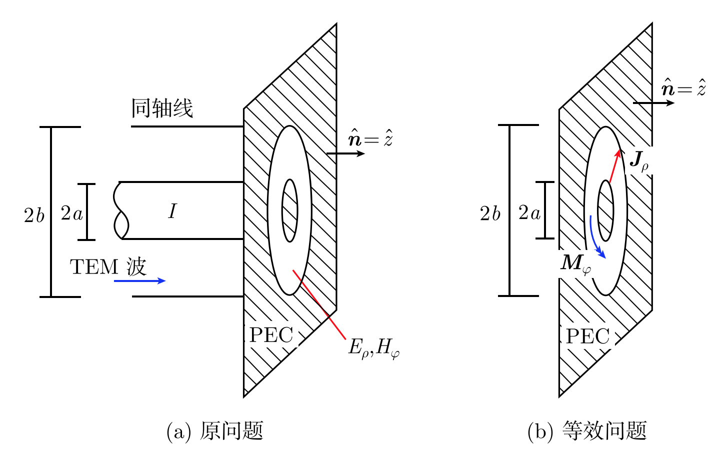


图 7-6　平行平面和直角界面及其镜像

7.1.4　理想导体平面上同轴线开口的辐射

下面给出用等效原理处理同轴线开口辐射的例子. 设同轴线连接到 PEC 平面, 如图 7-7(a) 所示, 求同轴线开口在右半空间的辐射. 本问题的求解可分为两步：一是同轴线中 TEM 波传输到开口处, 二是开口面处等效面电磁流所产生的辐射. 下

面分别计算.



(a) 原问题 (b) 等效问题

图 7-7 无限大 PEC 面上的同轴线开口

同轴线中的 TEM 波具有沿径向的电场和 ϕ 方向的磁场, 分别为

$$E_\rho=\frac{-U_0}{\rho\lg\left(\dfrac{b}{a}\right)},\quad H_\varphi=\frac{I}{2\pi\rho}$$

式中, U_0 为同轴线内、外壁之间电位差 (电压). TEM 波传输到开口面处, 设左侧空间为零场, 得到如图 7-7(b) 所示开口面处等效面电磁流为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{J}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\rho}}H_\varphi, &&J_\rho=H_\varphi=\frac{I}{2\pi\rho}\\&\boldsymbol{M}=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=-\hat{\boldsymbol{\varphi}}E_\rho, &&M_\varphi=-E_\rho=\frac{U_0}{\rho\lg\left(\dfrac{b}{a}\right)}\end{aligned}\right\}\tag{7-8}$$

上述等效电磁流辐射的计算可以采用以下逐步等效的方式化简. 图 7-8(a) 是图 7-7(b) 孔缝等效电磁流 (等效一) 的简化示意. 由于 PEC 板左侧空间为零场, 可以将左侧空间填充理想导体, 相当于再用 PEC 板盖住同轴线的环形开口 (等效二), 如图 7-8(b) 所示. 这时, 等效电磁流 J_ρ, M_φ 放置在 PEC 平面前. 根据镜像原理, 对于平行于 PEC 平面的电流, 当其与 PEC 面的距离为零时, 由于镜像电流为平行反相, 其辐射场为零. 于是可以不考虑等效电流的辐射 (等效三), 如图 7-8(c) 所示. 又根据镜像原理, 平行于 PEC 平面的磁流, 当其与 PEC 面的距离为零时, 由于镜像电流为平行同相, 它的辐射等效于自由空间中磁流 $2M_\varphi$ 的辐射 (等效四), 如图 7-8(d) 所示.

由 6.4 节讨论知道, 圆形电流相当于磁偶极子的辐射. 根据对偶原理, 图 7-7(b) 所示圆形磁流可以等效为电偶极子辐射 (等效五), 如图 7-8(d) 所示. 圆形磁流和电

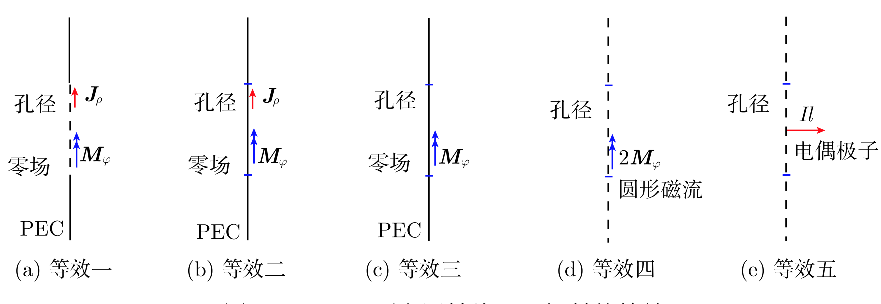


图 7-8　PEC 面上同轴线开口辐射的等效

偶极子的对应关系见式 (6-55),

$$Il = \mathrm{i}\omega\varepsilon I_{\mathrm{m}}\pi a^2$$

由于同轴线开口处等效磁流分布在半径 a 到 b 的环形区域, 其等效为电偶极子的总电偶极矩可以用以下积分计算:

$$\begin{aligned}
Il &= \mathrm{i}\omega\varepsilon\int_{\mathrm{a}}^{b} 2M_\varphi\pi\rho^2\mathrm{d}\rho \\
&= \mathrm{i}\omega\varepsilon\int_{\mathrm{a}}^{b}\frac{2U_0}{\rho\lg\left(\dfrac{b}{a}\right)}\pi\rho^2\mathrm{d}\rho \\
&= \mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{2\pi U_0}{\lg\left(\dfrac{b}{a}\right)}\int_a^b\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{2\pi U_0\left(b^2-a^2\right)}{2\lg\left(\dfrac{b}{a}\right)} \\
&= \mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{\pi U_0\left(b^2-a^2\right)}{\lg\left(\dfrac{b}{a}\right)}
\end{aligned} \tag{7-9}$$

等效为电偶极子后其辐射场的计算可见 6.3 节. 以上分析中关于孔缝场的 TEM 波处理采用了 Kirchhoff 近似, 即孔缝场近似等于入射场. 当同轴线半径 a 和 b 加大, 或波长减小时, 以上所得辐射公式需要加以修正.

7.2　Huygens 原理的数学表述

Huygens 原理认为, 在波的传播过程中, 前一时刻波面上的每一点可看做产生次级球面波的新波源; 这些次级球面波的包络将形成下一时刻新的波面. Huygens

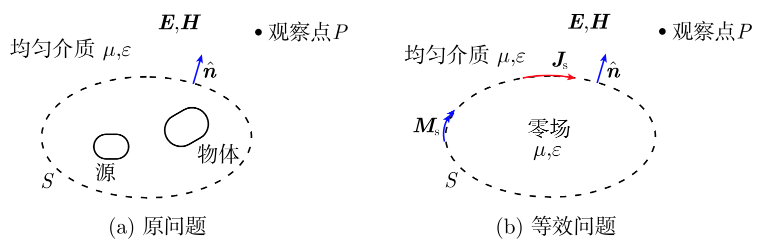
原理可以用来说明波的衍射 (绕射) 和折射等现象. 下面给出 Huygens 原理数学表述的几种形式.

7.2.1 用张量 Green 函数和等效面电磁流表示

设源和散射体在 S 面内, S 面外为均匀介质 μ,ε, 观察点 P 在 S 面外, 如图 7-9(a) 所示. 根据等效原理, 封闭面 S 内源的作用可以用 S 面上的等效电磁流表示. 设 S 面内为零场, S 面外场分布不变, 则 S 面上等效面电磁流为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{J}_\mathrm{s}&=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\,|_S\\ \boldsymbol{M}_\mathrm{s}&=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}\,|_S\end{aligned}\right\}\tag{7-10}$$

如图 7-9(b) 所示. 根据等效原理, 如图 7-9 所示问题 a 与问题 b 在 S 面外为等效.



(a) 原问题 (b) 等效问题

图 7-9 封闭面 S 外部的等效：Huygens 原理

进一步, 将问题 b 在 S 面内的零场区中填充均匀介质 μ,ε, 其介质参数和 S 面外相同. 这时全空间为均匀介质 μ,ε, 观察点的电磁场可以用自由空间 Green 函数计算. 设 S 面上等效电流 $\boldsymbol{J}_\mathrm{s}$ 的辐射场为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$, 等效磁流的辐射场为 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$. 应用式 (6-24) 得到电流 $\boldsymbol{J}_\mathrm{s}$ 的辐射场,

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu\oint\!\!\!\oint_S\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\tag{7-11}$$

式中, $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为自由空间张量 Green 函数, 见式 (6-27). 等效磁流 $\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$ 的辐射场 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$ 可由对偶关系得到

$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\varepsilon\oint\!\!\!\oint_S\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}_S(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\tag{7-12}$$

相应电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})&=\frac{-1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}_2\\&=-\nabla\times\oint\!\!\!\oint_S\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\\&=-\oint\!\!\!\oint_S\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{7-13}$$

式 (7-13) 最后等式中交换了旋度算子和积分的顺序, 这是由于旋度的求导是对观察点坐标, 而积分是对积分点坐标的缘故. 式 (7-11) 与式 (7-13) 相加得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) \\ &= \oiint_S \left[\mathrm{i}\omega\mu\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}') - \nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \end{aligned} \tag{7-14}$$

利用对偶性, 磁场为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oiint_S \left[\mathrm{i}\omega\varepsilon\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}') + \nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{7-15}$$

以上将 S 面外的场用 S 面上等效电磁流表示.

确定等效面电磁流以后, 观察点的电磁场也可以采用 6.2.1 节所述势函数和标量 Green 函数表示, 这里不列出具体公式. 在不同应用情况, Huygens 原理还有以下所述的其他几种不同数学形式.

7.2.2　用标量 Green 函数和 S 面上电磁场切向分量表示

将式 (7-14)、式 (7-15) 中的电磁流用式 (7-10) 代替, 得到

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \oiint_S \left\{\mathrm{i}\omega\mu\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\right\}\mathrm{d}S' \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \oiint_S \left\{-\mathrm{i}\omega\varepsilon\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] + \nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\right\}\mathrm{d}S'\end{aligned}\right\} \tag{7-16}$$

式 (7-16) 用到 S 面上的切向电磁场分量和张量 Green 函数.

自由空间中张量 Green 函数见式 (6-27),

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

式中, 标量 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}, \quad R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$$

注意式 (7-16) 中包含以下张量运算, 设 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量 (与观察点坐标无关),

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a} &= \left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a} \\ &= G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\cdot\boldsymbol{a} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

$$= G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{a} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{a}$$

和

$$\begin{aligned}
\nabla \times \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{a} &= \nabla \times \left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right) G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{a} \\
&= \nabla \times \left[G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{a}\right] + \frac{1}{k^2}\nabla \times [\nabla\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{a}] \\
&= \nabla \times [G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{a}] + \frac{1}{k^2}\nabla \times \{\nabla[\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{a}]\} \\
&= \boldsymbol{a} \times \nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + 0
\end{aligned}$$

上式代入式 (7-16) 得到

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oiint_S \Big\{ & \mathrm{i}\omega\mu G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{k^2}\nabla\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] \\
& + \nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \times [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\Big\}\,\mathrm{d}S' \\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oiint_S \Big\{ & -\mathrm{i}\omega\varepsilon G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] - \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{k^2}\nabla\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \\
& + \nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \times [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\Big\}\,\mathrm{d}S'
\end{aligned}\right\} \tag{7-17}$$

上述公式用到 S 面上电磁场的切向分量和标量 Green 函数.

7.2.3 Stratton-Chu 公式

以下推导过程参照 Stratton (1941). 应用矢量 Green 公式,

$$\begin{aligned}
&\iiint_V [\boldsymbol{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q})]\mathrm{d}V \\
&= \oiint_S (\boldsymbol{P} \times \nabla \times \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \times \nabla \times \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}
\end{aligned} \tag{7-18}$$

令式中

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{Q} = G\boldsymbol{a} = \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R}\boldsymbol{a}$$

式中, $\boldsymbol{a}$ 为常矢量. 注意到 Green 函数满足式 (6-20), 所以,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q} &= \nabla \times \nabla \times (G\boldsymbol{a}) \\
&= \nabla[\nabla \cdot (G\boldsymbol{a})] - \nabla^2(G\boldsymbol{a}) \\
&= \nabla(\boldsymbol{a} \cdot \nabla G) - \boldsymbol{a}\nabla^2 G
\end{aligned}$$

$$= \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla G) + \boldsymbol{a}k^2 G + \boldsymbol{a}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

由 Maxwell 方程式 (6-33) 得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - k^2\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J} - \nabla\times\boldsymbol{M}$$
$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

以上二式代入矢量 Green 公式 (7-18), 注意积分范围为 S 面外空间区域 V, 如图 7-10 所示, 于是, 式 (7-18) 左端为

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V (\cdot)\mathrm{d}V =&\boldsymbol{a}\cdot\iiint\limits_V (\mathrm{i}\omega\mu G\boldsymbol{J} - G\nabla\times\boldsymbol{M})\mathrm{d}V\\ &-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') - \iiint\limits_V \boldsymbol{E}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla G)\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{7-19}$$

式 (7-19) 用到 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的挑选性. 应用矢量分析公式,

$$\iiint\limits_V (\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint\limits_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}$$

式 (7-19) 中关于磁流的积分项可进一步改写为

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V G\nabla\times\boldsymbol{M}\mathrm{d}V &= \iiint\limits_V [\nabla\times(G\boldsymbol{M}) - \nabla G\times\boldsymbol{M}]\mathrm{d}V\\ &= \oint\!\!\!\oint\limits_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times(G\boldsymbol{M}) - \iiint\limits_V \nabla G\times\boldsymbol{M}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

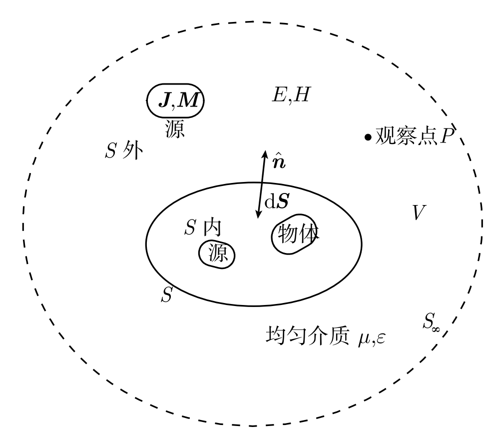


图 7-10　封闭面 S 外部区域

注意图 7-10 中积分区域 V 的表面包括 S 和 S_∞ 两部分, 根据辐射条件, 沿远区表面 S_∞ 的积分项等于零. 所以面积分只保留沿 S 的积分. 此外, 式 (7-19) 中最后一项积分可改写为

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \boldsymbol{E}\cdot\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\nabla G\right)\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V \left\{\nabla\cdot\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{a}\cdot\nabla G\right)\right]-\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{a}\cdot\nabla G\right)\right\}\mathrm{d}V\\
=&\oiint_S \left(\boldsymbol{a}\cdot\nabla G\right)\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{a}\cdot\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla G\mathrm{d}V\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\oiint_S \nabla G\left(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)-\boldsymbol{a}\cdot\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla G\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

合并以上公式得式 (7-18) 左端结果为

$$\begin{aligned}
\iiint_V (\cdot)\mathrm{d}V=&\boldsymbol{a}\cdot\iiint_V \left(\mathrm{i}\omega\mu G\boldsymbol{J}+\nabla G\times\boldsymbol{M}+\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla G\right)\mathrm{d}V\\
&-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}'\right)-\boldsymbol{a}\cdot\oiint_S \left[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\left(G\boldsymbol{M}\right)+\nabla G\left(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)\right]
\end{aligned}\tag{7-20}$$

另外, 矢量 Green 公式 (7-18) 式右端可以化为

$$\begin{aligned}
\oiint_S (\cdot)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=&\oiint_S \left[\boldsymbol{E}\times\nabla\times\left(G\boldsymbol{a}\right)-G\boldsymbol{a}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\oiint_S \left[\boldsymbol{E}\times\nabla\times\left(G\boldsymbol{a}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\oiint_S \left[G\boldsymbol{a}\times\left(\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\oiint_S \left[\boldsymbol{E}\times\left(\nabla G\times\boldsymbol{a}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot\left[G\left(\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]\\
=&\oiint_S \left(\nabla G\times\boldsymbol{a}\right)\cdot\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}\right)-\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot\left[G\left(\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\oiint_S \left[\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}\right)\times\left(\nabla G\right)-G\left(\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]
\end{aligned}\tag{7-21}$$

将以上式 (7-20)、式 (7-21) 代入矢量 Green 公式 (7-18), 消去等式两端的任意常矢量 $\boldsymbol{a}$, 经过移项整理, 最后得到

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}'\right)=\iiint_V \left[\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}\right)G-\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{r}\right)\times\nabla G+\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}\right)}{\varepsilon}\nabla G\right]\mathrm{d}V$$

$$-\oiint_S \{\mathrm{i}\omega\mu\,[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})]\,G+[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\times\nabla G+[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\,\nabla G\}$$

交换符号 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{r}$, 上式变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=&\iiint_V\left[\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,G-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G+\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\nabla'G\right]\mathrm{d}V\\&-\oiint_S\{\mathrm{i}\omega\mu\,[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G+[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\\&\times\nabla'G+[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla'G\}\end{aligned}\tag{7-22}$$

式中, ∇' 是对 $\boldsymbol{r}'$ 的求导. 式 (7-22) 为电场积分关系式, 式中体积分代表 S 面外 (区域 V 内) 源的辐射, 面积分代表 S 面内 (区域 V 外) 源辐射对观察点的贡献.

利用对偶关系可以得到关于磁场的积分公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=&\iiint_V\left[\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\,G+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\nabla G+\frac{\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')}{\mu}\nabla'G\right]\mathrm{d}V\\&+\oiint_S\{\mathrm{i}\omega\varepsilon\,[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G-[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\\&\times\nabla'G-[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla'G\}\end{aligned}\tag{7-23}$$

式 (7-22)、式 (7-23) 称为 Stratton-Chu 公式.

如果 S 面外没有电磁流源 (对于本章所讨论的衍射问题), 式 (7-22)、式 (7-23) 中体积分项等于零, 即得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=-\oiint_S\{\mathrm{i}\omega\mu\,[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G+[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G+[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla'G\}\\\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})&=\oiint_S\{\mathrm{i}\omega\varepsilon\,[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G-[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G-[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla'G\}\end{aligned}\right\}\tag{7-24}$$

以上公式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向为区域 V 的外法向. 记 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S'$, 式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 S 面外法向, 如图 7-10 所示, 式 (7-24) 变为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\oiint_S\{\mathrm{i}\omega\mu\,[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G+[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G+[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla'G\}\mathrm{d}S'\\\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})&=-\oiint_S\{\mathrm{i}\omega\varepsilon\,[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G-[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G-[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla'G\}\,\mathrm{d}S'\end{aligned}\right\}\tag{7-25}$$

式 (7-25) 同时用到 S 面上电场和磁场的切向与法向分量以及标量 Green 函数.

7.2.4 Franz 公式

注意到如式 (6-19) 所示标量 Green 函数的梯度具有以下关系：

$$\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\nabla' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

式中, ∇' 表示对积分点 $\boldsymbol{r}'$ 求导, ∇ 表示对观察点 $\boldsymbol{r}$ 求导. 取式 (7-25) 第二式的旋度得

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) =& -\mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' + \nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla' G\mathrm{d}S' \\
&+\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla' G\mathrm{d}S' \\
=& -\mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' - \nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla G\mathrm{d}S' \\
&-\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,\nabla\times\nabla G\mathrm{d}S' \\
=& -\mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' + \nabla\times\oiint_S \nabla\times\{[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G\}\,\mathrm{d}S' \\
=& -\mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' + \nabla\times\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S'
\end{aligned}$$

上式推导中用到 $\nabla\times\nabla G = 0$, 及

$$\nabla\times\{[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\} = \nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\times[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]$$

又由 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$, 代入上式得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' + \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' \tag{7-26}$$

利用对偶关系可得磁场表示式为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' - \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\nabla\times\oiint_S [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\,G\mathrm{d}S' \tag{7-27}$$

式 (7-26)、式 (7-27) 称为 Franz 公式. 它只和 S 面上电场与磁场切向分量以及标量 Green 函数有关.

7.2.5 用 S 面上电场表示

为了将式 (7-25) 第一式中的磁场 $\boldsymbol{H}$ 用电场 $\boldsymbol{E}$ 来表示, 利用以下关系式:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') = \nabla' \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \\
&[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \times \nabla' G = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' G) - \hat{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \cdot \nabla' G]
\end{aligned}
$$

上式代入式 (7-25) 第一式可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \oiint_S \{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G + [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \times \nabla' G + [\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla' G\}\mathrm{d}S' \\
&= \oiint_S \{[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla' \times \boldsymbol{E})]G + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E})\nabla' G + \boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' G) - \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{E} \cdot \nabla' G)\}\mathrm{d}S'
\end{aligned} \tag{7-28}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\nabla'(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}) &= (\boldsymbol{E} \cdot \nabla')\hat{\boldsymbol{n}} + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \times (\nabla' \times \hat{\boldsymbol{n}}) + \hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla' \times \boldsymbol{E}) \\
&= \hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla' \times \boldsymbol{E}) + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

注意在上式推导中将法向单位矢 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 作为常矢量, 这是因为法向单位矢 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是与面元 $\mathrm{d}S'$ 相关; 而式 (7-28) 中算子 ∇' 是对被积函数的空间坐标 $\boldsymbol{r}'$ 求导. 上式即为

$$
\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla' \times \boldsymbol{E}) = \nabla'(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}) - (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E}
$$

此外由于 S 面所包围区域中没有自由电荷, $\nabla' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = 0$, 因而,

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{E} \cdot \nabla' G) &= \hat{\boldsymbol{n}}[\nabla' \cdot (G\boldsymbol{E}) - G(\nabla' \cdot \boldsymbol{E})] \\
&= \hat{\boldsymbol{n}}[\nabla' \cdot (G\boldsymbol{E})]
\end{aligned}
$$

以上二式代入式 (7-28) 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \oiint_S \{[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla' \times \boldsymbol{E})]G + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E})\nabla' G + \boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' G) - \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{E} \cdot \nabla' G)\}\mathrm{d}S' \\
&= \oiint_S \{[\nabla'(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}) - (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E}]G + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E})\nabla' G \\
&\quad + \boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' G) - \hat{\boldsymbol{n}}[\nabla' \cdot (G\boldsymbol{E})]\}\mathrm{d}S' \\
&= \oiint_S \{G\nabla'(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}) - G(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E} + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E})\nabla' G \\
&\quad + \boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' G) - \hat{\boldsymbol{n}}[\nabla' \cdot (G\boldsymbol{E})]\}\mathrm{d}S'
\end{aligned} \tag{7-29}
$$

又由梯度公式 $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$, 所以

$$\nabla'\left[G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right]=\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\nabla'G+G\nabla'\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)$$

代入式 (7-29) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right)=&\oiint_S\{G\nabla'\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)-G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'\right)\boldsymbol{E}+\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\nabla'G\\&+\boldsymbol{E}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'G\right)-\hat{\boldsymbol{n}}\left[\nabla'\cdot\left(G\boldsymbol{E}\right)\right]\}\,\mathrm{d}S'\\=&\oiint_S\{\nabla'\left[G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right]-G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'\right)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'G\right)-\hat{\boldsymbol{n}}\left[\nabla'\cdot\left(G\boldsymbol{E}\right)\right]\}\mathrm{d}S'\\=&\oiint_S[\boldsymbol{E}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'G\right)-G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'\right)\boldsymbol{E}]\mathrm{d}S'\\&+\oiint_S\{\nabla'\left[G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right]-\hat{\boldsymbol{n}}\left[\nabla'\cdot\left(G\boldsymbol{E}\right)\right]\}\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{7-30}$$

注意式 (7-30) 中算子 ∇' 是对被积函数的空间坐标 $\boldsymbol{r}'$ 求导, 所以法向单位矢 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 视为常矢量, 于是有

$$\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla'\right)\times\left(G\boldsymbol{E}\right)=\nabla'\left[G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right]-\hat{\boldsymbol{n}}\left[\nabla'\cdot\left(G\boldsymbol{E}\right)\right]$$

上式代入式 (7-30) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right)=&\oiint_S[\boldsymbol{E}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'G\right)-G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'\right)\boldsymbol{E}]\mathrm{d}S'\\&+\oiint_S\{\nabla'\left[G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right]-\hat{\boldsymbol{n}}\left[\nabla'\cdot\left(G\boldsymbol{E}\right)\right]\}\mathrm{d}S'\\=&\oiint_S[\boldsymbol{E}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'G\right)-G\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'\right)\boldsymbol{E}]\mathrm{d}S'+\oiint_S\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla'\right)\times\left(G\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{7-31}$$

下面证明式 (7-31) 右端第二项面积分 $\oiint_S\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla'\right)\times\left(G\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}S'$ 等于零. 为此将封闭面 S 划分为两部分, $S=S_1+S_2$, 如图 7-11 所示. 将式 (7-31) 右端第二项面积分写为

$$\oiint_S\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla'\right)\times\left(G\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}S'=\iint_{S_1}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla'\right)\times\left(G\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}S'+\iint_{S_2}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla'\right)\times\left(G\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}S'$$

根据 Stokes 定理 $\iint_S\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\right)\times\boldsymbol{A}=\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{A}$, 上式又可写为回路积分形式,

$$\oiint_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla') \times (G\boldsymbol{E})\,\mathrm{d}S' = \iint_{S_1} (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla') \times (G\boldsymbol{E})\,\mathrm{d}S' + \iint_{S_2} (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla') \times (G\boldsymbol{E})\,\mathrm{d}S'$$
$$= \oint_{L_1} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times (G\boldsymbol{E}) + \oint_{L_2} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times (G\boldsymbol{E})$$
$$= 0$$

上式最后等于零, 这是由于回路 L_1 和 L_2 分别为曲面 S_1 和 S_2 的边线, $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 二者方向彼此相反, 如图 7-11 所示, 因此两项积分彼此相消. 以上结果代入式 (7-31) 可得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oiint_S [\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' G) - G(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E}]\mathrm{d}S'$$
$$= \oiint_S \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right] \mathrm{d}S' \tag{7-32}$$

式 (7-32) 只用到 S 面上电场 $\boldsymbol{E}$ 和标量 Green 函数. 利用对偶关系可得磁场表示式,

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oiint_S \left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right] \mathrm{d}S' \tag{7-33}$$

式 (7-33) 只用到 S 面上电场 $\boldsymbol{H}$ 和标量 Green 函数. 在二维衍射分析中应用 Huygens 原理表示式 (7-32)、式 (7-33) 较为方便, 因为二维 TM 和 TE 波通常只求解电场和磁场的 z 分量 E_z 和 H_z, 式 (7-32)、式 (7-33) 将不涉及其他场分量.

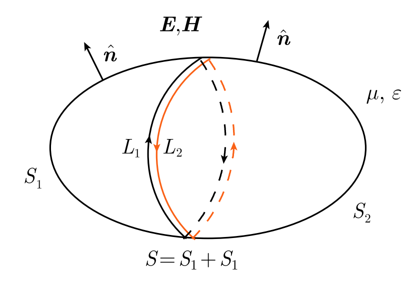


图 7-11 封闭面 S 区分为两部分 S_1 和 S_2

7.2.6 Huygens 原理的标量表示式

如果只关心电场的某一个分量, 例如 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}}U(\boldsymbol{r})$, 式 (7-32) 便可写为

$$U(\boldsymbol{r}) = \oiint_S \left[U(\boldsymbol{r}') \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial U(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right] \mathrm{d}S' \tag{7-34}$$

式 (7-34) 用 S 面上标量函数 U 及其法向导数 $\partial U/\partial n$ 和标量 Green 函数表示. 这一标量形式是物理光学中普遍应用的衍射计算公式. 通常它只适用于近轴方向衍

射, 即垂直于孔缝面轴线附近的衍射计算. 偏离轴线较远时, 衍射场的极化方向将不再和孔缝面场的极化方向相同. 当电场其他分量不可忽略时, 标量式不能适用.

由标量 Green 函数 (6-19) 得

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}$$

可得式 (7-34) 中法向导数 $\partial G/\partial n$ 为

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n}&=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla' G\\&=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\\&=-\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{R}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi R}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}\right)\end{aligned}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{R}}$ 为沿 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 方向的单位矢. 上式代入式 (7-34) 得

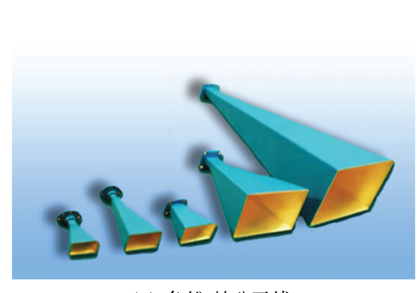
$$U(\boldsymbol{r})=-\oiint_S\left[\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{R}\right)U(\boldsymbol{r}')\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}\right)+\frac{\partial U(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R}\mathrm{d}S' \tag{7-35}$$

式 (7-35) 表明, 观察点处的场 $U(\boldsymbol{r})$ 可看做面元 $\mathrm{d}S'$ 处子波源贡献的叠加, 子波源的强度如方括号因子所示.

7.3　衍射问题的 Kirchhoff 近似

7.3.1　Kirchhoff 近似

微波波段使用的喇叭天线和反射面天线, 如图 7-12 所示, 可以归结为通过有限开口孔径向外辐射电磁波, 通常称为面天线, 其辐射场分析用到 Huygens 原理.



(a) 角锥喇叭天线



(b) 抛物面天线

图 7-12　衍射应用的例子

衍射问题中通常源和衍射场分开在两个区域, 如图 7-13 所示. 其中图 7-13(a) 源在 S_1 面的左侧, 半球面 S_2 趋于无限远, 衍射区在右半空间; 图 7-13(b) 源在 S_1 面内, 球面 S_2 趋于无限远, 衍射区在 S_1 面以外空间.

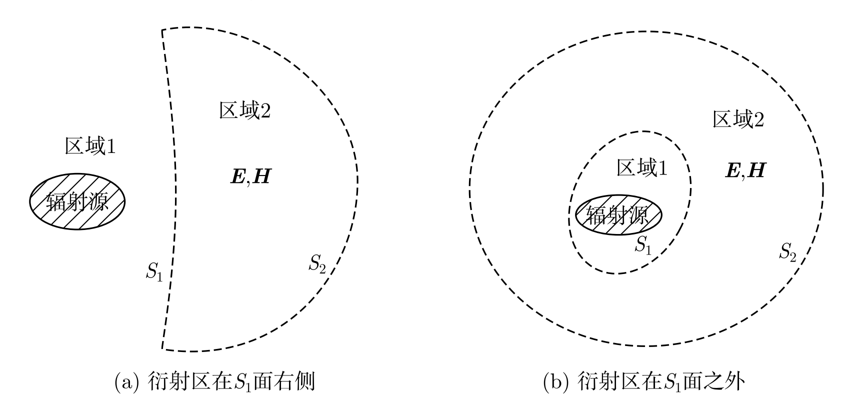


图 7-13 衍射问题的两个区域：源区和衍射区

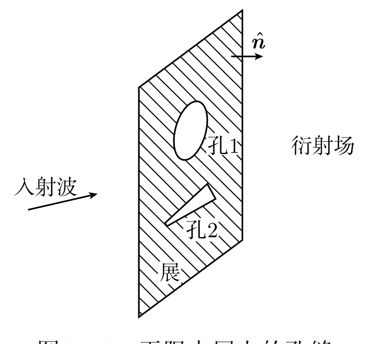


图 7-14 无限大屏上的孔缝

当 Huygens 原理用于分析屏上的孔缝衍射, 如图 7-14 所示, 如果孔缝尺寸大于波长, 可以采用以下 Kirchhoff 近似：① 孔缝面上的场等于入射波; ② 孔缝以外屏面的场近似等于零. 在此近似下 Huygens 原理中的封闭面积分简化为沿孔径面的积分, 且孔径面处的电磁场是入射波. 如果孔缝尺寸和波长相近, 以上假设不再成立, 需要修正或改用其他数值分析方法.

7.3.2 标量场的 Kirchhoff 近似

如式 (7-35) 所示 Huygens 原理的标量表示式常用于分析无限大平面上孔缝的衍射, 如图 7-14 所示. 当孔缝尺寸大于波长时, 可采用 Kirchhoff 近似. 对于标量场, 将式 (7-35) 右端 S 面区分为两部分：

(1) 除孔以外其他处 U 与 $\partial U/\partial n$ 的值均为零; (2) 孔缝面上 U 与 $\partial U/\partial n$ 的值和入射波的值相同. 设入射波为平面波,

$$E_{\rm i}\left(\boldsymbol{r}'\right)=E_0\exp\left[{\rm i}\left(k_{{\rm i}x}x+k_{{\rm i}y}y\right)\right]$$

式中, $\boldsymbol{k}_{\rm i}=\hat{\boldsymbol{x}}k_{{\rm i}x}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{{\rm i}y}$ 为入射波矢量. 于是

$$U\left(\boldsymbol{r}'\right)\simeq E_{\rm i}\left(\boldsymbol{r}'\right)=E_0\exp\left[{\rm i}\left(k_{{\rm i}x}x'+k_{{\rm i}y}y'\right)\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' U(\boldsymbol{r}') = \mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}) U(\boldsymbol{r}')$$

假设波的频率足够高, $kR = 2\pi R/\lambda \gg 1$, 式 (7-35) 中近似有

$$\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{R}\right) = \mathrm{i}k\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kR}\right) \simeq \mathrm{i}k$$

于是式 (7-35) 改写为

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{r}) &= -\oiint_{S'} \left[\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{R}\right) U(\boldsymbol{r}') \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}\right) + \frac{\partial U(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right] \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R} \mathrm{d}S' \\ &\simeq -\iint_{S_{\mathrm{a}}} \left[\mathrm{i}kU(\boldsymbol{r}') \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}\right) + \mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}) U(\boldsymbol{r}')\right] \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R} \mathrm{d}S' \\ &= -\mathrm{i}k \iint_{S_{\mathrm{a}}} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\right) U(\boldsymbol{r}') \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R} \mathrm{d}S' \end{aligned} \tag{7-36}$$

式中, S_{a} 为孔缝面, $\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}/k$ 为入射波矢量方向单位矢量. 对于远区衍射场, $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}} \simeq \cos\theta_{\mathrm{s}}$, θ_{s} 为衍射方向和孔缝面法向之间夹角. 式 (7-36) 中 $(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}})/2 \simeq (\cos\theta_{\mathrm{s}} + \cos\theta_{\mathrm{i}})/2$ 称为倾斜因子, 式中, θ_{i} 为入射方向和孔缝面法向之间夹角. 倾斜因子是小于 1 的正数. 若入射波垂直于孔缝面, $\theta_{\mathrm{i}} = 0$, 倾斜因子化简为 $(1+\cos\theta_{\mathrm{s}})/2$. 历史上 Huygens 原理将衍射场看做孔缝面上各子波源再辐射贡献的叠加. 式 (7-36) 表明各子波源的贡献还需要乘上附加振幅因子 $\mathrm{i}k(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}+\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}})$ 才可以得到正确的衍射图形.

7.3.3 PEC 和 PMC 屏上孔缝场的 Kirchhoff 近似

根据 Kirchhoff 近似, 孔缝场可以近似为入射波, 即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}} &= -\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \end{aligned}\right\} \tag{7-37}$$

孔缝以外屏面上的场等于零. 对于无限大平面上孔的衍射, 通常用到以下两种特殊情形.

情形一：如果屏的材料可近似看做理想导体 (PEC), 参照如图 7-8 所示的等效方式, 上述等效可逐步化简如图 7-15 所示：(a) 为孔缝面上有等效电流和磁流; (b) 为用 PEC 盖上孔缝面, 等效电流和磁流位于 PEC 板上; (c) 为根据镜像原理, 平行于 PEC 的电流对辐射没有贡献, 可以略去; (d) 为根据镜像原理, 平行于 PEC 的磁流辐射相当于磁流加倍后在自由空间的辐射. 最后需要计算以下磁流在自由空间的辐射场,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\,|_{S_{\mathrm{a}}} &= 0 \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\,|_{S_{\mathrm{a}}} &= -2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \end{aligned}\right\} \tag{7-38}$$

(a) 等效一　(b) 等效二　(c) 等效三　(d) 等效四

图 7-15　PEC 面上孔缝的等效电磁流

情形二：如果屏的材料可近似看做理想磁导体 (PMC)，作为对偶，等效电磁流 (7-37) 可逐步简化，如图 7-16(a)~(d) 所示，最后需要计算以下电流在自由空间的辐射场：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}} &= 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\,|_{S_{\mathrm{a}}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7-39}$$

(a) 等效一　(b) 等效二　(c) 等效三　(d) 等效四

图 7-16　PMC 面上孔缝的等效电磁流

7.4　Fresnel 衍射

7.4.1　Fresnel 衍射基本公式

如前所述，当无限大屏上孔缝尺寸大于波长时，可以采用 Kirchhoff 近似，即：① 孔缝以外屏面处的场为零；② 孔缝面上的场等于入射波. 对于如图 7-17 所示屏上孔缝衍射，由 Huygens 原理，衍射场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{S_{\mathrm{a}}} \left[\mathrm{i}\omega\mu\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') - \nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{7-40}$$

式中, S_{a} 为孔缝面, 自由空间张量 Green 函数如式 (6-27) 所示,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{7-41}$$

三维情形的标量 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi R}$$

二维情形设 $\partial/\partial y=0$, 又设缝所在位置为 $z'=0$. 二维标量 Green 函数为

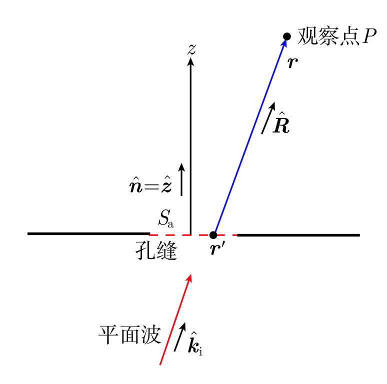


图 7-17 无限大平面上开孔衍射

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')&=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}\right)\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+z^2}\right)\end{aligned} \tag{7-42}$$

式中, $H_0^{(1)}(\cdot)$ 为第一类 Hankel 函数. 设 TE 波斜入射, 入射波为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}E_0\exp[\mathrm{i}k(x\sin\theta_{\mathrm{i}}+z\cos\theta_{\mathrm{i}})]\\&\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\frac{1}{\eta}(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_{\mathrm{i}}+\hat{z}\cos\theta_{\mathrm{i}})\times\hat{\boldsymbol{y}}E_0\exp[\mathrm{i}k(x\sin\theta_{\mathrm{i}}+z\cos\theta_{\mathrm{i}})]\end{aligned}\right\} \tag{7-43}$$

式中, θ_{i} 为入射角. 于是, 孔缝面上等效面电磁流近似为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}|_{z=0}&=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{1}{\eta}[(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_{\mathrm{i}}+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{\mathrm{i}})\times\hat{\boldsymbol{y}}E_0]\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}})\\&=-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta}\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}})\\\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}|_{z=0}&=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=-\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{y}}E_0\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}})=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}})\end{aligned}\right\} \tag{7-44}$$

对于二维缝的衍射, 如果屏的材料可近似看做 PMC, 根据式 (7-39), 只需考虑上述面电流加倍后的自由空间辐射, 这时式 (7-40) 化简为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int_{S_{\mathrm{a}}}\mathrm{i}\omega\mu\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}x' \tag{7-45}$$

根据式 (7-39) 和式 (7-44), 式 (7-45) 中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}}=2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{2E_0\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta}\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}})\\&\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}}=0\end{aligned}$$

上式代入式 (7-45) 中有

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} &= -\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'\right)\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\frac{2E_0}{\eta}\exp\left(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}}\right)\\
&= -\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\right)G\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'\right)\frac{2E_0}{\eta}\exp\left(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}}\right)\\
&= -\left(\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{1}{k^2}\nabla\frac{\partial}{\partial y}\right)G\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'\right)\frac{2E_0}{\eta}\exp\left(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}}\right)\\
&= -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{2E_0\exp\left(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}}\right)}{\eta}\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{\left(x-x'\right)^2+z^2}\right)
\end{aligned}
\tag{7-46}
$$

式 (7-46) 用到二维情形下 $\partial/\partial y=0$. 式 (7-46) 代入式 (7-45) 得

$$
\boldsymbol{E}\left(x,z\right)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k}{2}\int_{S_{\mathrm{a}}}E_0\exp\left(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}}\right)H_0^{(1)}\left(k\sqrt{\left(x-x'\right)^2+z^2}\right)\mathrm{d}x'
\tag{7-47}
$$

当观察点位于远区, 如图 7-18 所示, 式 (7-42) 中 Hankel 函数的宗量远大于 1, 即有

$$
\xi=k\sqrt{\left(x-x'\right)^2+z^2}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(x-x'\right)^2+z^2}\gg 1
\tag{7-48}
$$

称为远区近似条件. 当 $\xi\gg 1$ 时, Hankel 函数的渐近式为

$$
H_0^{(1)}\left(\xi\right)\simeq\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi\xi}}\exp\left(\mathrm{i}\xi\right)
\tag{7-49}
$$

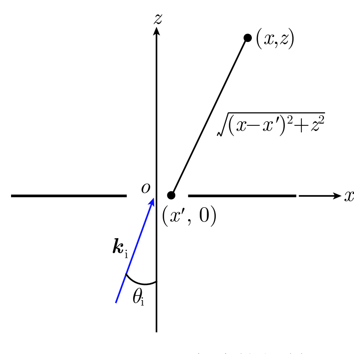


图 7-18　二维缝的衍射

设观察点在远区且靠近轴线, Hankel 函数的宗量可作 Taylar 级数展开,

$$
\begin{aligned}
& k\sqrt{\left(x-x'\right)^2+z^2}\\
&= kz\left[1+\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2\right]^{1/2}\\
&\simeq kz\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2-\frac{1}{8}\cancel{\left(\frac{x-x'}{z}\right)^4}\right]\\
&\simeq kz\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{7-50}
$$

当观察点靠近轴线, 由于 $x-x'\ll z$, 式 (7-50) 中可略去高阶项, 称为近轴近似. 于是, 式 (7-47) 中 Hankel 函数可近似为

$$
H_0^{(1)}\left(k\sqrt{\left(x-x'\right)^2+z^2}\right)\simeq\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi kz}}\exp\left(\mathrm{i}kz\right)\cdot\exp\left(\mathrm{i}k\frac{\left(x-x'\right)^2}{2z}\right)
\tag{7-51}
$$

式 (7-51) 代入式 (7-47) 得

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp(\mathrm{i}kz)\int_{S_\mathrm{a}}E_0\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_\mathrm{i})\exp\left[\mathrm{i}k\frac{(x-x')^2}{2z}\right]\mathrm{d}x' \tag{7-52}$$

以上为二维缝衍射的 Fresnel 公式.

7.4.2 半平面的 Fresnel 衍射

半平面衍射情形, 由于孔缝一侧趋于无限大, 孔缝面上有 $x'\to\infty$, 如图 7-19 所示, 衍射场计算需采用 Fresnel 近似. 设平面波为 TE 波, 垂直入射 $\theta_\mathrm{i}=0$, 由式 (7-52) 得

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\exp(\mathrm{i}kz)\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\int_0^\infty\exp\left[\mathrm{i}k\frac{(x-x')^2}{2z}\right]\mathrm{d}x' \tag{7-53}$$

记式 (7-53) 中

$$D(x)=\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\int_0^\infty\exp\left[\mathrm{i}k\frac{(x-x')^2}{2z}\right]\mathrm{d}x' \tag{7-54}$$

引入新变量 $t=\sqrt{\dfrac{k}{\pi z}}(x'-x)$, 则上式积分限 $x'=0$ 对应于 $t=-\sqrt{\dfrac{k}{\pi z}}x$; 而 $x'=\infty$ 对应于 $t=\infty$. 于是式 (7-54) 可改写为

$$\begin{aligned}D(x)&=\int_{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x}^\infty\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\\&\quad-\int_0^{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7-55}$$

图 7-19 半平面衍射, 平面波垂直入射

设观察点位于 z 等于常数的平面上, 由式 (7-53) 可见观察点处衍射场正比于 $D(x)$,

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0\exp(\mathrm{i}kz)}{\sqrt{2\mathrm{i}}}D(x) \tag{7-56}$$

式中, $D(x)$ 的计算涉及 Fresnel 积分和 Cornu 螺线. Fresnel 积分定义为

$$F(w)=\int_0^w\exp\left(\mathrm{i}\pi\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=C(w)+\mathrm{i}S(w) \tag{7-57}$$

式中, w 为实数变量. Fresnel 积分的实部和虚部分别为

$$\left.\begin{aligned} C(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\ S(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{7-58}$$

分别称为 Fresnsl 余弦积分和正弦积分. Fresnel 积分具有奇函数性质, 即

$$F(-w) = -F(w) \tag{7-59}$$

在 $w = 0$ 和 ∞ 时 Fresnel 积分值为

$$F(0) = 0, \quad F(\infty) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}) \tag{7-60}$$

Fresnel 积分值可以由数学表查到, 或参见 Balanis (1997: 897). 图 7-20 给出 Fresnel 余弦积分和正弦积分曲线. 注意 Fresnel 积分为复数函数, 在由 $F(w)$ 的实部和虚部构成的复数平面内, $F(w)$ 对应于由原点起算的矢量, 它的水平和垂直分量分别为 $S(w)$ 和 $C(w)$. 当参数 w 变化, Fresnel 积分 $F(w)$ 的矢量端点形成 Cornu 曲线, 如图 7-21 所示. Cornu 螺线分布在第一、三象限, 为反对称. 由式 (7-58) 可得余弦积分和正弦积分的导数：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}C(w)}{\mathrm{d}w} &= \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \\ \frac{\mathrm{d}S(w)}{\mathrm{d}w} &= \sin\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \end{aligned}$$

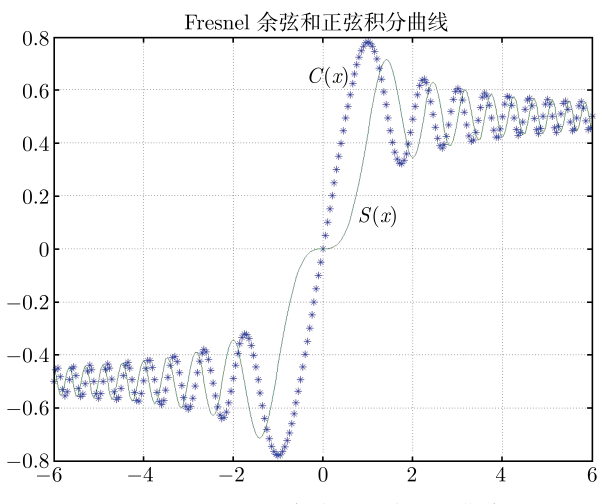


图 7-20　Fresnel 余弦和正弦积分曲线

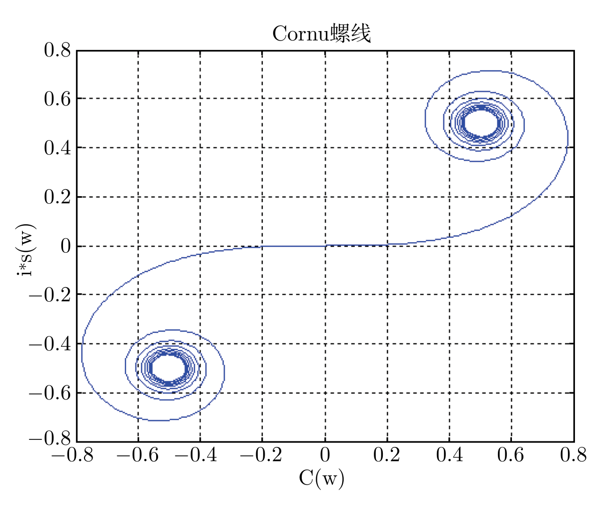


图 7-21 Cornu 螺线

所以

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}C)^2+(\mathrm{d}S)^2 &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}w}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}w}\right)^2\right](\mathrm{d}w)^2 \\
&= \left[\left(\cos\frac{\pi w^2}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi w^2}{2}\right)^2\right](\mathrm{d}w)^2=(\mathrm{d}w)^2
\end{aligned}
$$

由此可见, $\mathrm{d}w$ 代表 Cornu 螺线的小段弧长, 而 w 为从原点起算的曲线弧长.

定义 Fresnel 积分后式 (7-55) 可以写为

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \int_{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t-\int_0^{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= F(\infty)-F\left(-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x\right) \\
&= -F(-\infty)+F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x\right)
\end{aligned}
\tag{7-61}
$$

式 (7-61) 后一等式用到 Fresnel 积分的奇函数性质. 根据式 (7-60) 可得 $D(x)$ 具有以下特殊值:

$$
\begin{aligned}
&D(0)=-F(-\infty)+F(0)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) \\
&D(\infty)=-F(-\infty)+F(\infty)=1+\mathrm{i} \\
&D(-\infty)=-F(-\infty)+F(-\infty)=0
\end{aligned}
$$

注意式 (7-61) 中 $F(-\infty)$ 和 $F[\sqrt{k/(\pi z)}x]$ 代表复数平面的两个矢量, 所以 $D(x)$ 为 Cornu 螺线上连接从 $F(-\infty)=-(1+\mathrm{i})/2$ 到 $F[\sqrt{k/(\pi z)}x]$ 对应点的矢量. 模值 $|D(x)|$ 为 Cornu 螺线上 $F(-\infty)=-(1+\mathrm{i})/2$ 和 $F[\sqrt{k/(\pi z)}x]$ 对应点之间距离.

考虑如图 7-19 所示半平面衍射中 z 等于常数平面上场的分布. 根据式 (7-56), 衍射场 $|E(x)/E_0|=|D(x)|/\sqrt{2}$, 即正比于 Cornu 螺线上连接 $F(-\infty)=-(1+\mathrm{i})/2$ 和 $F[\sqrt{k/(\pi z)}x]$ 对应点的距离. 图 7-22 给出 z 等于常数平面上 $|E(x)/E_0|$ 随 x 的变化曲线. 当观察点为 $x=0$, 即阴影区和照明区的分界点, $|D(0)|=|F(\infty)-F(0)|=|(1+\mathrm{i})/2|=\sqrt{2}/2$, $|E(0)/E_0|=|D(0)|/\sqrt{2}=0.5$. 在 $x<0$ 阴影区的最左端 $x=-\infty$, $|D(-\infty)|=0$; 观察点由 $x=0$ 变化到 $x=-\infty$ 时, $|D(x)|$ 由 $|D(0)|=0.707$ 单调下降到 $|D(-\infty)|=0$. 在 $x>0$ 照明区的最右端 $x=\infty$, $|D(\infty)|=\sqrt{2}$; 观察点由 $x=0$ 改变到 $x=\infty$ 时, $|D(x)|$ 由 $|D(0)|$ 先逐渐上升随后振荡, 最后趋于 $|D(\infty)|=\sqrt{2}$, 即在 $x=\infty$ 处 $|E(\infty)/E_0|=|D(\infty)|/\sqrt{2}=1$.

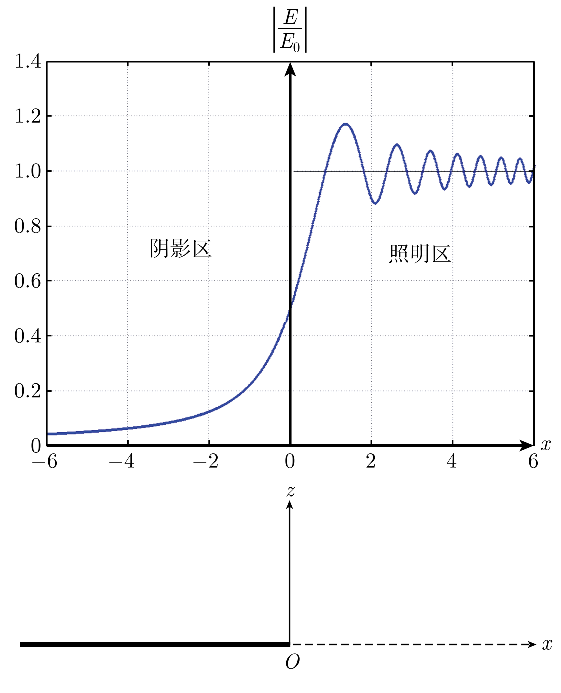


图 7-22　半平面的 Fresnel 衍射

7.4.3　有限宽缝的 Fresnel 衍射

设缝宽为 l, 平面波 (TE) 垂直入射, 如图 7-23 所示. 这时式 (7-53) 变为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\exp(\mathrm{i}kz)\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\int_{-l/2}^{l/2}\exp\left[\mathrm{i}k\frac{(x-x')^2}{2z}\right]\mathrm{d}x'$$

$$= \hat{\boldsymbol{y}} \frac{E_0}{\sqrt{2\mathrm{i}}} \exp(\mathrm{i}kz) D_1(x) \tag{7-62}$$

式中,

$$D_1(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \int_{-l/2}^{l/2} \exp\left[\mathrm{i}k\frac{(x-x')^2}{2z}\right] \mathrm{d}x' \tag{7-63}$$

如前所述, 对积分采用变量替换并应用式 (7-57) 定义的 Fresnel 积分后式 (7-63) 可以写为

$$\begin{aligned}
D_1(x) &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \int_{-l/2}^{l/2} \exp\left[\mathrm{i}k\frac{(x-x')^2}{2z}\right] \mathrm{d}x' \\
&= \int_{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x\right)}^{\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x\right)} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x\right)} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t - \int_0^{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x\right)} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= F\left[\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x\right)\right] - F\left[-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x\right)\right] \\
&= -F\left[-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x\right)\right] + F\left[\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x\right)\right]
\end{aligned}$$

式中的最后等式用到 Fresnel 积分的奇函数性质. 在 z 等于常数平面上场的分布正比于 $|D_1(x)|$. 显然, $|D_1(x)|$ 对于 x 为对称. 由上式可见, 在如图 7-21 所示 Cornu 螺线上, $|D_1(x)|$ 对应于 $F\left[-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x\right)\right]$ 和 $F\left[\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x\right)\right]$ 两点之间的距离. 在 $x=0$ 时 $|D_1(0)| = \left|2F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\frac{l}{2}\right)\right|$ 为最大, 当 $x>0$, 随着 x 增大, $|D_1(x)|$ 逐渐减小, 随后变为振荡, 直至 $x=\infty$ 时 $|D_1(\infty)| = |-F(\infty)+F(\infty)| = 0$.

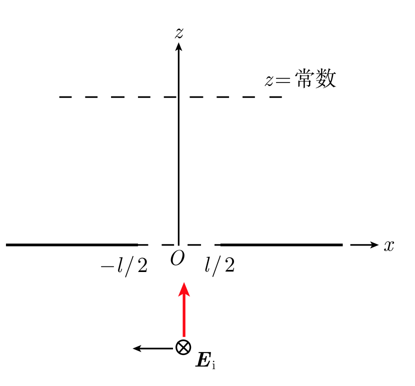


图 7-23 单缝 Fresnel 衍射, 平面波垂直入射

7.4.4 障碍物阴影区的衍射场

平面波传播过程中遇到障碍物, 由于衍射作用在其阴影区也有电磁场, 如图 7-24 所示. 半平面 Fresnel 衍射公式可以用来分析如图 7-24 所示障碍物阴影区的衍

射场. 以下分析参照 Kraus (1999). 设电场 $\boldsymbol{E}$ 平行于半平面边缘, 由式 (7-56) 可得衍射波的能流为

$$S_{\mathrm{av}} = \frac{E \cdot E^*}{2\eta} = \frac{|E_0|^2}{4\eta} D(x) D^*(x) = \frac{S_0}{2} D(x) D^*(x) \tag{7-64}$$

式中, S_0 为入射波平均能流, η 为波阻抗,

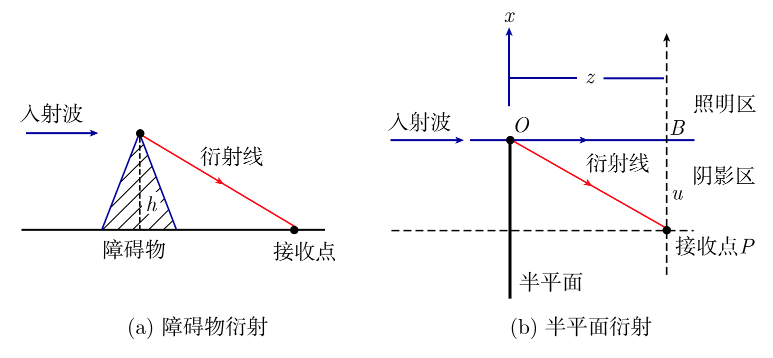
$$\begin{aligned} D(x) &= F(\infty) + F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x\right) \\ &= [C(\infty) + \mathrm{i}S(\infty)] + \left[C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x\right) + \mathrm{i}S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x\right)\right] \end{aligned}$$

式中, $C(\xi), S(\xi)$ 分别为 Fresnsl 余弦积分和正弦积分. 障碍物衍射中主要考虑 $x < 0$ 阴影区中的衍射场, 记 $u = -x$ 为阴影区中观察点到边缘的横向距离, 令 $\kappa = \sqrt{k/(\pi z)} = \sqrt{2/(z\lambda)}$. 其中, z 为观察点到半平面的纵向距离, 上式可改写为

$$\begin{aligned} D(x) &= [C(\infty) + \mathrm{i}S(\infty)] + [C(-\kappa u) + \mathrm{i}S(-\kappa u)] \\ &= [C(\infty) + \mathrm{i}S(\infty)] + [-C(\kappa u) - \mathrm{i}S(\kappa u)] \\ &= [C(\infty) - C(\kappa u)] + \mathrm{i}[S(\infty) - S(\kappa u)] \\ &= \left[\frac{1}{2} - C(\kappa u)\right] + \mathrm{i}\left[\frac{1}{2} - S(\kappa u)\right] \end{aligned}$$

代入式 (7-64), 得到阴影区内接收点处衍射波和入射波平均能流之比为

$$\begin{aligned} \frac{S_{\mathrm{av}}}{S_0} &= \frac{1}{2} D(x) D^*(x) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2} - C(\kappa u)\right] + \mathrm{i}\left[\frac{1}{2} - S(\kappa u)\right]\right\}\left\{\left[\frac{1}{2} - C(\kappa u)\right] - \mathrm{i}\left[\frac{1}{2} - S(\kappa u)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2} - C(\kappa u)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(\kappa u)\right]^2\right\} \end{aligned} \tag{7-65}$$



(a) 障碍物衍射　　(b) 半平面衍射

图 7-24　障碍物的衍射

考虑半平面衍射的一个应用例子. 如果山脊比较陡峭, 横向较宽, 无线电波的绕射 (衍射) 就可以用半平面 Fresnel 衍射分析. 设发射天线 T 和接收天线 P 之间有一山脊, 高度 $OQ=h$, 如图 7-25 所示. 山脊顶点 O 为虚拟半平面的边缘端点. 通过 P 点向 TO 作垂线并与其延长线相交于点 B, 图中 $BP=u$ 为接收点在阴影区的横向距离, $OB=z$ 为接收点的纵向距离. 由于直角三角形 OQT 和 PBT 为相似三角形, 于是可得

$$\frac{OQ}{TO}=\frac{PB}{TP},\quad \frac{h}{\sqrt{h^2+r_1^2}}=\frac{u}{r_1+r_2}$$

式中, $TQ=r_1$ 和 $PQ=r_2$ 分别为发射天线和接收天线到山脊下的距离. 另外又有

$$\frac{TQ}{TO}=\frac{TB}{TP},\quad \frac{r_1}{\sqrt{h^2+r_1^2}}=\frac{\sqrt{h^2+r_1^2}+z}{r_1+r_2}$$

由以上二式可得

$$u=\frac{h\left(r_1+r_2\right)}{\sqrt{h^2+r_1^2}},\quad z=\frac{r_1\left(r_1+r_2\right)}{\sqrt{h^2+r_1^2}}-\sqrt{h^2+r_1^2} \tag{7-66}$$

代入式 (7-65) 即可得到山脊遮挡的阴影区内接收点衍射波和入射波平均能流之比. 设 $r_1=5\text{km}$ 和 $r_2=5\text{km}$, $h=1\text{km}$, 由上式得 $u=1.96\text{km}$, $z=4.70\text{km}$. 若工作频率 $f=30\text{MHz}$, 则 $\lambda=10\text{m}$, 以及 $\kappa=\sqrt{2/(z\lambda)}=\sqrt{2/(4700\times 10)}=0.006523\text{m}^{-1}$, $\kappa u=0.006523\times 1960=12.786$. 查表得 Fresnal 余弦积分 $C(\kappa u)=C(12.786)=0.4978$, 正弦积分 $S(\kappa u)=S(12.786)=0.4808$. 将数据代入式 (7-65) 得山脊遮挡阴影区内接收点衍射波和入射波平均能流之比为

$$\begin{aligned}\frac{S_{\text{av}}}{S_0}&=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}-C(\kappa u)\right]^2+\left[\frac{1}{2}-S(\kappa u)\right]^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}-C(12.786)\right]^2+\left[\frac{1}{2}-S(12.786)\right]^2\right\}\\&=0.5\times\left[(0.5-0.4978)^2+(0.5-0.4808)^2\right]\\&=0.0001867\end{aligned}$$

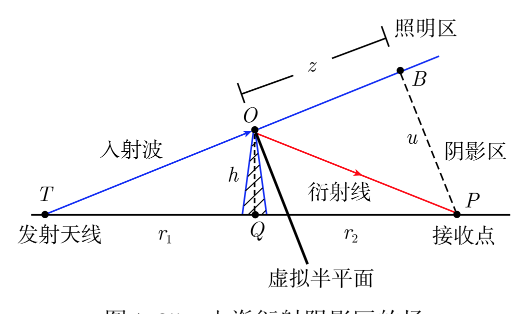


图 7-25　山脊衍射阴影区的场

或者其分贝数 $10\lg(S_{\text{av}}/S_0) = 10\lg(0.0001867) \simeq -37\text{dB}$. 由于山脊边缘平滑, 它的衍射作用比半平面锐利边缘要小, 所以实际山脊阴影区中衍射波的衰减比上述估算值通常还要小约 10~20dB.

7.5　Fraunhofer 衍射

7.5.1　缝的 Fraunhofer 衍射：二维情形

如果观察点到屏的距离足够远, Fresnel 近似式 (7-50) 还可作进一步近似,

$$
\begin{aligned}
k\sqrt{(x-x')^2+z^2} &\simeq kz\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2\right] \\
&= kz\left[1+\frac{x^2}{2z^2}-\frac{xx'}{z^2}+\cancel{\frac{x'^2}{2z^2}}\right] \\
&\simeq kz\left[1+\frac{x^2}{2z^2}-\frac{xx'}{z^2}\right]
\end{aligned}
\tag{7-67}
$$

式 (7-67) 的后一等式略去 $x'^2/(2z^2)$ 项. 将式 (7-67) 代入式 (7-52) 得到

$$
\boldsymbol{E}(x,z) = \hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\int_{S_{\mathrm{a}}} E_0\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}})\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{kx}{z}\right)x'\right]\mathrm{d}x' \tag{7-68}
$$

式中, $E_{\mathrm{i}}(x') = E_0\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}})$ 代表孔缝面上的入射波, θ_{i} 为入射角. 引入矩形窗函数, 仅在孔缝处等于 1, 其他为零, 即

$$
U\left(\frac{l}{2}-|x'|\right) = \begin{cases} 1, & |x'| \leqslant \dfrac{l}{2} \\ 0, & |x'| > \dfrac{l}{2} \end{cases} \tag{7-69}
$$

于是, 式 (7-68) 可以改写为

$$
\boldsymbol{E}(x,z) = \hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E_{\mathrm{i}}(x')\,U\left(\frac{l}{2}-|x'|\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{kx}{z}\right)x'\right]\mathrm{d}x' \tag{7-70}
$$

式中, 积分限改写为 $\pm\infty$, 以及 $E_{\mathrm{i}}(x') = E_0\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}})$. 式 (7-70) 表明, 远区场 $\boldsymbol{E}(x,z)$ 正比于孔缝场 $E_{\mathrm{i}}(x')$ 的 Fourier 变换. 以上为二维孔缝的 Fraunhofer 衍射公式.

设平面波垂直入射, $\theta_{\mathrm{i}} = 0$, 缝的宽度为 l, 如图 7-26 所示. 式 (7-68) 结果为

$$
\boldsymbol{E}(x,z) = \hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E_0 U\left(\frac{l}{2}-|x'|\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{kx}{z}\right)x'\right]\mathrm{d}x' \tag{7-71}
$$

式 (7-71) 中的积分是矩形窗函数的 Fourier 变换, 结果得

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}2lE_0\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\frac{\sin[klx/(2z)]}{klx/(2z)} \tag{7-72}$$

式中, 包含有 sinc 函数,

$$\operatorname{sinc}(\xi)=\frac{\sin(\xi)}{\xi}$$

其分布如图 7-27 所示. 式 (7-71) 中函数 $E_0U(0.5l-|x'|)$ 可以用一般孔缝场分布 $W(x')$ 代替. 式 (7-71) 表明, 在 z 为常数面上的衍射场正比于孔缝场 $W(x')$ 的 Fourier 变换. 而式 (7-71) 中的平方相位项 $\exp\left[\mathrm{i}kx^2/(2z)\right]$ 计入了弯曲相位波前的曲率.

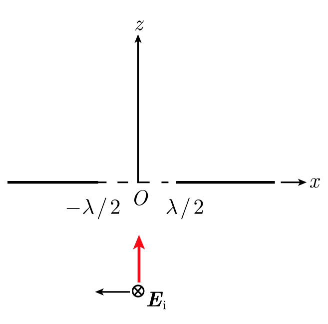


图 7-26 单缝 Fraunhofer 衍射, 平面波垂直入射

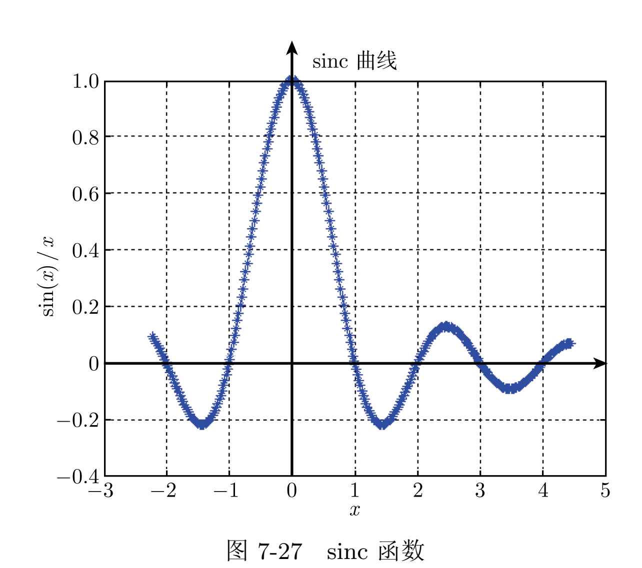


图 7-27 sinc 函数

根据观察点到缝的距离, 衍射场可以划分为近区, Fresnel 区和 Fraunhofer 区, 如图 7-28 所示. 注意式 (7-67) 是指数函数的因子, 略去 $x'^2/\left(2z^2\right)$ 项意味要求 $\exp\left[\mathrm{i}kzx'^2/\left(2z^2\right)\right]\approx 1$, 这就要求满足 $kx'^2/(2z)<1/8$, 1/8 弧度 =7.16°. 由于 $(x')_{\max}=l/2$, 代入得

$$\frac{k(l/2)^2}{2z}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(l/2)^2}{2z}<\frac{1}{8},\quad z_{\text{Fraunhofer}}>2\pi\frac{l^2}{\lambda} \tag{7-73}$$

这一距离可作为 Fresnel 区和 Fraunhofer 区分界的估计.

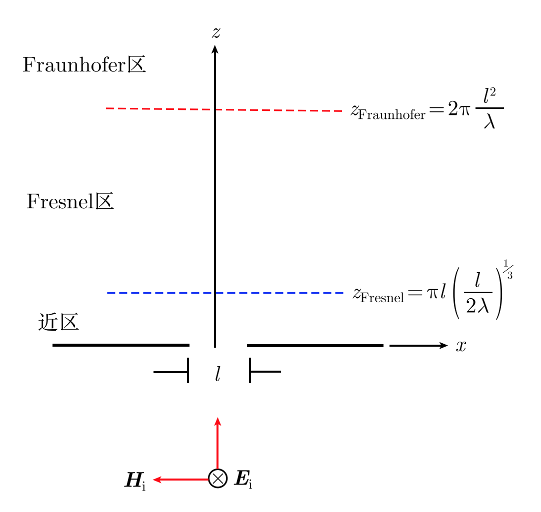


图 7-28　单缝衍射的近区 Fresnel 区和 Fraunhofer 区

在作 Fresnel 近似时, 式 (7-50) 中略去因子 $(x - x'/z)^4/8$. 注意式 (7-50) 是指数函数的因子, 略去 $(x - x'/z)^4/8$ 一项意味要求 $\exp[\mathrm{i}kz(x - x'/z)^4/8] \approx 1$, 这就要求满足 $kz(x - x'/z)^4/8 < 1/8$. 由于 $(x')_{\max} = l/2$, 对于 $x = 0$ (垂线上) 的观察点有

$$\frac{k\,(l/2)^4}{8z^3} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{(l/2)^4}{8z^3} < \frac{1}{8}, \quad z_{\text{Fresnel}} > \pi l \left(\frac{l}{2\lambda}\right)^{1/3} \tag{7-74}$$

这一距离可作为近区和 Fresnel 区分界的估计. 以单缝衍射为例, 近区、Fresnel 区和 Fraunhofer 区范围的大致划分如图 7-28 所示. 如果波长 $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$, 不同缝宽所对应的区域界限如表 7-1 所示.

表 7-1　Fresnel 区和 Fraunhofer 区的划分

缝宽 (l)	10^{-4}m	10^{-3}m	10^{-2}m
Fraunhofer 区界限	9.93×10^{-2}m	9.93m	993m
Fresnel 区界限	1.35×10^{-3}m	0.029m	0.63m

7.5.2　口径场分布及其 Fourier 变换

如式 (7-70) 所示, 远区场正比于孔缝口径场分布的 Fourier 变换. Fourier 变换定义为

$$\left.\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(x')\exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x' \\ W(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\exp(\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \tag{7-75}$$

Fraunhofer 衍射场 (7-72) 可以重写为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}E_0\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)[2\pi w(\xi)]_{\xi=kx/z} \tag{7-76}$$

式中, $w(\xi)$ 是口径场分布 $W(x')$ 的 Fourier 变换. 将如式 (7-69) 所示矩形函数形式场分布重写为

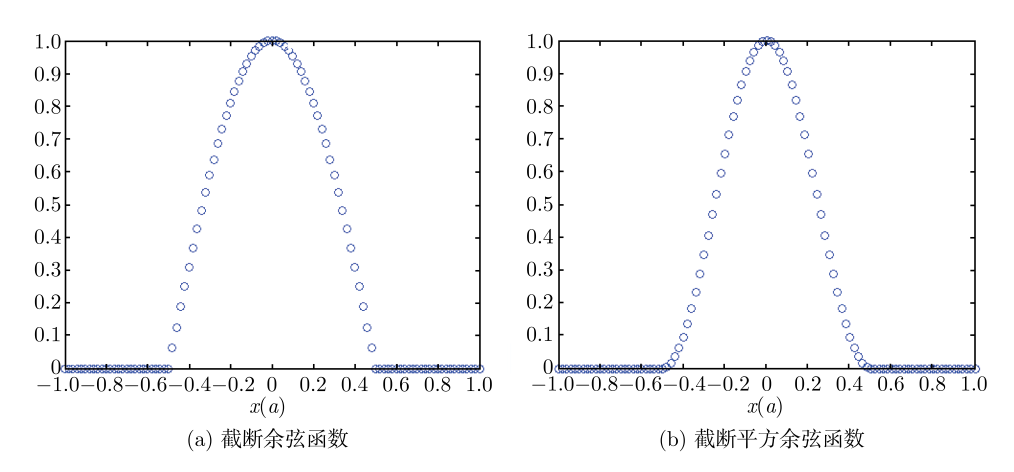
$$W_1(x')=\begin{cases}1, & |x'|\leqslant a/2\\ 0, & |x'|>a/2\end{cases} \tag{7-77}$$

式中, a 表示缝宽. 式 (7-77) 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}w_1(\xi)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(x')\exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-\mathrm{i}\xi}\exp(-\mathrm{i}\xi x')\right]_{x'=-a/2}^{x'=a/2}\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}a\xi/2)-\exp(\mathrm{i}a\xi/2)}{-\mathrm{i}\xi}\right]\\&=\frac{\sin(a\xi/2)}{\pi\xi}=\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{\sin(a\xi/2)}{a\xi/2}\end{aligned} \tag{7-78}$$

式 (7-78) 代入式 (7-76), 并令 $\xi=kx/z, a=2l$, 就得到式 (7-72).

下面考虑缝边缘呈现下降形式的场分布 (Millington et al., 1981: 18). 首先考虑截断余弦函数形式的场分布, 如图 7-29(a) 所示.



(a) 截断余弦函数　　(b) 截断平方余弦函数

图 7-29　边缘下降的场分布函数

$$W_2(x') = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x'}{a}\right), & |x'| \leqslant \dfrac{a}{2} \\ 0, & |x'| > \dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{7-79}$$

式中, a 表示缝宽. 它的 Fourier 变换为

$$w_2(\xi) = a\frac{\cos(a\xi/2)}{\pi^2 - (a\xi)^2} = a\frac{\cos(a\xi/2)}{\pi^2 - 4(a\xi/2)^2} \tag{7-80}$$

式 (7-80) 推导如下：将式 (7-79) 代入式 (7-75) 第一式. 其中, 积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) \exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2} \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi x'}{a}\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi x'}{a}\right)\right] \exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi - \frac{\pi}{a}\right)x'\right]\mathrm{d}x' + \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi + \frac{\pi}{a}\right)x'\right]\mathrm{d}x'\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi - \frac{\pi}{a}\right)x'\right]}{-\mathrm{i}\left(\xi - \frac{\pi}{a}\right)} + \frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi + \frac{\pi}{a}\right)x'\right]}{-\mathrm{i}\left(\xi + \frac{\pi}{a}\right)}\right\}_{x'=-a/2}^{x'=a/2} \\ &= \frac{\sin\left[\left(\xi + \frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left(\xi + \frac{\pi}{a}\right)} + \frac{\sin\left[\left(\xi - \frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left(\xi - \frac{\pi}{a}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{a\xi}{2}\right)}{\left(\xi + \frac{\pi}{a}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{a\xi}{2}\right)}{\left(\xi - \frac{\pi}{a}\right)} \\ &= \cos\left(\frac{a\xi}{2}\right)\frac{\dfrac{-2\pi}{a}}{\xi^2 - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2} = \cos\left(\frac{a\xi}{2}\right)\frac{2\pi a}{\pi^2 - (a\xi)^2} \end{aligned}$$

以上结果代入式 (7-75) 第一式即为式 (7-80). 证毕.

另一种边缘下降的场分布为截断平方余弦函数, 如图 7-29(b) 所示,

$$W_3(x') = \begin{cases} \cos^2\left(\dfrac{\pi x'}{a}\right), & |x'| \leqslant \dfrac{a}{2} \\ 0, & |x'| > \dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{7-81}$$

式中, a 表示缝宽. 它的 Fourier 变换为

$$w_3(\xi) = \frac{a}{4}\cdot\frac{\sin(a\xi/2)}{a\xi/2}\cdot\frac{\pi}{\pi^2 - (a\xi/2)^2} \tag{7-82}$$

式 (7-82) 推导如下：将式 (7-81) 代入式 (7-75) 第一式, 其中积分为

$$
\begin{aligned}
I =& \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\left(\frac{\pi x'}{a}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\xi x'\right) \mathrm{d}x' \\
=& \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[1+\cos\left(\frac{2\pi x'}{a}\right)\right] \exp\left(-\mathrm{i}\xi x'\right) \mathrm{d}x' \\
=& \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\mathrm{i}\xi x'\right) \mathrm{d}x' + \frac{1}{4} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi x'}{a}\right)\right. \\
& \left. + \exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi x'}{a}\right)\right] \exp\left(-\mathrm{i}\xi x'\right) \mathrm{d}x' \\
=& \frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{\xi} + \frac{1}{4}\left\{\int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi-\frac{2\pi}{a}\right)x'\right]\mathrm{d}x'\right. \\
& \left. + \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi+\frac{2\pi}{a}\right)x'\right]\mathrm{d}x'\right\} \\
=& \frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{\xi} + \frac{1}{4}\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi-\dfrac{2\pi}{a}\right)x'\right]}{-\mathrm{i}\left(\xi-\dfrac{2\pi}{a}\right)} + \frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\xi+\dfrac{2\pi}{a}\right)x'\right]}{-\mathrm{i}\left(\xi+\dfrac{2\pi}{a}\right)}\right\}_{x'=-a/2}^{x'=a/2} \\
=& \frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{\xi} + \frac{\sin\left[\left(\xi+\dfrac{2\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{2\left(\xi+\dfrac{2\pi}{a}\right)} + \frac{\sin\left[\left(\xi-\dfrac{2\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{2\left(\xi-\dfrac{2\pi}{a}\right)} \\
=& \frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{\xi} - \frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{2\left(\xi+\dfrac{2\pi}{a}\right)} - \frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{2\left(\xi-\dfrac{2\pi}{a}\right)} \\
=& \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)\left[\frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{\xi^2-\left(\dfrac{2\pi}{a}\right)^2}\right] \\
=& \frac{a}{2}\frac{\sin\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)}{\dfrac{a\xi}{2}} \cdot \frac{\left(\dfrac{2\pi}{a}\right)^2}{\left(\dfrac{2\pi}{a}\right)^2-\xi^2} \\
=& \frac{a}{2}\frac{\sin\left(a\xi/2\right)}{a\xi/2} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2-\left(a\xi/2\right)^2}
\end{aligned}
$$

以上结果代入式 (7-75) 第一式即式 (7-82). 证毕.

上述三种口径场分布函数式 (7-77)~ 式 (7-82) 的 Fourier 变换如图 7-30 所示. 其中, ① 为矩形函数, ② 为截断余弦函数, ③ 为截断平方余弦函数的 Fourier 变换. 为了便于比较, 纵坐标用最大值归一. 由图可见, 口径边缘具有下降形式的场分布函数使得衍射的第一旁瓣电平相对减小, 但主瓣宽度变大.

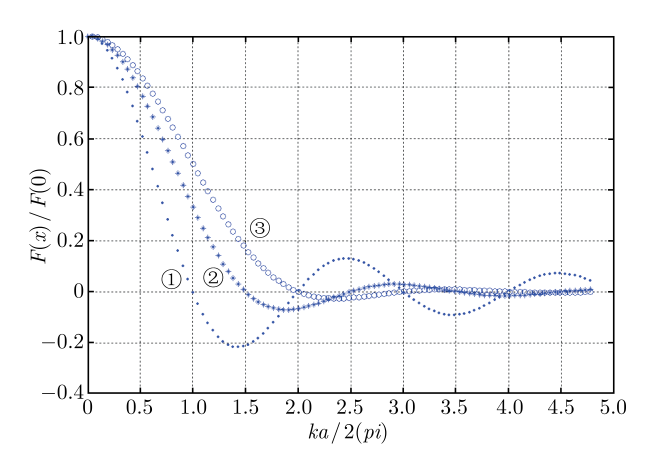


图 7-30　三种场分布函数的 Fourier 变换

最后, 考虑 Gauss 函数形式的场分布, 即

$$W_4(x') = \exp\left(-\beta x'^2\right) \tag{7-83}$$

式中, β 为常数. 它的 Fourier 变换为

$$w_4(\xi) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right) \tag{7-84}$$

可见, Gauss 函数的 Fourier 变换仍具有 Gauss 函数形式.

式 (7-84) 计算如下：式 (7-83) 代入 Fourier 变换定义 (7-75) 得

$$\begin{aligned}
w_4(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\beta x'^2\right)\exp\left(-\mathrm{i}\xi x'\right)\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\beta x'^2 - \mathrm{i}\xi x' + \frac{\xi^2}{4\beta}\right)\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\beta\left[x'^2 - \frac{\mathrm{i}\xi x'}{\beta} + \left(\frac{\mathrm{i}\xi}{2\beta}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\beta\left(x' - \frac{\mathrm{i}\xi}{2\beta}\right)^2\right]\mathrm{d}x'
\end{aligned} \tag{7-85}$$

作变量替换, 令

$$y=\sqrt{\beta}\left(x'-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\beta}\right) \tag{7-86}$$

式 (7-85) 变为

$$w_4(\xi)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y \tag{7-87}$$

数学上已知无穷限广义积分,

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}$$

以上代入式 (7-87) 得

$$w_4(\xi)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right) \tag{7-88}$$

式 (7-88) 即为式 (7-84). 证毕.

如式 (7-83) 所示 Gauss 函数理论上将延伸到无限远. 下面考虑 Gauss 函数在缝的两侧被截断的情形, 即设

$$W_5(x')=\begin{cases}\exp\left(-\beta x'^2\right), & |x'|\leqslant\dfrac{a}{2}\\ 0, & |x'|>\dfrac{a}{2}\end{cases} \tag{7-89}$$

它的 Fourier 变换为

$$w_5(\xi)=\frac{1}{4\sqrt{\pi\beta}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)-\operatorname{erf}\left(-\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)\right] \tag{7-90}$$

式中用到数学特殊函数中的误差函数 (又称为概率积分), 定义为

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u \tag{7-91}$$

式 (7-90) 的计算过程如下. 将式 (7-89) 代入式 (7-75) 得

$$\begin{aligned}w_5(\xi)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(-\beta x'^2\right)\exp\left(-\mathrm{i}\xi x'\right)\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(-\beta x'^2-\mathrm{i}\xi x'+\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left\{-\beta\left[x'^2-\frac{\mathrm{i}\xi x'}{\beta}+\left(\frac{\mathrm{i}\xi}{2\beta}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left[-\beta\left(x'-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\beta}\right)^2\right]\mathrm{d}x'\end{aligned} \tag{7-92}$$

式 (7-92) 积分变量改用式 (7-86), 当 $x' = \pm a/2$ 时, $y = \sqrt{\beta}\left(\pm\dfrac{a}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\xi}{2\beta}\right) = \pm\dfrac{a\sqrt{\beta}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}$, 代入式 (7-92) 得

$$
\begin{aligned}
w_5(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\left[\int_0^{\left(\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y - \int_0^{\left(-\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)-\mathrm{erf}\left(-\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\phi}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi\beta}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\beta}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)-\mathrm{erf}\left(-\frac{a\sqrt{\beta}}{2}-\frac{\mathrm{i}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

上式即为式 (7-90). 证毕.

如果选择在截断点 $|x'| = a/2$ 处 Gauss 函数等于最大值的 10%, 即令式 (7-89) 所示 $W_5(a/2) = \exp[-\beta(a/2)^2] = 0.1$, 则式 (7-89) 中 $\beta = -\left(4/a^2\right)\ln 0.1 = 9.21/a^2$. 相应 Gauss 函数与截断 Gauss 函数及其 Fourier 变换如图 7-31 所示. 式 (7-90) 计算中用到复宗量误差函数, 所得曲线见 Millington 等 (1981: 27). 为了便于比较, 图中纵坐标用最大值归一. 由图可见, Gauss 函数的 Fourier 变换没有旁瓣; 而截断 Gauss 函数的 Fourier 变换主瓣稍有变化, 并出现旁瓣.

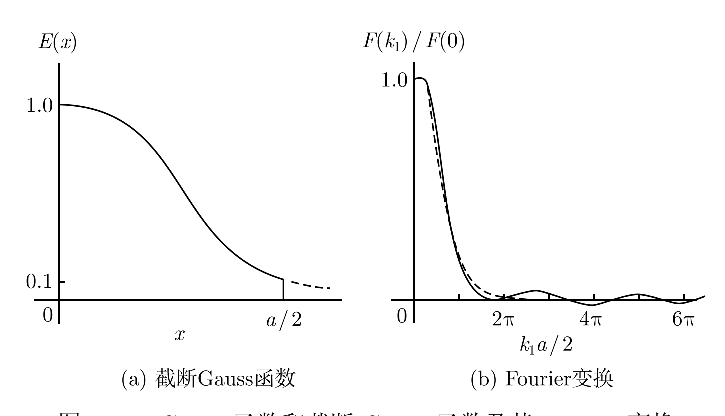


图 7-31　Gauss 函数和截断 Gauss 函数及其 Fourier 变换

7.5.3　斜入射和垂直入射衍射场之间关系

考虑平面波斜入射时的衍射. 比较式 (7-68) 和式 (7-71) 可见, 在平面波斜入射时积分号下将出现附加的相移因子 $\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_\mathrm{i})$. 设口径场分布 $E_\mathrm{i}(x')$ (Millington et al., 1981: 26) 为

$$W_6(x') = W_\perp(x')\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_\mathrm{i}) \tag{7-93}$$

式中, $W_\perp(x')$ 代表平面波垂直入射时的口径场, θ_i 为入射角. 可见斜入射时口径场

分布和垂直入射时相比具有附加相移因子. 由于衍射场是口径场分布的 Fourier 变换, 按照 Fourier 变换定义 (7-75) 得到

$$\begin{aligned} w_6(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_6(x')\exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_\perp(x')\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_\mathrm{i})\exp(-\mathrm{i}\xi x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_\perp(x')\exp[-\mathrm{i}(\xi - k\sin\theta_\mathrm{i})x']\,\mathrm{d}x' \\ &= w_\perp(\xi - k\sin\theta_\mathrm{i}) \end{aligned} \tag{7-94}$$

式中, $w_\perp(\xi)$ 是 $W_\perp(x')$ 的 Fourier 变换. 式 (7-94) 表明, 斜入射时的衍射场就是垂直入射时衍射图形的平移.

作为例子, 设垂直入射时口径场分布为如式 (7-77) 所示矩形函数 $W_1(x')$, 它的 Fourier 变换 $w_1(\xi)$ 为式 (7-78). 当平面波斜入射, 根据式 (7-94) 可得

$$\begin{aligned} w_6(\xi) &= w_1(u)\big|_{u=\xi-k\sin\theta_\mathrm{i}} \\ &= \left[\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{\sin(au/2)}{au/2}\right]_{u=\xi-k\sin\theta_\mathrm{i}} \\ &= \frac{a}{2\pi}\cdot\frac{\sin[(a/2)(\xi-k\sin\theta_\mathrm{i})]}{(a/2)(\xi-k\sin\theta_\mathrm{i})} \end{aligned} \tag{7-95}$$

式 (7-95) 代入式 (7-76) 得到平面波斜入射时缝的 Fraunhofer 衍射场为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x,z) &= \hat{\boldsymbol{y}}E_0\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)[2\pi w_6(\xi)]_{\xi=kx/z} \\ &= \hat{\boldsymbol{y}}E_0\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\left[a\frac{\sin[(a/2)(\xi-k\sin\theta_\mathrm{i})]}{(a/2)(\xi-k\sin\theta_\mathrm{i})}\right]_{\xi=kx/z} \\ &= \hat{\boldsymbol{y}}E_0 a\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\frac{\sin\{(a/2)[(kx/z)-k\sin\theta_\mathrm{i}]\}}{(a/2)[(kx/z)-k\sin\theta_\mathrm{i}]} \end{aligned} \tag{7-96}$$

如果观察距离 z 足够远, 观察点横向距离 x 偏离法向不大 (近轴近似), 式 (7-96) 中 $x/z=\tan\theta_\mathrm{s}\approx\sin\theta_\mathrm{s}$, 式中, θ_s 代表衍射方向角, 则式 (7-96) 可改写为

$$\boldsymbol{E}(x,z)\simeq\hat{\boldsymbol{y}}E_0 a\sqrt{\frac{k}{2\mathrm{i}\pi z}}\exp\left(\mathrm{i}kz+\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\frac{\sin[(ka/2)(\sin\theta_\mathrm{s}-\sin\theta_\mathrm{i})]}{(ka/2)(\sin\theta_\mathrm{s}-\sin\theta_\mathrm{i})} \tag{7-97}$$

式 (7-97) 为平面波斜入射时单缝 Fraunhofer 衍射的近轴近似结果.

7.5.4 孔的 Fraunhofer 衍射公式：三维情形

考虑屏上孔缝 Fraunhofer 衍射的三维情形, 如图 7-32 所示. 当观察点距离孔很远, 衍射场等价于具有一定面电磁流分布的面天线的辐射场. 应用 Huygens 原

理 (7-14), 三维张量 Green 函数为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\tag{7-98}$$

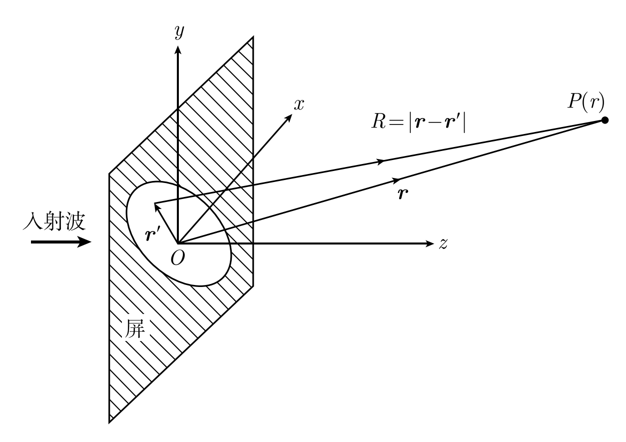


图 7-32　屏上孔的衍射

对于远区, 有式 (6-57) 所示近似,

$$\left.\begin{aligned}&|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\simeq r-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'+\frac{r'^2}{2r}\simeq r-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'\\&\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\simeq\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right),\quad \boldsymbol{k}=k\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}\right\}\tag{7-99}$$

这时式 (7-98) 中的梯度算子和张量 Green 函数可写为

$$\begin{aligned}&\nabla\rightarrow\mathrm{i}\boldsymbol{k}=\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\\&\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{r}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\end{aligned}$$

上式代入 Huygens 原理公式 (7-14) 式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\approx&\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_\mathrm{a}}\Big[\mathrm{i}\omega\mu\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{r}\right)\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\\&\times\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{r}\right)\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\Big]\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\\=&\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_\mathrm{a}}\left[\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')-\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\right]\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{7-100}$$

式 (7-100) 中的后一等式用到矢量运算式,

$$\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{r}\right)\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')=\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{s}-\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\left[\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\right]=\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$$

同样, 由式 (7-15) 得到磁场为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\approx\frac{\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\iint\limits_{S_\mathrm{a}}\left[\hat{\boldsymbol{r}}\times J_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')+\frac{1}{\eta}(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\right]\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S \tag{7-101}$$

式 (7-101)、式 (7-100) 二者为对偶, 其替换为 $\boldsymbol{E}\rightarrow\eta\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}\rightarrow-\boldsymbol{E}/\eta$, $\boldsymbol{J}_\mathrm{s}\rightarrow\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$, $\boldsymbol{M}_\mathrm{s}\rightarrow-\eta\boldsymbol{J}_\mathrm{s}$. 式 (7-100)、式 (7-101) 为三维情形远区衍射场 Fraunhofer 公式. 实际上, 衍射场公式和辐射场相同, 只是辐射源为等效面电磁流.

下面讨论远区条件和孔缝尺寸的关系. 注意式 (7-99) 第一式是指数函数的因子, 略去 $r'^2/(2r)$ 一项意味要求 $\exp\left[\mathrm{i}kr'^2/(2r)\right]\approx 1$. 这就要求满足 $kr'^2/(2r)<1/8$(1/8 弧度 $=7.16°$). 由于 $(r')_{\max}=D/2$, D 为孔缝的最大尺寸, 即有

$$k\frac{(D/2)^2}{2r}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{D^2}{8r}<\frac{1}{8},\quad r>2\pi\frac{D^2}{\lambda} \tag{7-102}$$

式 (7-102) 和式 (6-56) 一致, 称为衍射场远区 Fraunhofer 近似条件.

设观察点在 z 轴附近 (近轴近似), 对于观察方向 $\hat{\boldsymbol{k}}=k\hat{\boldsymbol{r}}$, 近似有

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\approx 0\\ \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\approx 0\end{aligned}\right\} \tag{7-103}$$

式 (7-103) 代入式 (7-100) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\approx&\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[\mathrm{i}\omega\mu\iint\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\right.\\&\left.\times\iint\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\right]\end{aligned} \tag{7-104}$$

式 (7-104) 为远区衍射场近轴情形 Fraunhofer 公式.

7.5.5 矩形孔衍射

作为 Fraunhofer 衍射的第一个例子, 设平面波垂直入射到矩形孔, 如图 7-33 所示, 入射波为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\mathrm{i}&=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp(\mathrm{i}kz)\\ \boldsymbol{H}_\mathrm{i}&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta}\exp(\mathrm{i}kz)\end{aligned}\right\} \tag{7-105}$$

在 Kirchhoff 近似下孔缝面的等效面电磁流为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')&=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i}|_{z=0}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta}=-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{E_0}{\eta}\\ \boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')&=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_\mathrm{i}|_{z=0}=-\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}E_0=-\hat{\boldsymbol{y}}E_0\end{aligned}\right\}$$

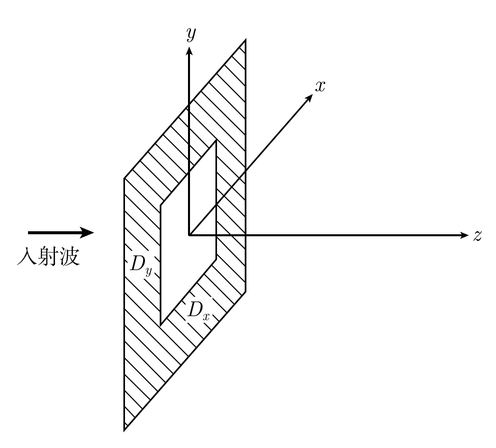


图 7-33　矩形孔的衍射

近轴条件下衍射场计算公式为式 (7-104), 上式代入后得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx & \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[\mathrm{i}\omega\mu\iint \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S' - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\iint \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\right] \\
= & \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(-\mathrm{i}\omega\mu\hat{\boldsymbol{x}}\frac{E_0}{\eta} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{y}}E_0\right) \\
& \times \int_{-Dx/2}^{Dx/2}\int_{-Dy/2}^{Dy/2}\exp\left[-\mathrm{i}k\left(x'\sin\theta\cos\varphi + y'\sin\theta\sin\varphi\right)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\
= & \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}E_0 + \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{y}}E_0\right)I_{\text{aperture}} \\
= & -\mathrm{i}kE_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{y}}\right)I_{\text{aperture}}
\end{aligned}
$$

式中, 孔面积分为

$$
\begin{aligned}
I_{\text{aperture}} &= \int_{-D_{x/2}}^{D_{x/2}}\int_{-D_{y/2}}^{D_{y/2}}\exp\left[-\mathrm{i}k\left(x'\sin\theta\cos\varphi + y'\sin\theta\sin\varphi\right)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\
&= \int_{-D_{x/2}}^{D_{x/2}}\exp\left(-\mathrm{i}kx'\sin\theta\cos\varphi\right)\mathrm{d}x'\int_{-D_{y/2}}^{D_{y/2}}\exp\left(-\mathrm{i}ky'\sin\theta\sin\varphi\right)\mathrm{d}y' \\
&= D_xD_y\frac{\sin\left[\dfrac{kD_x}{2}\sin\theta\cos\varphi\right]}{\dfrac{kD_x}{2}\sin\theta\cos\varphi}\cdot\frac{\sin\left[\dfrac{kD_y}{2}\sin\theta\sin\varphi\right]}{\dfrac{kD_y}{2}\sin\theta\sin\varphi} \\
&= D_xD_y\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}
\end{aligned}
$$

式中,

$$
X \equiv \frac{kD_x}{2}\sin\theta\cos\varphi, \quad Y \equiv \frac{kD_y}{2}\sin\theta\sin\varphi
$$

将积分结果代入后得到衍射场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{i}kE_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{y}})\,I_{\text{aperture}} \\ &= \frac{C}{2}(\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{y}})\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned} \tag{7-106}$$

式中,

$$C\equiv -\mathrm{i}\frac{D_xD_ykE_0\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}$$

根据直角坐标和球坐标系单位矢量的转换公式,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}} &= \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi \\ \hat{\boldsymbol{y}} &= \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi \\ \hat{\boldsymbol{z}} &= \hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\end{aligned}$$

代入式 (7-106) 得远区场的 E_θ, E_φ 分量为

$$\left.\begin{aligned}E_\theta &= \frac{C}{2}\cos\varphi(1-\cos\theta)\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y} \\ E_\varphi &= -\frac{C}{2}\sin\varphi(1-\cos\theta)\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned}\right\} \tag{7-107}$$

式中, 函数 $\operatorname{sinc}(\xi)=(\sin\xi)/\xi$, 如图 7-27 所示.

对于 PEC 屏上的矩形孔, 参照式 (7-38) 和图 7-15, 孔缝面的等效面电磁流为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')=0 \\ &\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')=-2\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\big|_{z=0}=-2\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}E_0=-\hat{\boldsymbol{y}}2E_0\end{aligned}$$

于是, 代入衍射场公式 (7-104) 计算后得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{i}kE_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}(0\cdot\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{r}}\times 2\hat{\boldsymbol{y}})\,I_{\text{aperture}} \\ &= \frac{C}{2}(\hat{\boldsymbol{r}}\times 2\hat{\boldsymbol{y}})\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned} \tag{7-108}$$

远区场的 E_θ, E_φ 分量为

$$\left.\begin{aligned}E_\theta &= C\cos\varphi\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y} \\ E_\varphi &= -C\cos\theta\sin\varphi\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned}\right\} \tag{7-109}$$

由式 (7-107)、式 (7-109) 可见, 矩形孔的衍射场分布具有 $\operatorname{sinc}(\xi)=(\sin\xi)/\xi$ 函数特性. 设 PEC 屏上矩形开口为 $(3\lambda\times 2\lambda)$, 其远区衍射场方向图如图 7-34 所示.

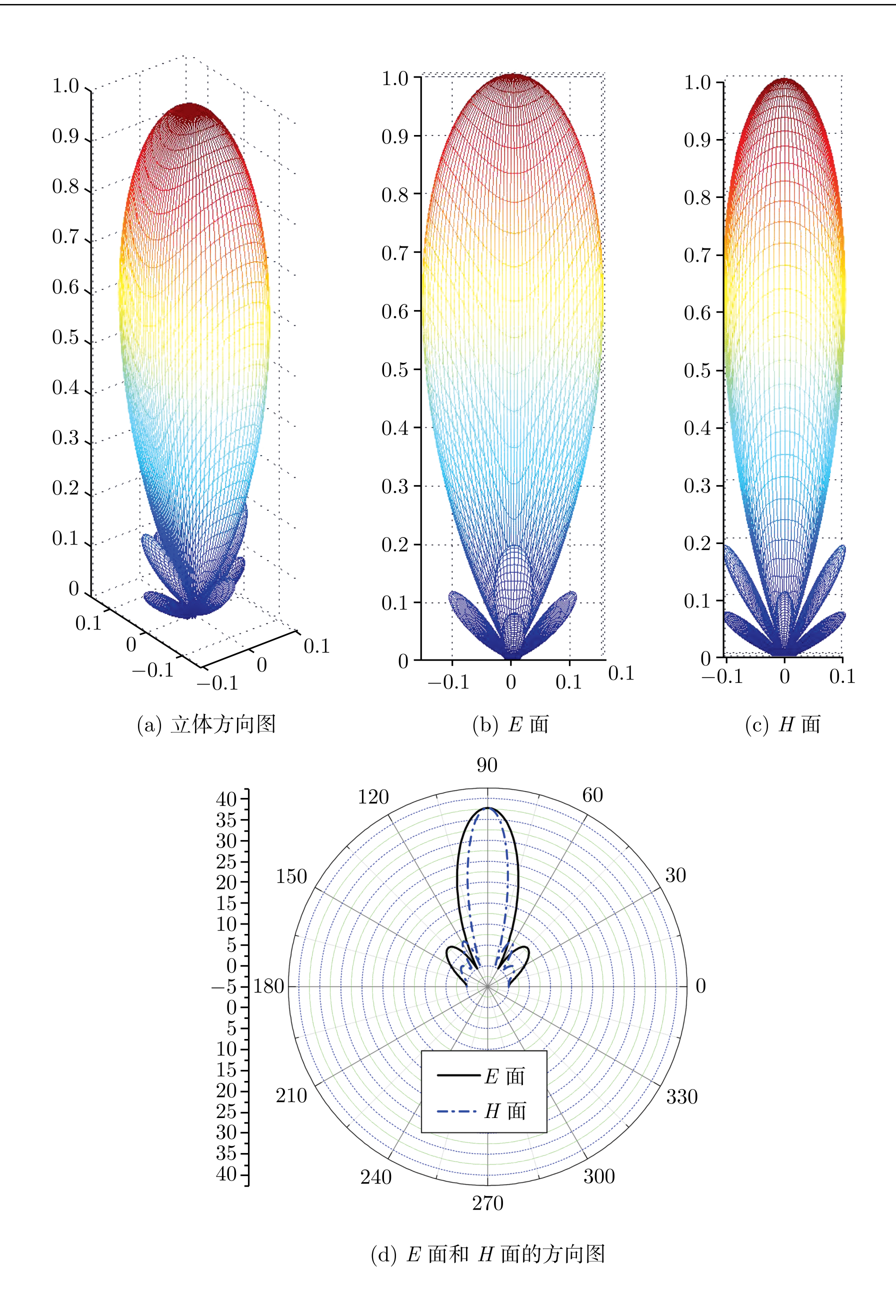


图 7-34　PEC 屏上 3λ×2λ 矩形孔衍射方向图

对于 PMC 屏的矩形孔, 参照式 (7-39) 和图 7-16, 孔缝等效面电磁流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') = 2\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\big|_{z=0} = 2\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta} = 2\hat{\boldsymbol{x}}\frac{E_0}{\eta}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right)=0$$

代入衍射场公式 (7-104), 计算后得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=-\mathrm{i}kE_0\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\left(2\hat{\boldsymbol{x}}-0\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{y}}\right)I_{\mathrm{aperture}}\\&=C\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned}\tag{7-110}$$

远区场为

$$\left.\begin{aligned}E_\theta&=C\cos\theta\cos\varphi\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\\E_\varphi&=-C\sin\varphi\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned}\right\}\tag{7-111}$$

和式 (7-107)、式 (7-109) 有类似形式.

7.5.6 圆孔衍射

作为 Fraunhofer 衍射的另一个例子, 讨论半径为 a 的圆孔衍射, 如图 7-35 所示. 设平面波垂直入射,

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp\left(\mathrm{i}kz\right)$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta}\exp\left(\mathrm{i}kz\right)$$

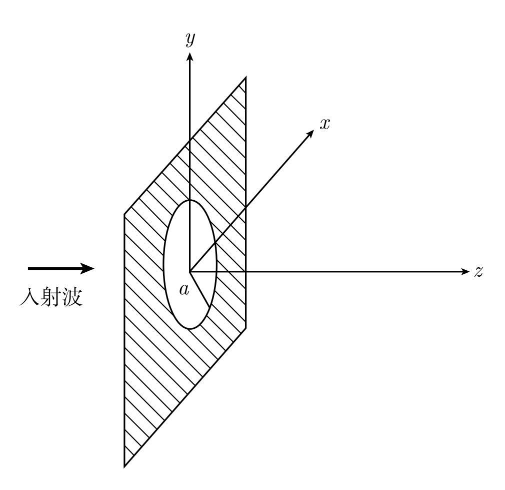


图 7-35 圆孔衍射

对于 PEC 屏上的矩形孔, 参照式 (7-38) 和图 7-15, 孔缝面的等效面电磁流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right)=0$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right)=-2\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\big|_{z=0}=-2\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}E_0=-\hat{\boldsymbol{y}}2E_0$$

近轴近似下衍射场为式 (7-104), 上式代入得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx & \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left\{\mathrm{i}\omega\mu\iint_{S_\mathrm{a}}\left[\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}s' - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\right.\right.\\
& \left.\left.\times\iint \boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S'\right\}\\
= & -\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\iint \boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\\
= & \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{y}})\,2E_0\iint_{S_\mathrm{a}}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'
\end{aligned}
\tag{7-112}
$$

式中, 衍射波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和积分点位置矢 $\boldsymbol{r}'$ 分别为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{x}}k\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}k\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}k\cos\theta\\
&\boldsymbol{r}' = \hat{\boldsymbol{x}}\rho'\cos\varphi' + \hat{\boldsymbol{y}}\rho'\sin\varphi'\\
&\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}' = k\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')
\end{aligned}
$$

代入到式 (7-112), 并对圆孔孔面积分得

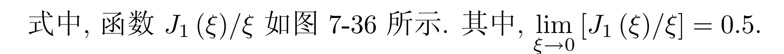
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{y}})\,2E_0\iint_{S_\mathrm{a}}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'\\
&= \frac{\mathrm{i}E_0\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{y}})\int_0^a\mathrm{d}\rho'\int_0^{2\pi}\rho'\mathrm{d}\varphi'\exp[-\mathrm{i}k\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]
\end{aligned}
$$

根据 Bessel 函数关系式,

$$
\begin{aligned}
J_0(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-\mathrm{i}\xi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\\
uJ_1(u) &= \int_0^u \xi J_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

可得衍射场为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mathrm{i}E_0\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{y}})\int_0^a\mathrm{d}\rho'\int_0^{2\pi}\rho'\mathrm{d}\varphi'\exp[-\mathrm{i}k\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]\\
&= \frac{\mathrm{i}kE_0\exp(\mathrm{i}kr)}{r}(\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta)\int_0^a\rho'\mathrm{d}\rho' J_0(k\rho'\sin\theta)\\
&= \frac{\mathrm{i}kE_0\exp(\mathrm{i}kr)}{r}(\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta)\frac{1}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{ka\sin\theta}\xi J_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= (\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta)\frac{\mathrm{i}ka^2E_0\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\cdot\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}
\end{aligned}
\tag{7-113}
$$


式中, 函数 $J_1(\xi)/\xi$ 如图 7-36 所示. 其中, $\lim\limits_{\xi\to 0}[J_1(\xi)/\xi] = 0.5$.

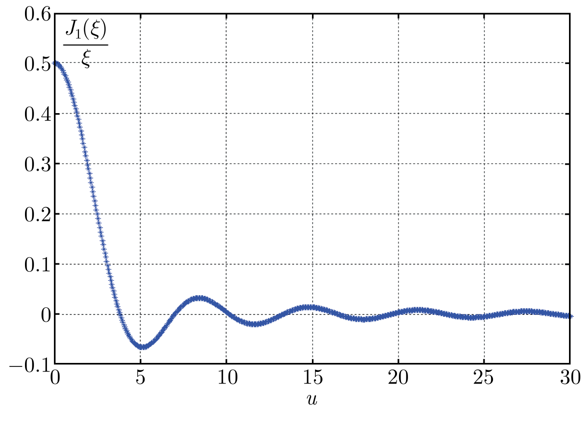


图 7-36 $J_1(\xi)/\xi$ 函数

7.5.7 开口矩形波导的辐射

设矩形波导开放端口外部为自由空间, 如图 7-37 所示. 波导中 TE_{10} 模的电磁场为

$$H_z = \cos\frac{\pi x}{a}\exp(\mathrm{i}k_z z)$$

$$H_x = \frac{-\mathrm{i}k_z a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\exp(\mathrm{i}k_z z)$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\exp(\mathrm{i}k_z z)$$

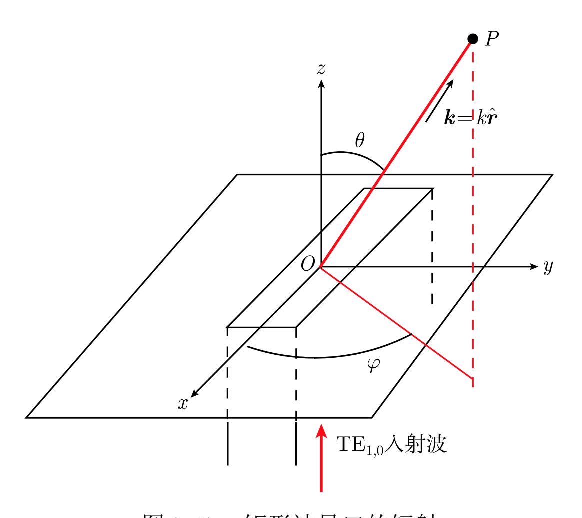


图 7-37 矩形波导口的辐射

上式中 $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. 为了便于积分, 将坐标原点移到波导口的中心, 即设 $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2, -b/2 \leqslant y \leqslant b/2$, 并取 E_y 的幅值为 E_0, 这时上式变为

$$\left.\begin{aligned}
E_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) = E_0\cos\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
H_z &= -\sin\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) = -\frac{\pi}{\mathrm{i}\omega\mu a}E_0\sin\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\\
H_x &= \frac{-\mathrm{i}k_z a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) = \frac{-k_z}{\omega\mu}E_0\cos\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7-114}$$

将波导开口衍射等效为孔缝面电磁流辐射, 采用 Kirchhoff 近似. 设波导口连接到无限大 PMC 平面, 参照式 (7-39) 和图 7-16 等效方式, 孔缝面的等效面电磁流为

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right) = 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|_{z=0} = -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{2E_0}{\eta}\cos\frac{\pi x'}{a}\\
&\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{7-115}$$

式中, 取 $\eta = \omega\mu/k_z$. 按照 Fraunhofer 衍射公式 (7-100) 有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right) =& \frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_{\mathrm{a}}}\left[\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right) - \frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\right]\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\
=& \frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_{\mathrm{a}}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}s'\\
=& \frac{-\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\frac{2E_0}{\eta}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\\
&\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x'\cos\frac{\pi x'}{a}\exp\left(-\mathrm{i}k_x x' - \mathrm{i}k_y y'\right)
\end{aligned} \tag{7-116}$$

式中, 积分的计算用到积分公式,

$$\int\exp\left(ax\right)\cos bx\mathrm{d}x = \frac{\exp\left(ax\right)}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$$

可得积分为

$$\begin{aligned}
I =& \int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x'\cos\frac{\pi x'}{a}\exp\left(-\mathrm{i}k_x x' - \mathrm{i}k_y y'\right)\\
=& \int_{-b/2}^{b/2}\exp\left(-\mathrm{i}k_y y'\right)\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(-\mathrm{i}k_x x'\right)\cos\frac{\pi x'}{a}\mathrm{d}x'\\
=& \frac{2\sin\left(\dfrac{k_y b}{2}\right)}{k_y}\frac{1}{k_x^2 - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2}\left[\frac{\pi}{a}\exp\left(-\mathrm{i}k_x\frac{a}{2}\right) + \frac{\pi}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_x\frac{a}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sin\left(\dfrac{k_y b}{2}\right)}{k_y} \frac{2\dfrac{\pi}{a}}{k_x^2 - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \\
&= \frac{2\sin\left(\dfrac{k_y b}{2}\right)}{k_y} \left\{ \frac{\sin\left[\left(k_x + \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{k_x + \dfrac{\pi}{a}} + \frac{\sin\left[\left(k_x - \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{k_x - \dfrac{\pi}{a}} \right\} \\
&= \frac{\dfrac{ab}{2}\sin\left(\dfrac{k_y b}{2}\right)}{\dfrac{k_y b}{2}} \left\{ \frac{\sin\left[\left(k_x + \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{\left(k_x + \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}} + \frac{\sin\left[\left(k_x - \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{\left(k_x - \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}} \right\}
\end{aligned} \tag{7-117}
$$

式中,

$$
k_x = k\sin\theta\cos\varphi
$$

$$
k_y = k\sin\theta\sin\varphi
$$

另外, 式 (7-116) 中

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{y}} &= \overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{r}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\right) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\right) - \hat{\boldsymbol{r}}\left(\sin\theta\sin\varphi\right) \\
&= \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi
\end{aligned}
$$

以上结果代入式 (7-116) 得到矩形波导开口的辐射场为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right) =& \frac{-\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\frac{2E_0}{\eta}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right) \\
&\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x'\cos\frac{\pi x'}{a}\exp\left(-\mathrm{i}k_x x' - \mathrm{i}k_y y'\right) \\
=& -\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\right)\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\frac{E_0 ab}{\eta} \\
&\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{k_y b}{2}\right)}{\dfrac{k_y b}{2}}\left\{ \frac{\sin\left[\left(k_x + \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{\left(k_x + \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}} + \frac{\sin\left[\left(k_x - \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}\right]}{\left(k_x - \dfrac{\pi}{a}\right)\dfrac{a}{2}} \right\}
\end{aligned} \tag{7-118}
$$

式中, 函数 $\operatorname{sinc}(\xi) = (\sin\xi)/\xi$ 如图 7-27 所示.

如果波导口连接到无限大 PEC 平面, 参照图 7-8 的等效方式, 孔缝面的等效面电磁流为

$$
\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right) = 0
$$

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}'\right) = -2\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\big|_{z=0} = \hat{\boldsymbol{x}}2E_0\cos\frac{\pi x}{a}
$$

按照 Fraunhofer 衍射公式 (7-100) 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\iint\limits_{S_\mathrm{a}}\left[\left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')-\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\right]\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}s' \\ &= -\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\iint\limits_{S_\mathrm{a}}\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}s' \\ &= \frac{-\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\frac{2E_0}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}} \\ &\quad\times\hat{\boldsymbol{x}}\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x'\cos\frac{\pi x'}{a}\exp(-\mathrm{i}k_xx'-\mathrm{i}k_yy')\end{aligned} \tag{7-119}$$

式 (7-119) 中的积分同式 (7-117). 另外, 式 (7-119) 中

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\varphi$$

代入式 (7-119), 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{-\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\frac{2E_0}{\eta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{x}}\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x' \\ &\quad\cdot\cos\frac{\pi x'}{a}\exp(-\mathrm{i}k_xx'-\mathrm{i}k_yy') \\ &= -\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\varphi\right)\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\frac{E_0ab}{\eta} \\ &\quad\cdot\frac{\sin\left(\frac{k_yb}{2}\right)}{\frac{k_yb}{2}}\left\{\frac{\sin\left[\left(k_x+\frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left(k_x+\frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}}+\frac{\sin\left[\left(k_x-\frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left(k_x-\frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}}\right\}\end{aligned} \tag{7-120}$$

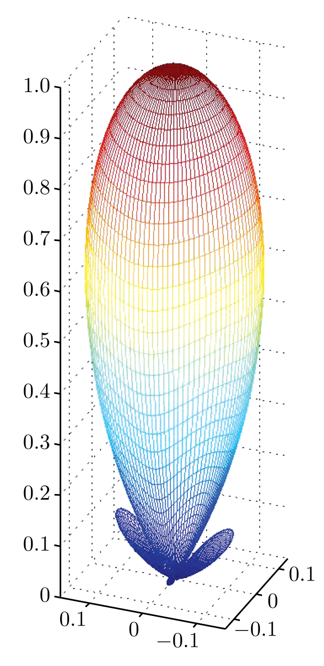


图 7-38　$3\lambda\times2\lambda$ 矩形波导口的衍射方向图

式 (7-120) 和式 (7-118) 只是电场的极化分量有所不同, 但二者的辐射场方向图 $|\boldsymbol{E}| = \left|\hat{\boldsymbol{\theta}}E_\theta+\hat{\boldsymbol{\varphi}}E_\varphi\right| = \sqrt{|E_\theta|^2+|E_\varphi|^2}$ 相同. 当矩形波导口为 $3\lambda\times2\lambda$, λ 为真空波长, 矩形波导开口辐射的远区衍射场归一化方向图如图 7-38 所示 (Balanis, 1997: 584~603).

7.6 互 补 原 理

7.6.1 对偶关系的另一形式

引入磁荷、磁流后的 Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\\\nabla\times\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\}\tag{7-121}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)&=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\\-\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)&=\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\end{aligned}\right\}\tag{7-122}$$

在 6.4.1 节已经讨论了对偶关系为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\quad\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}\\&\mu\to\varepsilon,\quad\varepsilon\to\mu\\&\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M},\quad\boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{7-123}$$

上述对偶性常用于边值问题, 如分层介质的反折射、分层介质导行波的分析.

满足方程和边界的另外一种对偶关系为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\eta\boldsymbol{H},\quad\boldsymbol{H}\to-\frac{\boldsymbol{E}}{\eta}\\&\boldsymbol{J}\to\frac{\boldsymbol{M}}{\eta},\quad\boldsymbol{M}\to-\eta\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{7-124}$$

式中, $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$. 上述对偶性常用于无界空间辐射、散射问题.

7.6.2 平面互补结构

设无限大理想导体 (PEC) 平板上有孔缝 S_{a}, 其互补结构是与孔缝形状相同的平面金属板 S_{a}, 如图 7-39 所示. 设平面电磁波自 $z<0$ 下半空间入射. 考虑两个电磁问题：一个是平面孔缝 S_{a} 的衍射 (问题 a), 另一个是互补结构平面金属板 S_{a} 的散射 (问题 b). 以下讨论问题 a 和问题 b 之间 Maxwell 方程解的关联性.

当电磁波照射到金属屏 (问题 a) 或金属板 (问题 b), 入射波在 PEC 面上将会产生感应面电流. 首先, 考虑一小段面电流元 Il. 由于电流元 Il 所产生的磁场只有 φ 分量, 所以包含电流元 Il 的任何平面, 该电流元所产生磁场的磁力线必垂直通过此平面, 如图 7-40 所示. 因此, PEC 面上的任一小段感生面电流在 $z=0$ 的孔缝面, 即问题 a 的 S_{a} 和问题 b 的 S_{m} 面上所产生的磁场切向分量为零. 金属平板上的面

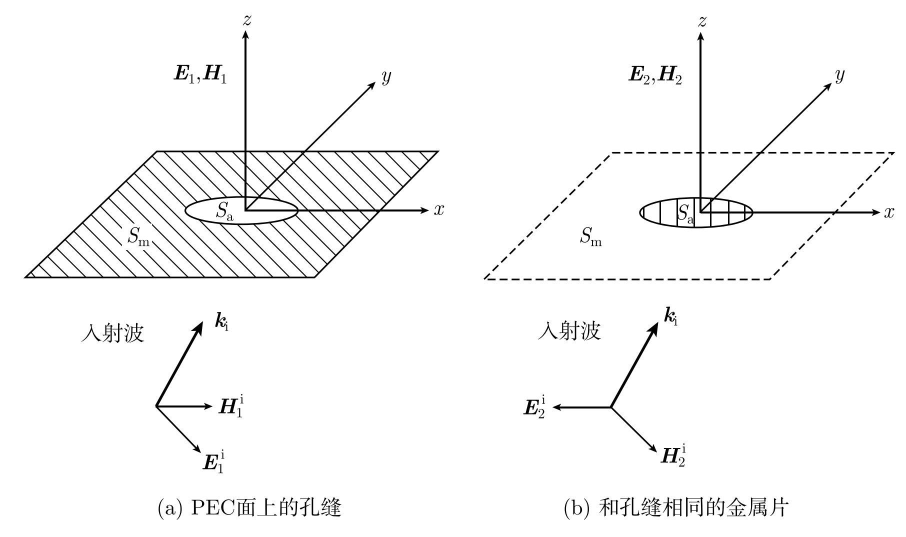


图 7-39　平面互补结构：PEC 片

电流可看做许多元电流之和, 故感应电流在问题 a 的 S_{a} 和问题 b 的 S_{m} 上所产生的磁场切向分量均为零, 即

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}}&=0\\\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{m}}}&=0\end{aligned}\right\}\tag{7-125}$$

式中, $\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}$ 分别代表 PEC 面上感应电流在图 7-39 (a) 和 (b) 情形所产生的磁场.

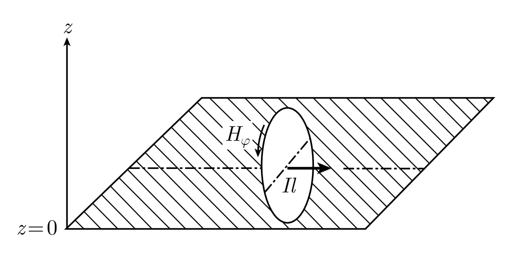


图 7-40　平面上小段电流元及其磁力线

7.6.3　Babinet 互补原理

下面分别考虑图 7-39 问题 a 和问题 b 在 $z>0$ 上半空间电磁场方程和边界条件. 先看问题 a. $z>0$ 上半空间场方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}_1&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_1\\\nabla\times\boldsymbol{H}_1&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_1\end{aligned}\right\}\tag{7-126}$$

$z=0$ 面上边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1\,|_{S_\mathrm{m}}=0\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1\,\big|_{S_\mathrm{a}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}_1^\mathrm{i}+\boldsymbol{H}_1^\mathrm{s}\right)|_{S_\mathrm{a}}\\&\qquad\qquad=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^\mathrm{i}\,|_{S_\mathrm{a}}+\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^\mathrm{s}\,|_{S_\mathrm{a}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^\mathrm{i}\,|_{S_\mathrm{a}}\end{aligned}\right\}\tag{7-127}$$

式中, 用到 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_1^\mathrm{i}+\boldsymbol{H}_1^\mathrm{s}$, 其中 $\boldsymbol{H}_1^\mathrm{i}$ 为入射波, $\boldsymbol{H}_1^\mathrm{s}$ 代表由感生电流所产生的散射场; 以及 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^\mathrm{s}\,|_{S_\mathrm{a}}=0$, 这是因为由屏的 S_m 上感应电流产生的散射场 $\boldsymbol{H}_1^\mathrm{s}$ 的磁场切向分量等于零, 如式 (7-125).

再看问题 b. $z>0$ 上半空间场方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}_2&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2\\\nabla\times\boldsymbol{H}_2&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2\end{aligned}\right\}\tag{7-128}$$

令式 (7-128) 中 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_2^\mathrm{i}+\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s},\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_2^\mathrm{i}+\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}$, 其中散射场满足方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s}&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}\\\nabla\times\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s}\end{aligned}\right\}\tag{7-129}$$

或者改写为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times(\eta\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s})=\mathrm{i}\omega\mu\left(\frac{-\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s}}{\eta}\right)\\\nabla\times\left(-\frac{\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s}}{\eta}\right)=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\left(\eta\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7-130}$$

$z=0$ 面上边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2|_{S_\mathrm{a}}=0\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2|_{S_\mathrm{m}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}_2^\mathrm{i}+\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}\right)\big|_{S_\mathrm{m}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^\mathrm{i}\,|_{S_\mathrm{m}}\end{aligned}\right\}\tag{7-131}$$

式中, 用到 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}\,|_{S_\mathrm{m}}=0$, 这是因为由金属板 S_a 上感应电流产生的散射场 $\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}$ 的磁场切向分量等于零, 见式 (7-125). 由于 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_2^\mathrm{i}+\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s},\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_2^\mathrm{i}+\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}$, 式 (7-131) 可改写为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^\mathrm{s}\,|_{S_\mathrm{a}}=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^\mathrm{i}\,|_{S_\mathrm{a}}\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^\mathrm{s}\,|_{S_\mathrm{m}}=0\end{aligned}\right\}\tag{7-132}$$

又设问题 b 与问题 a 两种情形下入射波互为对偶, 如图 7-39 所示, 即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2^\mathrm{i}&=\eta\boldsymbol{H}_1^\mathrm{i}\\\boldsymbol{H}_2^\mathrm{i}&=-\frac{\boldsymbol{E}_1^\mathrm{i}}{\eta}\end{aligned}\right\}\tag{7-133}$$

式中, $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$. 于是, 可将式 (7-132) 重写为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times(\eta\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}})|_{S_{\mathrm{m}}}=0\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(-\frac{\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}}{\eta}\right)\bigg|_{S_{\mathrm{a}}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\frac{\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}}}{\eta}\right)\bigg|_{S_{\mathrm{a}}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}\,|_{S_{\mathrm{a}}}\end{aligned}\right\}\tag{7-134}$$

对于问题 b, 引进记号

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}=\eta\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}\\&\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}=-\frac{\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}}{\eta}\end{aligned}\right\}\tag{7-135}$$

式 (7-130) 变为 ($z>0$ 区域)

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}\\&\nabla\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}\end{aligned}\right\}\tag{7-136}$$

以及边界条件 (7-134) 变为 ($z=0$ 面上)

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}\Big|_{S_{\mathrm{m}}}=0\\&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}\Big|_{S_{\mathrm{a}}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}\Big|_{S_{\mathrm{a}}}\end{aligned}\right\}\tag{7-137}$$

最后, 为了便于比较, 将问题 a 与问题 b 在 $z>0$ 区域中的式 (7-126)、式 (7-136) 以及 $z=0$ 面上边界条件 (7-127)、式 (7-137) 归纳如表 7-2 所示. 由表可见, 问题 a 和问题 b 二者方程和边界具有完全相同形式, 唯一性定理断言它们有相同解.

表 7-2　具有互补结构的问题 a 与问题 b 的方程及边界条件

	问题 a	问题 b
$z>0$ 区域方程	$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_1$ $\nabla\times\boldsymbol{H}_1=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_1$	$\nabla\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}$ $\nabla\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}$
$z=0$ 面上边界条件	$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1\,\vert_{S_{\mathrm{m}}}=0$ $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1\,\vert_{S_{\mathrm{a}}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}\,\vert_{S_{\mathrm{a}}}$	$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}\big\vert_{S_{\mathrm{m}}}=0$ $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}\big\vert_{S_{\mathrm{a}}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}\big\vert_{S_{\mathrm{a}}}$

如果已经获得问题 a 衍射问题的解 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$, 则问题 b 互补结构散射问题的解 $\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}},\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}$ 可以通过以下对应关系得到:

$$\boldsymbol{E}_1\to\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{Babinet}}=\eta\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}$$

$$\boldsymbol{H}_1\to\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{Babinet}}=-\frac{\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}}{\eta}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} &= \frac{\boldsymbol{E}_1}{\eta}\\ \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} &= -\eta\boldsymbol{H}_1\end{aligned}\right\} \tag{7-138}$$

上述原理称为 Babinet 互补原理.

7.6.4 Babinet 原理的另一表述

Babinet 原理还有其他表述方式. 设平面互补结构如图 7-41 所示, 问题 a 和图 7-39(a) 相同, 但这里图 7-39(b) 为形状互补的 PMC 片散射, 并设问题 b 和问题 a 具有完全相同的入射波, 即

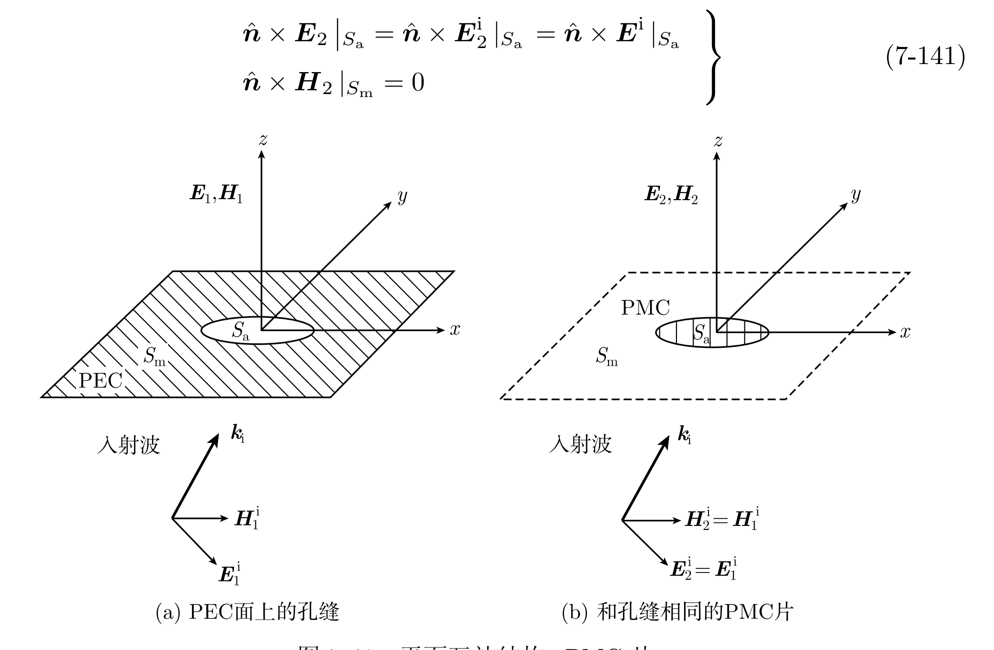
$$\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}, \quad \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{i}} \tag{7-139}$$

记问题 b 在 $z>0$ 区域的场为 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$, 满足方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}_2 &= \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2\\ \nabla\times\boldsymbol{H}_2 &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2\end{aligned}\right\} \tag{7-140}$$

根据边界条件, PMC 表面的磁场切向分量等于零. 此外, 设 $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}$, 其中 $\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}$ 代表 PMC 面上的感应面磁流所产生的电场. 和式 (7-125) 对偶, PMC 面上感应面磁流所产生的电场在 $z=0$ 面的切向分量等于零, 即 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}|_{S_{\mathrm{a}}} = 0$. 于是, 问题 b 在 $z=0$ 面上满足边界条件,

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2\big|_{S_{\mathrm{a}}} = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}}|_{S_{\mathrm{a}}} = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}|_{S_{\mathrm{a}}}\\ &\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2|_{S_{\mathrm{m}}} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7-141}$$



(a) PEC面上的孔缝　　(b) 和孔缝相同的PMC片

图 7-41　平面互补结构：PMC 片

最后, 将图 7-41 中问题 a 和问题 b 两种情形的场之和记为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 \end{aligned}\right\} \tag{7-142}$$

由式 (7-126)、式 (7-140) 以及式 (7-127)、式 (7-141) 可见, 问题 a 和问题 b 场之和 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 在 $z > 0$ 区域满足

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \tag{7-143}$$

在 $z = 0$ 面上满足边界条件

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}\big|_{S_\mathrm{a}} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)\big|_{S_\mathrm{a}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{a}} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}\big|_{S_\mathrm{m}} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2)\big|_{S_\mathrm{m}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{m}} \end{aligned}\right\} \tag{7-144}$$

如前所述, 问题 a 和问题 b 具有完全相同的入射波, 该入射波在 $z > 0$ 区域满足

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i} &= \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}^\mathrm{i} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i} &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^\mathrm{i} \end{aligned}\right\} \tag{7-145}$$

在自由空间传播的入射波在 $z = 0$ 面上当然具有边界条件

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{a}} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{a}} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{m}} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{m}} \end{aligned}\right\} \tag{7-146}$$

为了便于分析, 将上述方程和边界归纳如表 7-3 所示. 由表可见, 问题 a 和问题 b 电磁场之和式 (7-142) 与入射波 $\boldsymbol{E}^\mathrm{i}, \boldsymbol{H}^\mathrm{i}$ 具有相同的方程和边界条件, 根据唯一性定理, 二者在 $z > 0$ 区域的解完全相同, 即在 $z > 0$ 区域,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}^\mathrm{i} \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}^\mathrm{i} \end{aligned}\right\} \tag{7-147}$$

表 7-3　具有互补结构的问题 a 与问题 b 电磁场之和与入射波方程及边界条件的比较

	问题 a 与问题 b 电磁场之和	问题 a 与问题 b 的入射波
$z > 0$ 区域方程	$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}$ $\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$	$\nabla \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}^\mathrm{i}$ $\nabla \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^\mathrm{i}$
$z = 0$ 面上边界条件	$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}\big|_{S_\mathrm{a}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{a}}$ $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}\big|_{S_\mathrm{m}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{m}}$	$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{a}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{a}}$ $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{m}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^\mathrm{i}\big|_{S_\mathrm{m}}$

换言之, 如果图 7-41 中已求得问题 a 的解 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$, 则根据式 (7-147), 问题 b 的解 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$ 即为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} - \boldsymbol{E}_1$$
$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}^{\mathrm{i}} - \boldsymbol{H}_1$$

对于 PMC 互补结构, 上述互补原理的表述由 Booker (1946) 提出.

7.6.5 互补原理用于半平面衍射

在 7.4.2 节讨论了 TE 波的半平面衍射, 即入射波电场 $\boldsymbol{E}$ 平行于边缘情形. 图 7-42(a) 和图 7-42(b) 的半平面为互补结构, 图 7-42(a) 中入射波电场平行于半平面边缘 (TM 情形), 图 7-42(b) 中入射波磁场平行于半平面边缘 (TE 情形), 二者入射波为对偶. 设图 7-42(a) 和图 7-42(b) 两种情形的衍射场分别记为 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}(x,z)$ 和 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}}(x,z)$. 根据 Babinet 原理, 半平面衍射的 TM 和 TE 情形为互补问题, 二者只需求解其一, 另一种情形可由对偶原理得到.

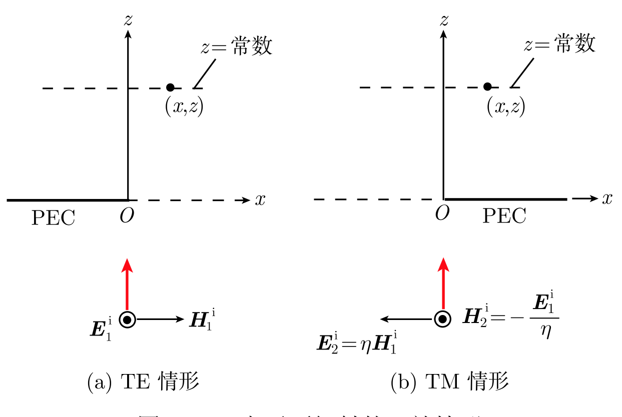


图 7-42 半平面衍射的互补情形

设 TE 情形半平面衍射场已求得, 见式 (7-53), 记为 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}(x,z)$, 其磁场为 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}}(x,z) = \nabla \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}(x,z)/(\mathrm{i}\omega\mu)$. 注意: Babinet 原理 (7-138) 中 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ 为如图 7-39(a) 所示上半空间的总场, 而 7.4.2 节所计算的是衍射场, 不包含入射场; 但是如图 7-39(b) 所示上半空间为散射场. 所以,

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}(x,z) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}, \quad \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}}(x,z) + \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} \\ &\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}}(x,z), \quad \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}}(x,z) \end{aligned}\right\} \tag{7-148}$$

根据式 (7-138),

$$\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} = \frac{\boldsymbol{E}_1}{\eta}$$
$$\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} = -\eta \boldsymbol{H}_1$$

将式 (7-148) 代入上式可得 TM 情形的半平面衍射场为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}}(x,z)&=\frac{\boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}(x,z)+\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}}{\eta}\\\boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}}(x,z)&=-\eta\left[\boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}}(x,z)+\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{7-149}$$

7.7　Cornu 螺线和半平面 Fresnel 衍射的 MATLAB 计算

本节给出用 MATLAB 计算 Fresnel 余弦和正弦积分, Cornu 螺线和半平面 Fresnel 衍射, 参见 7.4.2 节. 所得余弦和正弦积分曲线如图 7-20 所示, Cornu 螺线如图 7-21 所示, 半平面 Fresnel 衍射如图 7-22 所示.

7.7.1　Fresnel 余弦积分和正弦积分

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                  本程序绘制 Fresnel 余弦和正弦积分曲线
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc
gama=0.5772;                    %欧拉常数
eta=376.8;                      %真空波阻抗
wavelength=0.5;                 %波长
k=2*pi/wavelength;              %波数
x=-6:0.05:6;
CW=mfun('FresnelC',x);          %调用特殊数学函数 Fresnel Cosine Integral
SW=mfun('FresnelS',x);          %调用特殊数学函数 Fresnel Sine Integral
plot(x,CW,'*',x,SW,'-')
%xlabel('C(w)')
%ylabel('i*S(w)')
title('Fresnel 余弦和正弦积分曲线 ','FontSize',14,'FontName',' 黑体 ')
grid on
```

7.7.2　Cornu 螺线

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                       本程序绘制 Cornu 螺线
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc
gama=0.5772;                    %欧拉常数
```

```
eta=376.8;                          %真空波阻抗
wavelength=0.5;                     %波长
k=2*pi/wavelength;                  %波数
x=-6:0.01:6;
CW=mfun('FresnelC',x);              %调用特殊数学函数 Fresnel Cosine Integral
SW=mfun('FresnelS',x);              %调用特殊数学函数 Fresnel Sine Integral
plot(CW,SW,'-')
xlabel('C(w)')
ylabel('i*S(w)')
title('Cornu 螺线 ')
grid on
```

7.7.3 半平面 Fresnel 衍射

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                     本程序绘制半平面孔径的衍射
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc
gama=0.5772;                        %欧拉常数
eta=376.8;                          %真空波阻抗
wavelength=5;                       %波长
k=2*pi/wavelength;                  %波数
z=0.5;                              %观察点在 z 为常数的平面上
c=sqrt(k/pi/z);
x=-6:0.01:6;
CW=mfun('FresnelC',c*x);            %调用特殊数学函数 Fresnel Cosine Integral
SW=mfun('FresnelS',c*x);            %调用特殊数学函数 Fresnel Sine Integral
wei=(1+i)/2+CW+i*SW;
plot(x,abs(wei)/sqrt(2),'.')
grid on
```

7.8 PEC 屏上矩形孔 Fraunhofer 衍射的 MATLAB 计算

本节给出用 MATLAB 计算 PEC 屏上矩形孔的 Fraunhofer 衍射. 参见 7.5.5 节. 设 PEC 屏上正方形孔边长为 6cm×6cm, 平面波垂直入射, 波长为 3cm, 衍射方向图如图 7-43 所示.

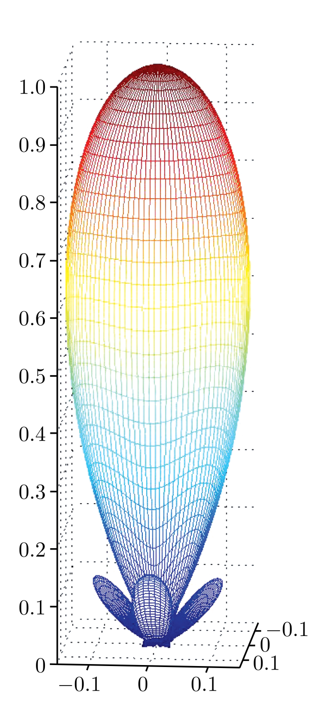


图 7-43　矩形方孔的辐射方向图

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                    本程序显示 PEC 屏上矩形孔的衍射方向图
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;clc;
wavelength=0.03;                          %波长
k=2*pi/wavelength;                        %波矢量大小
a=3*wavelength;                           %矩形孔边长
b=2*wavelength;                           %矩形孔边长
W1=k*a/2;
W2=k*b/2;
theta=meshgrid(eps:pi/2/100:pi/2);        %俯仰角 0~pi/2
phi=meshgrid(eps:2*pi/100:2*pi)';         %方位角在 0~2pi
X=W1*sin(theta).*cos(phi);
Y=W2*sin(theta).*sin(phi);
T=(sin(X)./X).*(sin(Y)./Y);               %计算 sinc 函数的乘积
Etheta=cos(phi).*T;                       %计算电场的 theta 分量
Ephi=-cos(theta).*sin(phi).*T;            %计算电场的 phi 分量
```

```
E=sqrt((abs(Etheta)).^2.+(abs(Ephi)).^2);      %计算总电场
Emax=max(max(E));
[x,y,z]=sph2cart(phi,pi/2-theta,E/Emax);
mesh(x,y,z);
axis equal
```

习　　题

1. 设无限大导体平面附近有一垂直电偶极子, 其电偶极矩为 Il. 设电偶极子与平板距离为 d. 根据镜像原理, 试计算其辐射场和总辐射功率.

2. 设无限大导体平面附近有一平行电偶极子, 其电偶极矩为 Il. 设电偶极子与平板距离为 d. 根据镜像原理, 试计算其辐射场和总辐射功率.

【提示】　应用上一章电偶极子任意取向时的辐射场公式.

3. 同轴线通向接地导体平面, 如图 7-44 所示, 设同轴线中传输电磁波为 TEM 模, 且同轴线内, 外导体间的电压振幅值为 U_0 应用等效原理, 计算此同轴线开口在 $z>0$ 右半空间的辐射场.

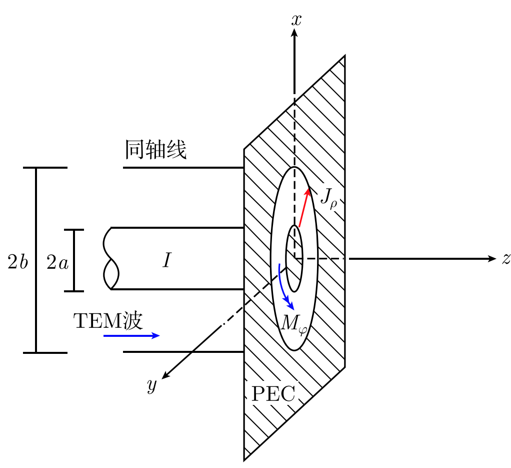


图 7-44　同轴线开口辐射

【提示】　参阅 7.1.4 节关于开口同轴线等效电磁流的分析.

4. 证明在 $z=0$ 平面上的面电流 $\boldsymbol{J}_x=\hat{\boldsymbol{e}}_x J_0$ 将在无界均匀介质中产生外向平面波,

$$E_z=\begin{cases}-\dfrac{\eta J_0}{2}\exp(\mathrm{i}kz), & z>0\\[2ex] -\dfrac{\eta J_0}{2}\exp(-\mathrm{i}kz), & z<0\end{cases}$$

式中, $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为波阻抗.

【提示】　根据唯一性定理, 验证其满足 Maxwell 方程和边界条件.

5. 设 $r=a$ 球面上面电流与面磁流分别为

$$\boldsymbol{J}_x = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\frac{Il}{4\pi}\exp(\mathrm{i}ka)\left(\frac{-\mathrm{i}k}{a}+\frac{1}{a^2}\right)\sin\theta$$

$$\boldsymbol{J}_{mx} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi}\frac{Il}{4\pi}\exp(\mathrm{i}ka)\left(\frac{-\mathrm{i}\omega\mu}{a}+\frac{\eta}{a^2}-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon a^2}\right)\sin^2\theta$$

证明在 $r>a$ 区域所产生的电磁场为

$$E_r = \frac{Il}{4\pi}\exp(\mathrm{i}kr)\left(\frac{\eta}{r^2}-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon r^3}\right)\cos\theta$$

$$E_\theta = \frac{Il}{4\pi}\exp(\mathrm{i}kr)\left(\frac{-\mathrm{i}\omega\mu}{r}+\frac{\eta}{r^2}-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon r^3}\right)\sin\theta$$

$$H_\varphi = \frac{Il}{4\pi}\exp(\mathrm{i}kr)\left(\frac{-\mathrm{i}k}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta$$

而在 $r<a$ 区域形成零场.

6. 设屏上缝隙边缘呈现下降的场分布为以下三种形式 (Kraus, Fleisch, 1999: 332):

(1) 线性下降 (三角形) 分布,

$$W_1(x') = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{2x'}{a}\right), & |x'|\leqslant \dfrac{a}{2} \\ 0, & |x'|>\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

(2) 平方幂下降, 到边缘等于零,

$$W_2(x') = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{2x'}{a}\right)^2, & |x'|\leqslant \dfrac{a}{2} \\ 0, & |x'|>\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

(3) 平方幂下降, 到边缘不等于零,

$$W_3(x') = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x'}{a}\right)^2, & |x'|\leqslant \dfrac{a}{2} \\ 0, & |x'|>\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

试求以上场分布所对应的 Fourier 变换, 并画出场分布及其 Fourier 变换模值 $|w(\xi)|$ 的曲线.

7. 设平面波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp(\mathrm{i}kz)$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta}\exp(\mathrm{i}kz)$$

垂直入射到边长为 $a\times b$ 的矩形孔, 屏为理想导体板.

(1) 根据 7.5.5 节所讨论矩形孔的衍射结果, 给出衍射场在 E 面 (平行于 a 边) 和 H 面 (平行于 b 边) 的主瓣 (第一零点) 宽度计算式.

(2) 设 $a=3\lambda, b=2\lambda$, 其中 λ 为自由空间波长, 求 E 面和 H 面主瓣宽度的角度.

8. 设开口矩形波导连接到理想导体屏, 矩形波导边长为 $a \times b$, TE_{10} 波的场分布为

$$\begin{aligned}
E_y &= E_0 \cos\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \\
H_z &= \frac{\pi}{\mathrm{i}\omega\mu a}E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right) \\
H_x &= \frac{-k_z}{\omega\mu}E_0 \cos\frac{\pi x}{a}\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)
\end{aligned}$$

(1) 根据 7.5.7 节所讨论的开口矩形波导辐射结果, 给出辐射场在 E 面 (平行于 b 边) 和 H 面 (平行于 a 边) 的主瓣 (第一零点) 宽度计算式.

(2) 设 $a=3\lambda, b=2\lambda$, 其中 λ 为自由空间波长, 求 E 面和 H 面主瓣宽度的角度.

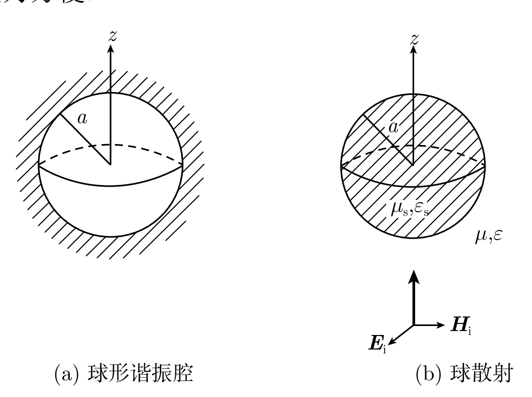
第 8 章　散　　射

本章讨论球和圆柱两种典型目标散射的级数解. 介绍球坐标下的 Debye 势函数, 并用以获得球散射的 Mie 级数解. 此外, 还讨论周期结构的 Floquet 定理及其用于分析周期性表面的散射.

8.1　Debye 势函数

8.1.1　球形腔和球散射问题

考虑两类球形问题：一类是球形谐振腔, 由 Maxwell 方程和边界条件出发确定腔内 $r < a$ 区域电磁场分布和谐振频率; 另一类是球的散射, 即球形物体处于外电磁场中, 由 Maxwell 方程、入射波和边界条件出发确定球内外电磁场分布. 它们分别称为球的内问题和外问题, 如图 8-1 所示. 首先讨论球坐标下的分离变量解, 采用 Debye 势函数较为方便.



(a) 球形谐振腔　　(b) 球散射

图 8-1　球的内问题和外问题

8.1.2　Debye 势

均匀介质中无源 Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\\nabla\times\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\\\nabla\cdot\boldsymbol{H}&=0\\\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=0\end{aligned}\right\}\tag{8-1}$$

由式 (8-1) 第三式可引入矢量势 $\boldsymbol{A}$ 来描写 $\boldsymbol{H}$, 令

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{8-2}$$

将式 (8-2) 代入式 (8-1) 第二式得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\nabla \times \boldsymbol{A}$$

或

$$\nabla \times (\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{A}) = 0$$

由此又可引入标量势函数 ψ, 令

$$\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega\mu\mathbf{A} = \nabla\psi \tag{8-3}$$

即用标量势 ψ 与矢量势 $\boldsymbol{A}$ 一起描写电场 $\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\mathbf{A} - \nabla\psi$.

将式 (8-2)、式 (8-3) 代入式 (8-1) 第一式得到

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = k^2\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla\psi \tag{8-4}$$

式中,

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{8-5}$$

如果矢量势 $\boldsymbol{A}$ 仅有 r 分量, 即令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}\pi_{\mathrm{e}} = \hat{\boldsymbol{r}}\,(r\pi_{\mathrm{e}}) \tag{8-6}$$

式中, π_{e} 称为电 Debye 势函数. 式 (8-6) 代入式 (8-2) 得到

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\varphi} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\theta} \tag{8-7}$$

可见这时磁场 $\boldsymbol{H}$ 没有 r 分量, 相应的场称为对于 r 的 TM 波. 将式 (8-6) 代入式 (8-4), 该矢量方程的三个分量方程分别为

$$\left.\begin{aligned}
&\theta\ 分量: \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\theta}\right) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\\
&\varphi\ 分量: \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\varphi}\right) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\\
&r\ 分量: \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\varphi^2}\right] + k^2 r\pi_{\mathrm{e}} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial r}
\end{aligned}\right\} \tag{8-8}$$

由于式 (8-3) 中 ψ 具有任意性, 考虑到式 (8-8) 第一、二式, 可选择

$$\psi = \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\,(r\pi_{\mathrm{e}}) \tag{8-9}$$

上述选择使式 (8-8) 第一、二式恒可满足. 式 (8-9) 代入式 (8-8) 第三式得到

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\pi_{\rm e}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\pi_{\rm e}}{\partial\varphi^2}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\pi_{\rm e}}{\partial r}\right)+k^2r\pi_{\rm e}=0 \tag{8-10}$$

按照 ∇ 算子在球坐标系中的形式, 式 (8-10) 又可写为

$$\nabla^2\pi_{\rm e}+k^2\pi_{\rm e}=0 \tag{8-11}$$

式 (8-11) 表明电 Debye 势满足标量 Helmholtz 方程.

将式 (8-6)、式 (8-9) 代入式 (8-3) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&={\rm i}\omega\mu\boldsymbol{A}+\nabla\psi\\&=\frac{\rm i}{\omega\varepsilon}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\rm e})+k^2r\pi_{\rm e}\right]+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\rm e})+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\rm e})\right\}\end{aligned} \tag{8-12}$$

以上为电 Debye 势与 $\boldsymbol{E}$ 的关系式. 由式 (8-7)、式 (8-12) 可得 $H_\theta,H_\varphi,E_r,E_\theta,E_\varphi$ 与 $\pi_{\rm e}$ 的关系式.

根据式 (8-1) 第四式, 也可以引入电矢量势 $\boldsymbol{Z}$, 令

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{Z} \tag{8-13}$$

仿照式 (8-6)∼ 式 (8-12) 的分析, 如果电矢量势 $\boldsymbol{Z}$ 仅有 r 分量, 即令

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{r}\pi_{\rm m}=\hat{\boldsymbol{r}}(r\pi_{\rm m}) \tag{8-14}$$

式中, $\pi_{\rm m}$ 称为磁 Debye 势函数. 将式 (8-14) 代入式 (8-13) 得到

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{Z}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\rm m}}{\partial\varphi}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial\pi_{\rm m}}{\partial\theta} \tag{8-15}$$

可见这时电场 $\boldsymbol{E}$ 没有 r 分量, 相应的场称为对于 r 的 TE 波. 同样, 在引入标量势并通过标量势的适当选择, 可以得到磁 Debye 势函数 $\pi_{\rm m}$ 满足标量 Helmholtz 方程,

$$\nabla^2\pi_{\rm m}+k^2\pi_{\rm m}=0 \tag{8-16}$$

由此可见, 以上述方式在球坐标系所引入的两个标量 Debye 势函数 $\pi_{\rm e}$ 和 $\pi_{\rm m}$ 中, $\pi_{\rm e}$ 代表对于 r 的 TM 波, 即 $H_r=0$ 而 $H_\theta,H_\varphi,E_r,E_\theta,E_\varphi$ 不为零; $\pi_{\rm m}$ 代表对于 r 的 TE 波, 即 $E_r=0$ 而 $E_\theta,E_\varphi,H_r,H_\theta,H_\varphi$ 不为零. 且 $\pi_{\rm e}$ 和 $\pi_{\rm m}$ 均满足标量 Helmholtz 方程. 球坐标下 Maxwell 方程的一般解即 TM 和 TE 波的叠加, 即

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{e}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{e}})\right]\\
E_\theta &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{e}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{m}}}{\partial\varphi}\\
E_\varphi &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{e}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{m}}}{\partial\theta}\\
H_r &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{m}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{m}})\right]\\
H_\theta &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{m}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\varphi}\\
H_\varphi &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{m}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{8-17}$$

8.1.3 球坐标下 Helmholtz 方程的分离变量解

将如式 (8-11)、式 (8-16) 所示 Helmholtz 方程重写为

$$\nabla^2 W + k^2 W = 0 \tag{8-18}$$

令式 (8-18) 的分离变量解为

$$W(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\varTheta(\theta)\,\varPhi(\varphi) \tag{8-19}$$

代入式 (8-18) 后可分离为三个 (常) 微分方程,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\varPhi}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\varPhi = 0\\
&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varTheta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[n(n+1)\sin^2\theta - m^2\right]\varTheta = 0\\
&r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rR) + \left[(kr)^2 - n(n+1)\right]R = 0
\end{aligned}\right\} \tag{8-20}$$

将式 (8-20) 第三式作变量替换, 令 $\xi = kr$ 和

$$R = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}B(\xi) \tag{8-21}$$

式 (8-20) 第三式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\xi} + \left[1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\xi^2}\right]B = 0 \tag{8-22}$$

以上为 Bessel 方程. 它的解为半整数 Bessel 函数 $B_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$, 包括 Bessel 函数 $J_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$, Neumann 函数 $N_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$, 和 Hankel 函数 $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$, $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$. 将 $B_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$ 代入式 (8-21) 并记

$$b_n(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}B_{n+\frac{1}{2}}(kr) \tag{8-23}$$

称为球 Bessel 函数. 球 Bessel 函数 $b_n(kr)$ 包括球 Bessel 函数 $j_n(kr)$, 球 Neumann 函数 $n_n(kr)$ 和球 Hankel 函数 $h^{(1)}_n(kr)$, $h^{(2)}_n(kr)$. 它们的前几阶形式为

$$\begin{aligned}
j_0(kr)&=\frac{\sin(kr)}{kr}\\
j_1(kr)&=-\frac{\cos(kr)}{kr}+\frac{\sin(kr)}{(kr)^2}\\
j_2(kr)&=-\frac{\sin(kr)}{kr}-\frac{3\cos(kr)}{(kr)^2}+\frac{3\sin(kr)}{(kr)^3}\\
n_0(kr)&=-\frac{\cos(kr)}{kr}\\
n_1(kr)&=-\frac{\sin(kr)}{kr}-\frac{\cos(kr)}{(kr)^2}\\
n_2(kr)&=\frac{\sin(kr)}{kr}-\frac{3\sin(kr)}{(kr)^2}-\frac{3\cos(kr)}{(kr)^3}\\
h^{(1)}_0(kr)&=-\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{\mathrm{i}kr}\\
h^{(1)}_1(kr)&=-\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\\
h^{(1)}_2(kr)&=\frac{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}\left[1+3\frac{\mathrm{i}}{kr}+3\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

第二类球 Hankel 函数 $h^{(2)}_n(kr)$ 是第一类球 Hankel 函数 $h^{(1)}_n(kr)$ 的复数共轭.

式 (8-20) 第一式为谐振动方程. 它的解为指数函数或正弦、余弦函数,

$$\Phi(\varphi)=\exp(\pm\mathrm{i}m\varphi)\quad 或\quad \sin(m\varphi),\quad \cos(m\varphi) \tag{8-24}$$

式 (8-20) 第二式为连带 Legendre 方程. 它的解为连带 Legendre 多项式,

$$\Theta(\theta)=P^m_n(\cos\theta) \tag{8-25}$$

连带 Legendre 多项式的前几阶为

$$\left.\begin{aligned}
P^1_0(\cos\theta)&=0\\
P^1_1(\cos\theta)&=\sin\theta\\
P^1_2(\cos\theta)&=3\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{8-26}$$

当 $m=0$, $P_n^0(\cos\theta)=P_n(\cos\theta)$, 它的前几阶为

$$\left.\begin{aligned}&P_0(\cos\theta)=1\\&P_1(\cos\theta)=\cos\theta\\&P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos 2\theta-1)\end{aligned}\right\}\tag{8-27}$$

以上式 (8-23) 和式 (8-24), 式 (8-25) 代入式 (8-19) 即 Helmholtz 方程 (8-18) 在球坐标下的分离变量解.

8.2 球形腔的轴对称 TM 模

对于球形腔, 腔内包含 $r=0$ 的点. 当 $r=0$ 时要求 π_{e} 与 π_{m} 为有限, 应取式 (8-23) 中 $b_n(kr)=j_n(kr)$. 以下仅考虑球形腔中的 TM 波, 即 $\pi_{\mathrm{m}}=0$, 并仅讨论球形腔中的轴对称场, 即 $\partial/\partial\varphi=0$, 亦即式 (8-20) 中取 $m=0$. 因而, Debye 势函数的分离变量解为

$$\pi_{\mathrm{e}}=j_n(kr)P_n(\cos\theta)$$

对于最低阶模, 取式 (8-23) 和式 (8-25) 中 $n=1$. 于是, 由式 (8-19) 得到电 Debye 势函数的解为

$$\pi_{\mathrm{e}}=j_1(kr)P_1(\cos\theta)=\left[\frac{-\cos(kr)}{kr}+\frac{\sin(kr)}{(kr)^2}\right]\cos\theta\tag{8-28}$$

式 (8-28) 代入式 (8-17) 得到相应的 $\mathrm{TM}_{10\mathrm{p}}$ 模为

$$\left.\begin{aligned}&H_\varphi=-\frac{\partial\pi_{\mathrm{e}}}{\partial\theta}=H_0\frac{\sin\theta}{kr}\left[\frac{\sin(kr)}{kr}-\cos(kr)\right]\\&E_r=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{\partial^2(r\pi_{\mathrm{e}})}{\partial r^2}=\mathrm{i}2H_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\cos\theta}{(kr)^2}\left[\frac{\sin(kr)}{kr}-\cos(kr)\right]\\&E_\theta=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{\partial^2(r\pi_{\mathrm{e}})}{\partial r\partial\theta}=-\mathrm{i}H_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\sin\theta}{(kr)^2}\left[\frac{(kr)^2-1}{kr}\sin(kr)+\cos(kr)\right]\end{aligned}\right\}\tag{8-29}$$

根据边界条件 $r=a$ 处 E_θ 等于零, 代入式 (8-29) 第三式可得

$$\frac{(ka)^2-1}{ka}\sin(ka)+\cos(ka)=0$$

即

$$\tan(ka)=\frac{ka}{1-(ka)^2}\tag{8-30}$$

式 (8-30) 为超越方程, 可以用图解法求解, 如图 8-2 所示. 以上方程具有多个根 $k_1, k_2, \cdots, k_p, \cdots$, 分别对应于不同谐振模 TM_{10p}. 可用数值方法求得上述方程的第一个根为

$$k_1 a = 2.74$$

由于 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, 所以球形腔 TM_{101} 模的谐振频率为

$$\omega_{101}^{\mathrm{TM}} = \frac{2.74}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad 或 \quad f_{101}^{\mathrm{TM}} = \frac{2.74}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{8-31}$$

图 8-2　TM_{10p} 模谐振频率的图解

8.3　球的散射

8.3.1　平面波的 Debye 势函数

设介质球半径为 a, 介质参数为 μ_{s},　ε_{s}, 取球心为坐标原点, 如图 8-3 所示. 入射波为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} &= \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \exp(\mathrm{i}kz) = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \exp(\mathrm{i}kr\cos\theta) \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} &= \hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \exp(\mathrm{i}kz) = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{\eta} E_0 \exp(\mathrm{i}kz) \end{aligned}\right\} \tag{8-32}$$

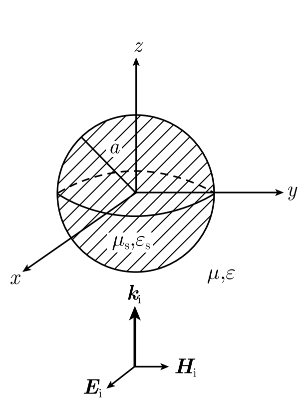


图 8-3　球的散射

式中, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为波阻抗.

考虑到球面 $r = a$ 处的边界条件, 将入射平面波用球谐函数展开为 (展开公式的证明可见张善杰, 2009：435)

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}kr\cos\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^{-n}(2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{kr}\sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)\hat{J}_n(kr) P_n(\cos\theta) \end{aligned} \tag{8-33}$$

式中, $j_n(kr)$ 为如式 (8-23) 所示球 Bessel 函数, 以及定义 $\hat{J}_n(kr) = krj_n(kr)$, 称为球面 Bessel 函数. 为了确定入射波的 Debye 势, 写出入射波电场的 r 分量为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{i}r} &= \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \exp(\mathrm{i}kr\cos\theta) \\ &= \sin\theta\cos\varphi E_0 \exp(\mathrm{i}kr\cos\theta) \\ &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\mathrm{i}kr} \frac{\partial}{\partial\theta}[\exp(\mathrm{i}kr\cos\theta)] \\ &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\mathrm{i}\,(kr)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)\hat{J}_n(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

式中, 用到式 (8-33), 以及 $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \sin\theta\cos\varphi$. 根据 Legendre 函数的导数公式

$$P_n^1(u) = \left(1-u^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}P_n(u)}{\mathrm{d}u}$$

令 $u = \cos\theta$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta) = \left[\frac{\mathrm{d}P_n(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right]_{u=\cos\theta} = -\sin\theta\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta) = (-1)\,P_n^1(\cos\theta)$$

入射波电场的 r 分量改写为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{i}r} &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\mathrm{i}\,(kr)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)\hat{J}_n(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta) \\ &= \frac{-\mathrm{i}E_0\cos\varphi}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)\hat{J}_n(kr)P_n^1(\cos\theta) \end{aligned} \tag{8-34}$$

注意, 式 (8-34) 中求和从 $n=1$ 开始, 因为 $P_0^1(\cos\theta) = 0$.

由于球 Bessel 函数 $j_n(kr)$ 满足式 (8-20) 第三式, 即

$$r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[rj_n(kr)] + \left[(kr)^2 - n\,(n+1)\right]j_n(kr) = 0$$

又球面 Bessel 函数为 $\hat{J}_n(kr) = krj_n(kr)$, 代入上式可得 $\hat{J}_n(kr)$ 满足方程,

$$\frac{r}{k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\hat{J}_n + (kr)\,\hat{J}_n - \frac{n\,(n+1)}{kr}\hat{J}_n = 0$$

即

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\hat{J}_n + k^2\hat{J}_n\right] = \frac{n\,(n+1)}{r^2}\hat{J}_n \tag{8-35}$$

将式 (8-34) 代入式 (8-17) 中 $E_{\mathrm{i}r}$ 的 Debye 势函数表示式得

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{i}r} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\pi_{\mathrm{ie}}\right) + k^2\left(r\pi_{\mathrm{ie}}\right)\right] \\
&= \frac{-\mathrm{i}E_0\cos\varphi}{(kr)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)\hat{J}_n(kr)P_n^1(\cos\theta)
\end{aligned}
\tag{8-36}
$$

设式 (8-36) 中电 Debye 势函数具有如下展开形式:

$$
\pi_{\mathrm{ie}} = -\frac{E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n(kr)P_n^1(\cos\theta) \tag{8-37}
$$

代入式 (8-36) 并利用式 (8-35) 可得系数,

$$
w_n = \frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{8-38}
$$

同样, 由式 (8-17) 可得入射波 $H_{\mathrm{i}r}$ 所对应的磁 Debye 势函数为

$$
\pi_{\mathrm{i}m} = \frac{E_0\sin\varphi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n(kr)P_n^1(\cos\theta) \tag{8-39}
$$

式中, 系数 w_n 仍如式 (8-38) 所示. 以上式 (8-37)~ 式 (8-39) 就是入射平面波的 Debye 势函数.

将以上平面波的电和磁 Debye 势函数代入式 (8-17) 可得入射平面波在球坐标系的其他分量, 其中求偏导数的运算为

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial\pi_{\mathrm{ie}}}{\partial\varphi} &= \frac{E_0\sin\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n(kr)P_n^1(\cos\theta) \\
\frac{\partial\pi_{\mathrm{ie}}}{\partial\theta} &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n(kr)\frac{\mathrm{d}P_n^1(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n(kr)\left.\frac{\mathrm{d}P_n^1(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) \\
\frac{\partial\left(r\pi_{\mathrm{ie}}\right)}{\partial r} &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\frac{\mathrm{d}\hat{J}_n(kr)}{\mathrm{d}r}P_n^1(\cos\theta) \\
&= \frac{-kE_0\cos\varphi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}w_n\hat{J}_n'(kr)P_n^1(\cos\theta)
\end{aligned}
\right\}
\tag{8-40}
$$

式 (8-40) 代入式 (8-17) 可得

$$\left.\begin{aligned}
E_{\mathrm{i}\theta} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{ie}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{im}}}{\partial\varphi} \\
&= \frac{E_0\cos\varphi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left[\mathrm{i}\hat{J}_n'(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + \hat{J}_n(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right] \\
E_{\mathrm{i}\varphi} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{ie}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{im}}}{\partial\theta} \\
&= \frac{E_0\sin\varphi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left[\mathrm{i}\hat{J}_n'(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + \hat{J}_n(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right] \\
H_{\mathrm{i}\theta} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{im}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{ie}}}{\partial\varphi} \\
&= \frac{E_0\sin\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left[\hat{J}_n(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + \mathrm{i}\hat{J}_n'(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right] \\
H_{\mathrm{i}\varphi} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{im}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{ie}}}{\partial\varphi} \\
&= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left[\hat{J}_n(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + \mathrm{i}\hat{J}_n'(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{8-41}$$

8.3.2 理想导体球的 Mie 级数解

设球外散射场的 Debye 势函数为

$$\left.\begin{aligned}
\pi_{\mathrm{se}} &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)P_n^1(\cos\theta) \\
\pi_{\mathrm{sm}} &= \frac{E_0\sin\varphi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)P_n^1(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{8-42}$$

式中, $\hat{H}_n^{(1)}(kr) = krh_n^{(1)}(kr)$, 系数 a_n 和 b_n 为待定. 因为球外包含 $r\to\infty$ 的无限远处, 所以用球面 Bessel 函数取 $\hat{H}_n^{(1)}(kr)$ 代替 $\hat{J}_n(kr)$. 将式 (8-42) 代入式 (8-17) 可得球外散射场用 Debye 势函数的表示式为

$$\left.\begin{aligned}
E_{\mathrm{sr}} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{se}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{se}})\right] \\
E_{\mathrm{s}\theta} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{se}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{sm}}}{\partial\varphi} \\
E_{\mathrm{s}\varphi} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{se}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{sm}}}{\partial\theta} \\
H_{\mathrm{sr}} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{sm}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{sm}})\right] \\
H_{\mathrm{s}\theta} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{sm}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{se}}}{\partial\varphi} \\
H_{\mathrm{s}\varphi} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{sm}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{se}}}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{8-43}$$

对于 $E_{\mathrm{sr}}, H_{\mathrm{sr}}$ 分量, 注意到 (8-35) 对于球面 Hankel 函数也成立, 根据式 (8-42)、式 (8-35) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{se}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{se}}) &= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)\hat{H}_n^{(1)}(kr)\right]P_n^1(\cos\theta) \\
&= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{n(n+1)}{r^2}\hat{H}_n^{(1)}(kr)\right]P_n^1(\cos\theta)
\end{aligned} \tag{8-44}$$

代入式 (8-43) 第一式得到

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{sr}} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{se}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{se}})\right] \\
&= \frac{-\mathrm{i}E_0\cos\varphi}{\omega^2\mu\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{n(n+1)}{r^2}\hat{H}_n^{(1)}(kr)\right]P_n^1(\cos\theta) \\
&= \frac{-\mathrm{i}E_0\cos\varphi}{(kr)^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[n(n+1)\hat{H}_n^{(1)}(kr)\right]P_n^1(\cos\theta)
\end{aligned} \tag{8-45}$$

同样, 式 (8-43) 第四式也可写为

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{sr}} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\pi_{\mathrm{sm}}) + k^2(r\pi_{\mathrm{sm}})\right] \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{E_0\sin\varphi}{k}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)\hat{H}_n^{(1)}(kr)\right\}P_n^1(\cos\theta) \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{E_0\sin\varphi}{k}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left\{\left[\frac{n(n+1)}{r^2}\right]\hat{H}_n^{(1)}(kr)\right\}P_n^1(\cos\theta)
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}E_0 \sin\varphi}{(kr)^2\eta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n [n(n+1)\hat{H}_n^{(1)}(kr)] P_n^1(\cos\theta) \tag{8-46}$$

和平面波场分量表示式 (8-41) 类似, 球外散射场 (8-43) 式的其余分量可写为

$$\left.\begin{aligned}
E_{\mathrm{s}\theta} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{se}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{sm}}}{\partial\varphi}\\
&= \frac{E_0\cos\varphi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}a_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + b_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\\
E_{\mathrm{s}\varphi} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{se}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{sm}}}{\partial\theta}\\
&= \frac{E_0\sin\varphi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}a_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + b_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right]\\
H_{\mathrm{s}\theta} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\pi_{\mathrm{sm}}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\mathrm{se}}}{\partial\varphi}\\
&= \frac{E_0\sin\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + \mathrm{i}b_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right]\\
H_{\mathrm{s}\varphi} &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(r\pi_{\mathrm{sm}}) - \frac{\partial\pi_{\mathrm{se}}}{\partial\theta}\\
&= \frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + \mathrm{i}b_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(kr)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{8-47}$$

理想导体球的球内场为零, 球外入射波和散射场之和满足理想导体边界条件,

$$\left.\begin{aligned}
(E_{\mathrm{i}\theta} + E_{\mathrm{s}\theta})|_{r=a} = 0\\
(E_{\mathrm{i}\varphi} + E_{\mathrm{s}\varphi})|_{r=a} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{8-48}$$

式 (8-41) 和式 (8-47) 代入式 (8-48) 得到

$$\left.\begin{aligned}
&w_n\left[\mathrm{i}\hat{J}_n'(ka)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + \hat{J}_n(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\\
&+\mathrm{i}a_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + b_n\hat{H}_n^{(1)}(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} = 0\\
&w_n\left[\mathrm{i}\hat{J}_n'(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + \hat{J}_n(ka)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right]\\
&+\mathrm{i}a_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + b_n\hat{H}_n^{(1)}(ka)\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{8-49}$$

式 (8-49) 对任何 θ 均成立, 令式 (8-49) 中 $P_n^1(\cos\theta)$ 和 $P_n^{1\prime}(\cos\theta)$ 的系数分别相等得到

$$\left.\begin{aligned}&a_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)+w_n\hat{J}_n'(ka)=0,\quad a_n=-\frac{\hat{J}_n'(ka)}{\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)}w_n\\&b_n\hat{H}_n^{(1)}(ka)+w_n\hat{J}_n(ka)=0,\quad b_n=-\frac{\hat{J}_n(ka)}{\hat{H}_n^{(1)}(ka)}w_n\end{aligned}\right\}\tag{8-50}$$

实际计算中式 (8-47) 的 Mie 级数求和通常取有限项. 对于导体球, Ruck 等 (1970) 给出求和所需项数的经验曲线. 在 ka=10 时约需 20 项; ka=150 时约 180 项; 其间所需项数约按线性关系增加.

8.3.3 介质球散射的 Mie 级数解

设球外场和球内总场分别记为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{\rm i}+\boldsymbol{E}_{\rm s},\quad r>a\\&\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_t,\quad r<a\end{aligned}\right\}\tag{8-51}$$

式中, $\boldsymbol{E}_{\rm i}$ 为入射波, $\boldsymbol{E}_{\rm s}$ 为球外散射场.

设球内总场 $\boldsymbol{E}_{\rm t}$ 的 Debye 势为

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{\rm te}=\frac{-E_0\cos\varphi}{\omega\mu_{\rm s}r}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\hat{J}_n(k_{\rm s}r)P_n^1(\cos\theta)\\&\pi_{\rm tm}=\frac{E_0\sin\varphi}{k_{\rm s}r}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\hat{J}_n(k_{\rm s}r)P_n^1(\cos\theta)\end{aligned}\right\}\tag{8-52}$$

式中, 系数 c_n 和 d_n 为待定. 式 (8-52) 和式 (8-42) 形式一样, 将式 (8-52) 代入式 (8-17) 可得到球内总场的表示式; 其形式和式 (8-45)～ 式 (8-47) 一样, 只是用 c_n, d_n 代替 a_n, b_n, 用球内介质参数 $\mu_{\rm s}, k_{\rm s}$ 代替球外参数 μ, k.

下面根据边界条件介质球面 $r=a$ 处 $E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$ 为连续来确定待定系数 a_n, b_n, c_n 和 d_n. 边界条件为

$$\left.\begin{aligned}E_{{\rm t}\theta}|_{r=a}&=(E_{{\rm i}\theta}+E_{{\rm s}\theta})|_{r=a}\\E_{{\rm t}\varphi}|_{r=a}&=(E_{{\rm i}\varphi}+E_{{\rm s}\varphi})|_{r=a}\\H_{{\rm t}\theta}|_{r=a}&=(H_{{\rm i}\theta}+H_{{\rm s}\theta})|_{r=a}\\H_{{\rm t}\varphi}|_{r=a}&=(H_{{\rm i}\varphi}+H_{{\rm s}\varphi})|_{r=a}\end{aligned}\right\}\tag{8-53}$$

将入射波、球外散射场和球内总场代入式 (8-53) 第一式可得

$$\frac{{\rm i}E_0\sin\theta\cos\varphi}{\omega^2\mu_{\rm s}\varepsilon_{\rm s}}k_{\rm s}c_n\hat{J}_n'(k_{\rm s}a)P_n^{1\prime}(\cos\theta)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{E_0\cos\varphi}{k_{\rm s}a}d_n\hat{J}_n(k_{\rm s}a)P_n^1(\cos\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\mathrm{i}E_0\sin\theta\cos\varphi}{\omega^2\mu\varepsilon}\left[kw_n\hat{J}_n'(ka)P_n^{1\prime}(\cos\theta)+ka_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right]\\
&\quad+\frac{1}{\sin\theta}\frac{E_0\cos\varphi}{ka}\left[w_n\hat{J}_n(ka)P_n^{1}(\cos\theta)+b_n\hat{H}_n^{(1)}(ka)P_n^{1}(\cos\theta)\right]
\end{aligned}
$$

由于对 n 求和的各项为相互正交, 所以上式已除去求和号. 又由于上式对任何 θ 均成立, 令上式中 $P_n^1(\cos\theta)$ 和 $P_n^{1\prime}(\cos\theta)$ 的系数相等分别导致以下两个等式:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_{\mathrm{s}}\varepsilon_{\mathrm{s}}}k_{\mathrm{s}}c_n\hat{J}_n'(k_{\mathrm{s}}a)=\frac{1}{\mu\varepsilon}\left[kw_n\hat{J}_n'(ka)+ka_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\right]\\
&\frac{1}{k_{\mathrm{s}}}d_n\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)=\frac{1}{k}\left[w_n\hat{J}_n(ka)+b_n\hat{H}_n^{(1)}(ka)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{8-54}
$$

同样, 由式 (8-53) 第三式可得另外二等式,

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_{\mathrm{s}}k_{\mathrm{s}}}k_{\mathrm{s}}d_n\hat{J}_n'(k_{\mathrm{s}}a)=\frac{1}{\mu k}\left[kw_n\hat{J}_n'(ka)+kb_n\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\right]\\
&\frac{1}{\mu_{\mathrm{s}}}c_n\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)=\frac{1}{\mu}\left[w_n\hat{J}_n(ka)+a_n\hat{H}_n^{(1)}(ka)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{8-55}
$$

联立式 (8-54) 和式 (8-55) 求解, 可得式 (8-42) 和式 (8-52) 中的待定系数为

$$
\left.\begin{aligned}
a_n&=\frac{-\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{J}'_n(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)+\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{J}_n(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}_n'(k_{\mathrm{s}}a)}w_n\\
b_n&=\frac{-\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{J}_n(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)+\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{J}'_n(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}_n'(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)}w_n\\
c_n&=\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}_n'(k_{\mathrm{s}}a)}w_n\\
d_n&=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}_n'(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)}w_n
\end{aligned}\right\}\tag{8-56}
$$

由边界条件式 (8-53) 第二、四式也得到和以上相同结果. 式 (8-56) 代入式 (8-42)、式 (8-52), 进而由式 (8-17) 可得球内外的场分布. 以上级数解称为 Mie 级数解, 是由 Mie(1908) 得出.

理想导体球的解式 (8-50) 也可以由介质球的结果式 (8-56) 在数学上令 $\mu_{\mathrm{s}}=0$, $\varepsilon_{\mathrm{s}}\to\infty$ 而得到. 此外, 作为理想导体球的对偶, 也可讨论理想磁导体球的散射, 只需要由介质球的结果在数学上令 $\mu_{\mathrm{s}}\to\infty,\quad\varepsilon_{\mathrm{s}}=0$ 而得到.

8.3.4 小球情形

考虑介质小球情形, 即 $ka\ll 1$, $k_{\mathrm{s}}a\ll 1$. 这时 Mie 级数中 n=1 项为主要贡献,

相应球面 Bessel 函数近似为

$$\hat{J}_1(\xi) \simeq \frac{\xi^2}{3}, \quad \hat{J}_1'(\xi) \simeq \frac{2\xi}{3}$$
$$\hat{H}_1^{(1)}(\xi) \simeq \frac{-\mathrm{i}}{\xi}, \quad \hat{H}_1^{(1)\prime}(\xi) \simeq \frac{\mathrm{i}}{\xi^2}$$

以及式 (8-38) 中 $w_1 = (-\mathrm{i})^{-1} 3/2 = \mathrm{i}3/2$. 将 $k_\mathrm{s} = \omega\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}, k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 代入式 (8-56) 得

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\hat{J}'_1(ka)\hat{J}_1(k_\mathrm{s}a) + \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\hat{J}_1(ka)\hat{J}'_1(k_\mathrm{s}a)}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\hat{H}_1^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_1(k_\mathrm{s}a) - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\hat{H}_1^{(1)}(ka)\hat{J}_1'(k_\mathrm{s}a)} w_1 \\
&= \frac{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{2(ka)}{3}\dfrac{(k_\mathrm{s}a)^2}{3} + \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{(ka)^2}{3}\dfrac{2(k_\mathrm{s}a)}{3}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{\mathrm{i}}{(ka)^2}\dfrac{(k_\mathrm{s}a)^2}{3} - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{(-\mathrm{i})}{ka}\dfrac{2(k_\mathrm{s}a)}{3}} \left(\mathrm{i}\frac{3}{2}\right) \\
&= (ka)^3 \frac{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\cdot\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}/(\varepsilon\mu) + \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}/\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\cdot\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}/(\varepsilon\mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}/\sqrt{\varepsilon\mu}} \\
&= -(ka)^3 \frac{\varepsilon_\mathrm{s} - \varepsilon}{\varepsilon_\mathrm{s} + 2\varepsilon} \\
b_1 &= \frac{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\hat{J}_1(ka)\hat{J}'_1(k_\mathrm{s}a) + \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\hat{J}'_1(ka)\hat{J}_1(k_\mathrm{s}a)}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\hat{H}_1^{(1)}(ka)\hat{J}_1'(k_\mathrm{s}a) - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\hat{H}_1^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_1(k_\mathrm{s}a)} w_1 \\
&= \frac{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{(ka)^2}{3}\dfrac{2(k_\mathrm{s}a)}{3} + \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{2(ka)}{3}\dfrac{(k_\mathrm{s}a)^2}{3}}{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{2\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}}{3\sqrt{\varepsilon\mu}} - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}{3\varepsilon\mu}} \left(\mathrm{i}\frac{3}{2}\right) \\
&= -(ka)^3 \frac{\mu_\mathrm{s} - \mu}{\mu_\mathrm{s} + 2\mu} \\
c_1 &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\hat{H}_1^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_1(k_\mathrm{s}a) - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\hat{H}_1^{(1)}(ka)\hat{J}_1'(k_\mathrm{s}a)} w_1 \\
&= \frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{\mathrm{i}}{(ka)^2}\dfrac{(k_\mathrm{s}a)^2}{3} - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{(-\mathrm{i})}{ka}\dfrac{2(k_\mathrm{s}a)}{3}} \left(\mathrm{i}\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}{3\varepsilon\mu} + \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{2\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}}{3\sqrt{\varepsilon\mu}}} \left(\mathrm{i}\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{-9\mu}{2\mathrm{i}\mu_\mathrm{s}} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon_\mathrm{s} + 2\varepsilon)} \\
d_1 &= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\hat{H}_1^{(1)}(ka)\hat{J}_1'(k_\mathrm{s}a) - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\hat{H}_1^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_1(k_\mathrm{s}a)} w_1
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}}{-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu}\dfrac{2\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}}{3\sqrt{\varepsilon\mu}} - \sqrt{\varepsilon\mu_\mathrm{s}}\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}{3\varepsilon\mu}}\left(\mathrm{i}\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{-9\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}}\frac{\mu}{(\mu_\mathrm{s}+2\mu)}$$

所以对于介质小球, 球外场的系数为

$$a_1 \simeq -(ka)^3\frac{\varepsilon_\mathrm{s}-\varepsilon}{\varepsilon_\mathrm{s}+2\varepsilon}, \quad b_1 \simeq -(ka)^3\frac{\mu_\mathrm{s}-\mu}{\mu_\mathrm{s}+2\mu} \tag{8-57}$$

球内场的系数为

$$c_1 = -\frac{9\mu}{2\mathrm{i}\mu_\mathrm{s}}\frac{\varepsilon}{(\varepsilon_\mathrm{s}+2\varepsilon)}, \quad d_1 = -\frac{9\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{s}\mu_\mathrm{s}}}\frac{\mu}{(\mu_\mathrm{s}+2\mu)} \tag{8-58}$$

对于导体小球, 式 (8-57) 中取极限 $\mu_\mathrm{s}=0, \varepsilon_\mathrm{s}\to\infty$ 可得

$$a_1 \simeq -(ka)^3, \quad b_1 \simeq \frac{(ka)^3}{2} \tag{8-59}$$

式 (8-59) 也可以由式 (8-50) 得到.

8.4　球的散射截面

8.4.1　散射截面定义

对于远区散射场, 散射截面 (或雷达散射截面, RCS) 定义为

$$\sigma = \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{E}_\mathrm{s}|^2}{|\boldsymbol{E}_\mathrm{i}|^2}\right)\mathrm{sm}$$

$$\sigma\,(\mathrm{dBsm}) = 10\lg\left[\lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{E}_\mathrm{s}|^2}{|\boldsymbol{E}_\mathrm{i}|^2}\right)\right]\mathrm{dBsm} \tag{8-60}$$

式中, 后一等式是 RCS 的分贝定义. 散射截面单位为平方米或分贝　平方米. 如果所观察的散射方向 $\boldsymbol{k}_\mathrm{s}$ 和入射波方向 $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ 刚好相反, 即 $\boldsymbol{k}_\mathrm{s}=-\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$, 称为后向 (或单站, monostatic) 散射, 相应散射截面称为单站 RCS; 其他方向散射称为双站 (bistatic) 散射, 相应散射截面称为双站 RCS.

由于能流密度正比于 $|\boldsymbol{E}|^2$, 所以散射截面 (8-60) 的物理意义也可以表述为

$$\sigma = \frac{4\pi r^2\,(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{S})}{S_\mathrm{inc}} = \frac{\text{散射功率}}{\text{入射波能流密度}}$$

式中, 散射功率等于球面上散射方向的能流密度和球面积的乘积. 当电磁波入射到物体上, 物体散射的能量为 σS_inc. 在距离物体 r 处接收到的能流密度为 $S_r =$

$\sigma S_{\rm inc}/\left(4\pi r^2\right)$. 散射截面 σ 的量纲为面积, 相当于截取入射波能流转换为散射波的有效面积. 物体散射截面通常和以下几个因素有关：目标几何形状与大小, 入射波频率, 入射方向和散射接收方向以及电磁波极化方式.

在如图 8-4 所示球坐标系中, 入射波和散射波的极化可区分为 θ 极化和 ϕ 极化 (线极化). 所以散射截面又可以按照极化区分为 $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi\theta}$, 其含义如表 8-1 所示. 散射截面计算中, 如果不特别指明极化状态, 通常散射波幅值平方等于 θ 和 φ 分量幅值的平方和, 即 $|\boldsymbol{E}_{\rm s}|^2 = |E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2$. 另外, 入射波和散射波的极化也可区分为左旋圆极化和右旋圆极化.

表 8-1　同极化和交叉极化散射截面

散射截面	同极化		交叉极化	
	$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{\varphi\varphi}$	$\sigma_{\theta\varphi}$	$\sigma_{\varphi\theta}$
散射波极化状态	θ 极化	φ 极化	θ 极化	φ 极化
入射波极化状态	θ 极化	φ 极化	φ 极化	θ 极化

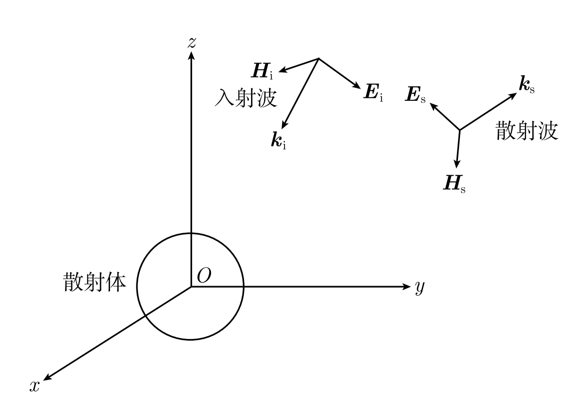


图 8-4　球坐标系中的入射波和散射波

8.4.2　球的远区场和散射截面

在以下球散射算例中设球心在坐标原点, 线极化平面波沿 z 方向入射, 即入射方向 $\theta_{\rm i} = 0$, 见式 (8-32) 和图 8-3.

注意式 (8-47) 适用于导体球和介质球, 只是系数公式不同. 对于远区散射场, 式 (8-47) 中球 Bessel 函数可用大宗量近似, 当 $\xi \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
j_n(\xi) &\simeq \frac{1}{\xi}\cos\left(\xi - \frac{n+1}{2}\pi\right) \\
n_n(\xi) &\simeq \frac{1}{\xi}\sin\left(\xi - \frac{n+1}{2}\pi\right)
\end{aligned}
$$

$$h_n^{(1)}(\xi) = j_n(\xi) + \mathrm{i}n_n(\xi) \simeq \frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(\xi - \frac{n+1}{2}\pi\right)\right]}{\xi}$$

所以

$$\hat{H}_n^{(1)}(kr) = krh_n^{(1)}(kr) \simeq \exp\left[\mathrm{i}\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)\right] = (-\mathrm{i})^{n+1}\exp(\mathrm{i}kr)$$
$$\hat{H}_n^{(1)\prime}(kr) \simeq (-\mathrm{i})^n \exp(\mathrm{i}kr)$$

球外远区散射场只保留 $1/r$ 项, 由式 (8-45)、式 (8-46) 可见 $E_{\mathrm{sr}} \approx 0, H_{\mathrm{sr}} \approx 0$; 由式 (8-47) 得远区电场为

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{s}\theta} &= \frac{-\mathrm{i}E_0\cos\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\left[a_n\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) - b_n\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right] \\ E_{\mathrm{s}\varphi} &= \frac{-\mathrm{i}E_0\sin\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\left[a_n\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} - b_n\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right] \end{aligned}\right\} \tag{8-61}$$

由于远区场具有平面波特性, 磁场分量不再写出. 对于介质球和导体球, 上式中系数 a_n, b_n 分别由式 (8-56) 和式 (8-50) 计算. 以上设入射波沿 z 方向, 所以式 (8-61) 中散射波方向 $\theta = \pi$ 对应于后向散射; 而 $\theta = 0$ 对应于前向散射. 式 (8-61) 代入式 (8-60), 注意其中 $|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|^2 = |E_0|^2, |\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}|^2 = |E_{\mathrm{s}\theta}|^2 + |E_{\mathrm{s}\varphi}|^2$, 可得双站散射截面,

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|^2}\right)\mathrm{sm} \\ &= \frac{\lambda^2}{\pi}\left[|A_{\mathrm{c}}|^2\cos^2\varphi + |A_{\mathrm{s}}|^2\sin^2\varphi\right] \end{aligned} \tag{8-62}$$

式中, λ 为导体球或介质球外部自由空间中波长, 以及

$$\left.\begin{aligned} |A_{\mathrm{c}}|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\left[a_n\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) - b_n\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\right|^2 \\ |A_{\mathrm{s}}|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\left[a_n\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} - b_n\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right]\right|^2 \end{aligned}\right\} \tag{8-63}$$

式中, 系数 a_n, b_n 对于介质球用式 (8-56), 导体球用式 (8-50).

后向散射情形, $\theta = \pi$. 式 (8-64) 中 $P_n^1(\cos\theta) \to 0$ 和 $P_n^{1\prime}(\cos\theta) \to \infty$. 但是可以证明以下等式 (张善杰, 2009：453)：

$$\left.\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right|_{\theta=\pi} = \left.\sin\theta P_n^{1'}(\cos\theta)\right|_{\theta=\pi} = (-1)^n\frac{1}{2}n(n+1)$$

上式代入式 (8-63) 得后向散射时的系数,

$$|A_c|^2=|A_s|^2=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n(-1)^n\frac{1}{2}n(n+1)(a_n-b_n)\right|^2=|A|^2$$

代入式 (8-62) 得到后向散射截面为

$$\begin{aligned}\sigma&=\frac{\lambda^2}{\pi}\left[|A_c|^2\cos^2\varphi+|A_s|^2\sin^2\varphi\right]=\frac{\lambda^2}{\pi}|A|^2\\&=\frac{\lambda^2}{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n(-1)^n\frac{1}{2}n(n+1)(a_n-b_n)\right|^2\end{aligned}\tag{8-64}$$

对于理想导体球, 式 (8-64) 中

$$\begin{aligned}a_n-b_n&=-\frac{\hat{J}_n'(ka)}{\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)}w_n+\frac{\hat{J}_n(ka)}{\hat{H}_n^{(1)}(ka)}w_n\\&=\left[\frac{\hat{J}_n(ka)\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)-\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}_n'(ka)}{\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)}\right]\frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\end{aligned}$$

上式中 Bessel 函数和 Hankel 函数满足以下关系式 (Wronski 行列式):

$$\hat{J}_n(ka)\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)-\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}_n'(ka)=\mathrm{i}$$

代入前式后得

$$a_n-b_n=\left[\frac{\mathrm{i}}{\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)}\right]\frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}$$

最后代入式 (8-64) 得理想导体球的后向 RCS 为

$$\sigma|_{\text{monostatic}}=\frac{\lambda^2}{\pi}|A|^2=\frac{\lambda^2}{4\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)}{\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)}\right|^2\tag{8-65}$$

8.4.3 小球的散射截面：Rayleigh 散射

对于理想导体小球的远区散射场, 由式 (8-59) 有 $a_1\simeq-(ka)^3, b_1\simeq(ka)^3/2$, 代入式 (8-61) 只取 $n=1$ 的一项得 (Harrington, 1964: 319)

$$\left.\begin{aligned}E_{\mathrm{s}\theta}&=\frac{\mathrm{i}E_0\cos\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(-\mathrm{i})\left[a_1\sin\theta P_1^{1\prime}(\cos\theta)-b_1\frac{P_1^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\\&=\frac{E_0\cos\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left[-\sin\theta P_1^{1\prime}(\cos\theta)-\frac{1}{2}\frac{P_1^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\\E_{\mathrm{s}\varphi}&=\frac{\mathrm{i}E_0\sin\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(-\mathrm{i})\left[a_1\frac{P_1^1(\cos\theta)}{\sin\theta}-b_1\sin\theta P_1^{1\prime}(\cos\theta)\right]\\&=\frac{E_0\sin\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left[-\frac{P_1^1(\cos\theta)}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\sin\theta P_1^{1\prime}(\cos\theta)\right]\end{aligned}\right\}$$

根据 Legendre 函数公式,

$$P_1^1(\cos\theta)=\sin\theta,\quad P_1^1(u)=\sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_1^1(u)}{\mathrm{d}u}=\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}},\quad P_1^{1\prime}(\cos\theta)=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

上式代入前式得

$$\left.\begin{aligned}E_{\mathrm{s}\theta}&=\frac{E_0\cos\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left[-\sin\theta P_1^{1\prime}(\cos\theta)-\frac{1}{2}\frac{P_1^1\cos\theta}{\sin\theta}\right]\\&=\frac{E_0\cos\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left[-\sin\theta\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right]\\&=\frac{E_0\cos\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\\E_{\mathrm{s}\varphi}&=\frac{E_0\sin\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left[-\frac{P_1^1(\cos\theta)}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\sin\theta P_1^{1\prime}(\cos\theta)\right]\\&=\frac{E_0\sin\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left[-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\sin\theta\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}\right]\\&=\frac{E_0\sin\varphi\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\left(\frac{1}{2}\cos\theta-1\right)\end{aligned}\right\}\tag{8-66}$$

为了说明物理意义, 将式 (8-66) 改写为 $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}=\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^{\text{e-dipole}}+\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^{\text{m-dipole}}$, 其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^{\text{e-dipole}}&=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right)\frac{E_0\exp(\mathrm{i}kr)}{kr}(ka)^3\\&=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right)\frac{4\pi E_0(ka)^3}{k}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\\\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^{\text{m-dipole}}&=\left(-\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\sin\varphi\right)\frac{E_0\exp(\mathrm{i}kr)}{2kr}(ka)^3\\&=\left(-\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\sin\varphi\right)\frac{2\pi E_0(ka)^3}{k}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\end{aligned}\right\}\tag{8-67}$$

回顾 6.5 节电偶极子和磁偶极子远区场结果, 沿 x 轴电偶极子的辐射场为

$$\boldsymbol{E}=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right)\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}$$

沿 y 轴磁偶极子的辐射场为

$$\boldsymbol{E}=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta\sin\varphi\right)\mathrm{i}kI_\mathrm{m}l\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}$$

比较可见, 式 (8-67) 中 $\boldsymbol{E}_{\rm s}^{\rm e\text{-}dipole}$ 对应于沿 x 方向电偶极子的辐射场, 且

$$\mathrm{i}\omega\mu Il=\frac{4\pi E_0(ka)^3}{k},\quad Il=\frac{4\pi E_0(ka)^3}{\mathrm{i}\omega\mu k}=-\mathrm{i}E_0\frac{4\pi(ka)^3}{\eta k}$$

以及式 (8-67) 中 $\boldsymbol{E}_{\rm s}^{\rm m\text{-}dipole}$ 对应于沿 y 方向磁偶极子的辐射场, 且

$$\mathrm{i}kI_{\rm m}l=-\frac{2\pi E_0(ka)^3}{k},\quad I_{\rm m}l=-\frac{2\pi E_0(ka)^3}{\mathrm{i}k^2}=\mathrm{i}E_0\frac{2\pi(ka)^3}{k^2}$$

当球的半径远小于波长时, 可以用准静态近似来看待处于入射波电磁场中的小球. 一方面, 导体球处于准静均匀电场中产生电荷, 其电偶极矩平行于 x 轴; 另一方面, 导体球处于缓变均匀磁场中感应出涡旋电流, 其磁偶极矩平行于 y 轴, 如图 8-5 所示. 一般而言, 当物体尺寸远小于波长时, 可以采用准静态场方法求得其电偶极矩和磁偶极矩, 再由此分析其散射.

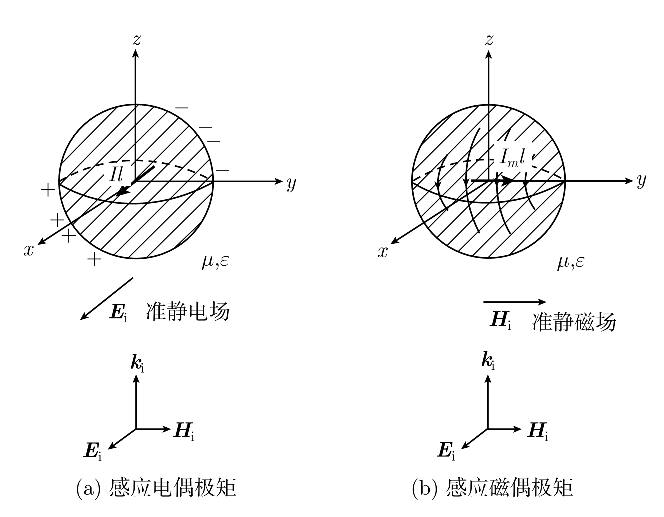


图 8-5　准静态近似

由式 (8-66) 可得理想导体小球的散射截面为

$$\begin{aligned}\sigma&=\lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{E}_{\rm s}|^2}{|\boldsymbol{E}_{\rm i}|^2}\right)\\&=\lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|E_{{\rm s}\theta}|^2+|E_{{\rm s}\varphi}|^2}{|E_0|^2}\right)\\&=(ka)^6\frac{4\pi}{k^2}\left\{\left[\cos^2\varphi\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right]+\left[\sin^2\varphi\left(\frac{1}{2}\cos\theta-1\right)^2\right]\right\}\end{aligned}\tag{8-68}$$

或归一化散射截面为

$$\frac{\sigma}{\pi a^2} = 4(ka)^4 \left\{ \left[\cos^2\varphi \left(\cos\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \left[\sin^2\varphi \left(\frac{1}{2}\cos\theta - 1 \right)^2 \right] \right\}$$

当 $\theta = \pi$ 对应于后向散射; 而 $\theta = 0$ 对应于前向散射, 分别为

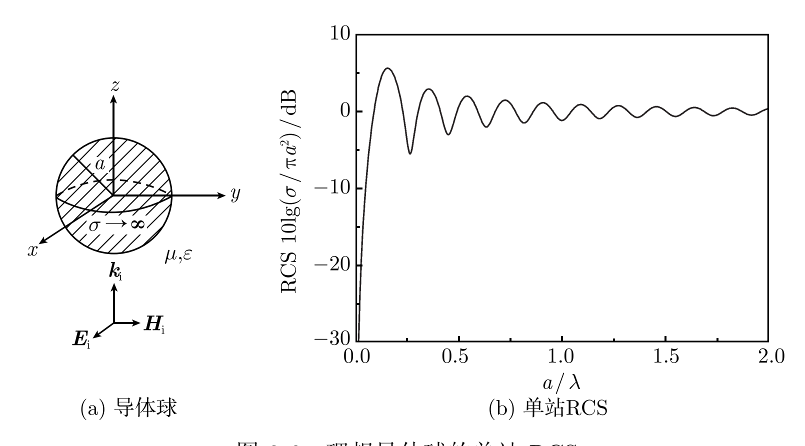
$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\sigma}{\pi a^2}\right|_{\text{backword}} &= 4(ka)^4 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9(ka)^4 \\ \left.\frac{\sigma}{\pi a^2}\right|_{\text{forword}} &= 4(ka)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (ka)^4 \end{aligned}\right\} \tag{8-69}$$

以上结果当 $a/\lambda < 0.1$, 或 $ka < 0.4$ 时和 Mie 级数解一致.

从式 (8-68)、式 (8-69) 可见, 小球的散射截面正比于 k^4a^6, 即和入射波长 λ^4 成反比, 和小球体积 $4\pi a^3/3$ 的平方成正比. 对于小介质球的分析也有类似结论, 见 Harrington (1964: 321). 在球散射的 Mie 理论 (1908) 以前, Rayleigh(1871) 提出, 当物体尺寸小于波长时, 散射强度和波长的四次方成反比, 与物体体积的平方成正比. 这一规律称为 Rayleigh 散射定律. Rayleigh 用这一原理解释了天空所呈现的颜色. 大气中的分子尺寸远小于光波波长, 散射主要影响太阳光中波长较短的光. 太阳光中蓝色波长较短, 易于被散射, 所以地面上看到的天空呈现蓝色. 虽然紫色波长更短, 但由于大气的吸收使得它不易到达地面. 直射的太阳光在到达地面的过程中, 由于散射使它失去许多蓝色, 因而呈现出灿烂的黄色.

8.4.4 理想导体球的散射截面

算例. 理想导体球, 设球半径 $a = 0.5\lambda_0$, 入射波沿 z 轴入射, 电场 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 方向极化. 由式 (8-65) 得到理想导体球后向单站 RCS 随 a/λ 的变化如图 8-6 所示,RCS 用球的截面 πa^2 归一后取分贝数. 可见, 导体球的后向散射可分为三个区域：① $a/\lambda < 0.1$ (或者采用 $ka < 0.4$) 为 Rayleigh 区, RCS 随频率增高 (a/λ 增大) 迅



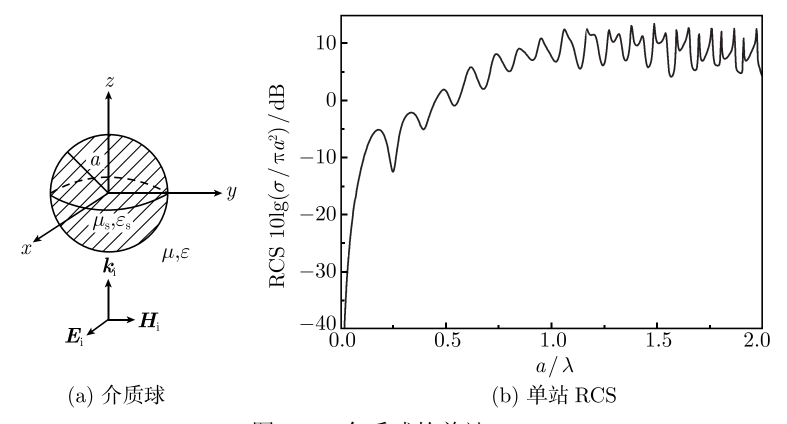
(a) 导体球 (b) 单站RCS

图 8-6 理想导体球的单站 RCS

速增加; ② $0.1 \leqslant a/\lambda \leqslant 2.0$ (或者采用 $0.4 < ka < 20$) 为谐振区, 随频率增高 (a/λ 增大)RCS 振荡变化; ③ $a/\lambda > 2.0$ (或者采用 $ka > 20$) 为光学区 (高频区), 随着频率增高 (a/λ 增大)RCS 逐渐趋于球的几何截面 πa^2 (图中为 0dB). 由于有准确的 Mie 级数解, 导体球通常用作标准目标来校准散射实验测试装置. 导体球的双站散射结果可见张善杰 (2009).

8.4.5　介质球的散射截面

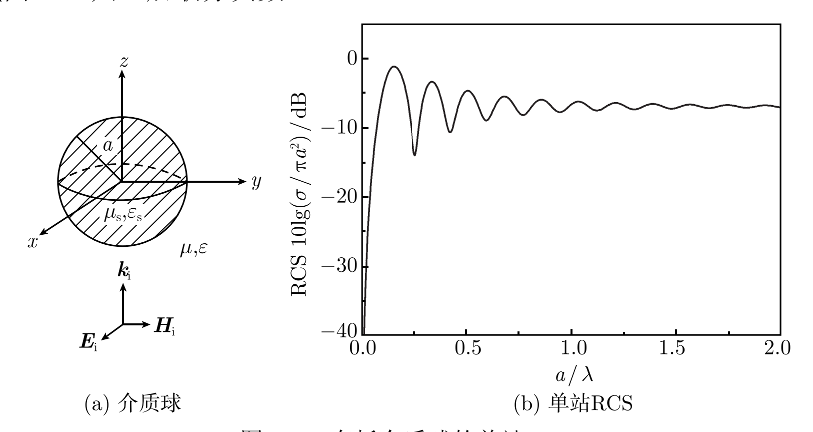
算例. 无耗介质球, 设球半径 $a = 0.5\lambda, \lambda = 0.01\text{m}$ (真空中波长), 介质参数为 $\varepsilon_r = 2.56, \mu_r = 1$ (无耗). 无耗介质球的单站 RCS 如图 8-7 所示, 图中 RCS 用球的几何截面 πa^2 归一后取分贝数.



(a) 介质球　　(b) 单站 RCS

图 8-7　介质球的单站 RCS

算例. 有耗介质球, 设球半径 $a = 0.5\lambda, \lambda = 0.01\text{m}$ (真空中波长), 有耗介质参数为 $\varepsilon_r = (3.0 + \text{i}4.0), \mu_r = 1$. 有耗介质球的单站 RCS 如图 8-8 所示, 图中用球的几何截面 πa^2 归一后取分贝数.



(a) 介质球　　(b) 单站RCS

图 8-8　有耗介质球的单站 RCS

8.5　导体圆柱的散射

8.5.1　级数解：TM 波

设平面波沿 x 方向垂直入射到导体圆柱, 如图 8-9 所示, 且入射波电场平行于 z 轴 (对 z 的 TM 波), 即

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{z}}E_0\exp(\mathrm{i}kx)=\hat{\boldsymbol{z}}E_0\exp(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi) \tag{8-70}$$

为了便于应用 $\rho=a$ 处的边界条件, 将平面波用满足柱坐标 Helmholtz 方程的柱面波函数展开为

$$\exp\left(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{\mathrm{m}}J_{\mathrm{m}}(k\rho)\exp\left(-\mathrm{i}m\varphi\right) \tag{8-71}$$

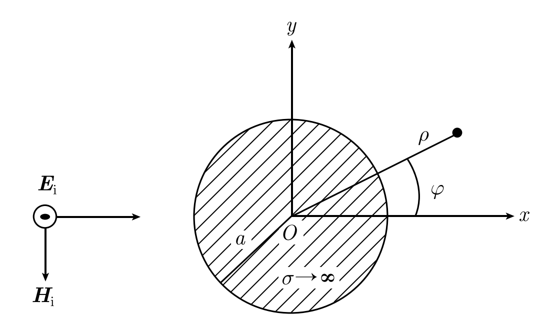


图 8-9　导体圆柱的散射：TM 波

为了确定系数 a_{m}, 将式 (8-71) 两端乘以 $\exp\left(\mathrm{i}n\varphi\right)$ 并对 φ 从 0 到 2π 积分,

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\\=&\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{\mathrm{m}}J_{\mathrm{m}}(k\rho)\int_0^{2\pi}\exp\left(-\mathrm{i}m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{8-72}$$

根据指数函数 $\exp\left(-\mathrm{i}m\varphi\right)$ 的正交关系,

$$\int_0^{2\pi}\exp\left(-\mathrm{i}m\varphi\right)\exp\left(\mathrm{i}n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}2\pi, & m\neq n\\0, & m=n\end{cases}$$

以及 Bessel 函数的积分表示式,

$$J_n\left(k\rho\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi+\mathrm{i}n\varphi-\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

式 (8-72) 变为

$$2\pi J_n(k\rho)\exp\left(\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}\right)=2\pi a_n J_n(k\rho)$$

由此可以确定式 (8-71) 中的系数,

$$a_n=\exp\left(\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{i}^n$$

上式代入式 (8-71) 便得到平面波的柱面波函数展开式,

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho)\exp\left[-\mathrm{i}\left(n\varphi-n\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(k\rho)\exp(-\mathrm{i}n\varphi)\end{aligned}\tag{8-73}$$

式 (8-73) 代入式 (8-70) 即得入射波的展开式,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\mathrm{i}&=\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho)\exp\left[-\mathrm{i}\left(n\varphi-n\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(k\rho)\exp(-\mathrm{i}n\varphi)\end{aligned}\tag{8-74}$$

理想导体圆柱外的散射波也可表示为柱面波函数叠加. 根据外行波的要求, 对于时谐因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 将散射波写为第一类 Hankel 函数的叠加, 即

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{s}=\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nH_n^{(1)}(k\rho)\exp(-\mathrm{i}n\varphi)\tag{8-75}$$

式中, b_n 为待定系数. 将式 (8-75) 和式 (8-74) 代入边界条件 $(E^\mathrm{i}+E^\mathrm{s})\big|_{\rho=a}=0$ 可得

$$E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{i}^nJ_n(ka)+b_nH_n^{(1)}(ka)\right]\exp(-\mathrm{i}n\varphi)=0\tag{8-76}$$

式 (8-76) 对于任何 φ 成立, 则有

$$b_n=-\mathrm{i}^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}$$

将上式代入式 (8-75), 得

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{s}=-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}H_n^{(1)}(k\rho)\exp(-\mathrm{i}n\varphi)\tag{8-77}$$

以上为 TM 波散射场的级数解. 根据图 8-9, 当 $\varphi=0$ 为前向散射, $\varphi=\pi$ 为后向散射.

8.5.2 TM 波的远区散射和细导线情形

对于远区场, $k\rho \gg 1$, 利用 Hankel 函数的大宗量近似公式,

$$
\begin{aligned}
H_n^{(1)}(k\rho) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\left(-\mathrm{i}\right)^n\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)
\end{aligned} \tag{8-78}
$$

代入式 (8-77) 得到远区散射场的渐近式为

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi\right) \tag{8-79}
$$

为了便于计算, 改写式 (8-79) 中的求和项. 根据 Bessel 函数关系式,

$$
\begin{aligned}
&J_{-n}\left(x\right)=\left(-1\right)^n J_n\left(x\right)\\
&H_{-n}^{(1)}\left(x\right)=\exp\left(\mathrm{i}n\pi\right)H_n^{(1)}\left(x\right)=\left(-1\right)^n H_n^{(1)}\left(x\right)
\end{aligned}
$$

以及 $\exp\left(\mathrm{i}\pi/4\right)=\sqrt{\mathrm{i}}$, 式 (8-79) 的求和项可改写为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}=&-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\\
=&-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}\right.\\
&\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi\right)+\sum_{n=\infty}^{1}\frac{J_{-n}(ka)}{H_{-n}^{(1)}(ka)}\exp\left(+\mathrm{i}n\varphi\right)\right]\\
=&-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sqrt{\mathrm{i}}\\
&\cdot\left\{\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\left[\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi\right)+\exp\left(+\mathrm{i}n\varphi\right)\right]\right\}\\
=&-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos\left(n\varphi\right)\right]\\
=&-\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos\left(n\varphi\right)
\end{aligned} \tag{8-80}
$$

式中,

$$
\alpha_n=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n\neq 0\end{cases}
$$

对于细导线, $ka \ll 1$, 以上级数收敛很快. 上式求和中 $n = 0, 1, 2$ 的前几项起主要作用. 根据 Bessel 函数的小宗量近似公式,

$$
\begin{aligned}
&J_0(x) \approx 1, \quad H_0^{(1)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln x \\
&J_1(x) \approx \frac{\xi}{2}, \quad H_1^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{1}{\pi}\frac{2}{x} \\
&J_2(x) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad H_2^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^2
\end{aligned}
$$

式 (8-80) 中 $n = 0$ 项的系数为

$$
\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \simeq -\mathrm{i}\frac{\pi}{2\ln(ka)}
$$

$n = 1$ 项的系数为

$$
\frac{J_1(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \simeq \frac{ka/2}{-\mathrm{i}2/(\pi ka)} = \mathrm{i}\frac{\pi}{4}(ka)^2
$$

$n = 2$ 项的系数为

$$
\frac{J_2(ka)}{H_2^{(1)}(ka)} \simeq \frac{(ka)^2/8}{-\mathrm{i}4/\left[\pi(ka)^2\right]} = \mathrm{i}\frac{\pi}{32}(ka)^4
$$

将以上各式代入式 (8-80) 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} &\approx -\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp(\mathrm{i}k\rho)\sum_{n=0}^{2}\alpha_n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos(n\varphi) \\
&= -\hat{\boldsymbol{z}}E_0\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp(\mathrm{i}k\rho)\left[-\mathrm{i}\frac{\pi}{2\ln(ka)} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}(ka)^2\cos\varphi + \mathrm{i}\frac{\pi}{16}(ka)^4\cos 2\varphi\right] \\
&= \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{i}\pi E_0}{2}\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp(\mathrm{i}k\rho)\left\{\frac{1}{\ln(ka)} - (ka)^2\cos\varphi - \frac{(ka)^4}{8}\cos 2\varphi\right\}
\end{aligned}
\tag{8-81}
$$

根据图 8-9, 式 (8-81) 中 $\varphi = 0$ 为前向散射, $\varphi = \pi$ 为后向散射. 式 (8-81) 中第一项与角度 φ 无关; 由于 $ka \ll 1$, 式中第二和第三项可以忽略, 表示 TM 波情形由细导线所产生的散射是各向同性的.

8.5.3　级数解: TE 波

设平面波沿 x 方向垂直入射到导体圆柱, 如图 8-10 所示, 且入射波磁场平行于 z 轴 (对 z 的 TE 波), 即

$$
\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{z}}H_0\exp(\mathrm{i}kx) = \hat{\boldsymbol{z}}H_0\exp(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi) \tag{8-82}
$$

为了便于应用 $\rho = a$ 处的边界条件, 将式 (8-82) 中平面波用柱面波函数展开式 (8-73) 代入得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} &= \hat{\boldsymbol{z}} H_0 \exp(\mathrm{i}kx) = \hat{\boldsymbol{z}} H_0 \exp(\mathrm{i}k\rho\cos\varphi) \\ &= \hat{\boldsymbol{z}} H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^n J_n(k\rho) \exp(-\mathrm{i}n\varphi)\end{aligned} \tag{8-83}$$

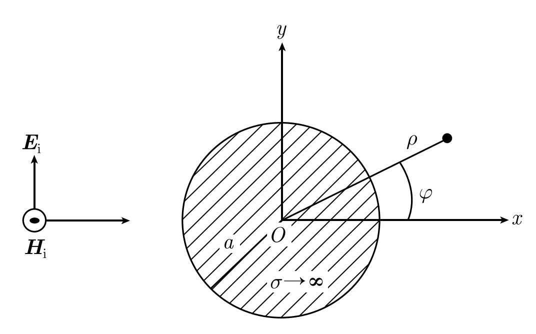


图 8-10　导体圆柱的散射：TE 波

理想导体圆柱外的散射波也可表示为柱面波函数叠加, 即

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{z}} H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(1)}(k\rho) \exp(-\mathrm{i}n\varphi) \tag{8-84}$$

式中, b_n 为待定系数. 将式 (8-84) 和式 (8-83) 代入边界条件 $\partial(H_{\mathrm{i}} + H_{\mathrm{s}})/\partial\rho|_{\rho=a} = 0$ 可得

$$E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{i}^n J_n'(ka) + b_n H_n^{(1)\prime}(ka)\right] \exp(-\mathrm{i}n\varphi) = 0 \tag{8-85}$$

式 (8-85) 对于任何 φ 成立, 则有

$$b_n = -\mathrm{i}^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}$$

上式代入式 (8-84) 得

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}} = -\hat{\boldsymbol{z}} H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) \exp(-\mathrm{i}n\varphi) \tag{8-86}$$

以上为 TE 波散射场的级数解. 当 $\varphi = 0$ 为前向散射, $\varphi = \pi$ 为后向散射.

8.5.4　TE 波的远区散射和细导线情形

对于远区场, $k\rho \gg 1$, 利用 Hankel 函数的大宗量近似公式 (8-78),

$$H_n^{(1)}(k\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left(-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) \exp(\mathrm{i}k\rho)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\,(-\mathrm{i})^n \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)$$

代入式 (8-86) 得到 TE 波远区散射场的渐近式为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}} = -\hat{\boldsymbol{z}}H_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi\right) \tag{8-87}$$

为了计算方便, 改写式 (8-87) 中的求和项. 根据 Bessel 函数关系式,

$$\begin{aligned}
&J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\\
&H_{-n}^{(1)}(x) = \exp\left(\mathrm{i}n\pi\right)H_n^{(1)}(x) = (-1)^n H_n^{(1)}(x)\\
&J_{-n}'(x) = (-1)^n J_n'(x)\\
&H_{-n}^{(1)\prime}(x) = (-1)^n H_n^{(1)\prime}(x)
\end{aligned}$$

$\exp\left(\mathrm{i}\pi/4\right) = \sqrt{\mathrm{i}}$, 式 (8-87) 的求和项可改写为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}} =& -\hat{\boldsymbol{z}}H_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\\
=& -\hat{\boldsymbol{z}}H_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)}\right.\\
&\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi\right)+\sum_{n=\infty}^{1}\frac{J_{-n}'(ka)}{H_{-n}^{(1)\prime}(ka)}\exp\left(+\mathrm{i}n\varphi\right)\right]\\
=& -\hat{\boldsymbol{z}}H_0\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sqrt{\mathrm{i}}\\
&\cdot\left\{\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\left[\exp\left(-\mathrm{i}n\varphi\right)+\exp\left(+\mathrm{i}n\varphi\right)\right]\right\}\\
=& -\hat{\boldsymbol{z}}H_0\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\left[\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos\left(n\varphi\right)\right]\\
=& -\hat{\boldsymbol{z}}H_0\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}}\exp\left(\mathrm{i}k\rho\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos\left(n\varphi\right)
\end{aligned} \tag{8-88}$$

式中,

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & n = 0\\ 2, & n \neq 0\end{cases}$$

对于细导线, $ka \ll 1$, 以上级数收敛很快, 上式求和中 $n = 0, 1, 2$ 的前几项起主要作用. 根据 Bessel 函数导数公式,

$$\left.\begin{aligned} B_n'(x) &= B_{n-1}(x) - \frac{n}{x}B_n(x) \\ B_n'(x) &= -B_{n+1}(x) + \frac{n}{x}B_n(x) \\ B_0'(x) &= -B_1(x) \end{aligned}\right\} \tag{8-89}$$

式中, B_n 可以是 J_n 或 $H_n^{(1)}$, 以及 Bessel 函数的小宗量近似公式,

$$\begin{aligned} &J_0(x) \approx 1, \quad H_0^{(1)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln x \\ &J_1(x) \approx \frac{x}{2}, \quad H_1^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{1}{\pi}\frac{2}{x} \\ &J_n(x) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad H_n^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad |n| > 1 \end{aligned}$$

所以式 (8-88) 中 $n=0$ 项的系数为

$$\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} = \frac{-J_1(ka)}{-H_1^{(1)\prime}(ka)} \simeq -\frac{ka/2}{\mathrm{i}2/(\pi ka)} = \mathrm{i}\frac{\pi(ka)^2}{4}$$

$n=1$ 项的系数为

$$\frac{J_1'(ka)}{H_1^{(1)\prime}(ka)} = \frac{-J_2(ka) + \dfrac{1}{ka}J_1(ka)}{-H_2^{(1)}(ka) + \dfrac{1}{ka}H_1^{(1)}(ka)} = \frac{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ka}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}{\mathrm{i}\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{ka}\right)^2 - \mathrm{i}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{2}{(ka)^2}} \simeq -\mathrm{i}\frac{\pi(ka)^2}{4}$$

$n>1$ 项的系数为

$$\begin{aligned} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} &= \frac{J_{n-1}(ka) - \dfrac{n}{ka}J_n(ka)}{H_{n-1}^{(1)}(ka) - \dfrac{n}{ka}H_n^{(1)}(ka)} \\ &\simeq \frac{\dfrac{1}{(n-1)!}\left(\dfrac{ka}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{n}{ka}\cdot\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{ka}{2}\right)^n}{-\mathrm{i}\dfrac{(n-2)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{ka}\right)^{n-1} + \mathrm{i}\dfrac{n}{ka}\dfrac{(n-1)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{ka}\right)^n} \\ &\simeq \frac{\dfrac{1}{2(n-1)!}\left(\dfrac{ka}{2}\right)^{n-1}}{\mathrm{i}\dfrac{n!}{2\pi}\left(\dfrac{2}{ka}\right)^{n+1}} \\ &= -\mathrm{i}\frac{\pi}{n!(n-1)!}\left(\frac{ka}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

代入式 (8-88) 得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}} &= -\hat{\boldsymbol{z}} H_0 \sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}} \exp(\mathrm{i}k\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} \cos(n\varphi) \\
&\simeq -\hat{\boldsymbol{z}} H_0 \sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}} \exp(\mathrm{i}k\rho) \left[\mathrm{i}\frac{\pi (ka)^2}{4} - 2\mathrm{i}\frac{\pi (ka)^2}{4}\cos\varphi - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left(\frac{ka}{2}\right)^4 \cos(2\varphi)\right] \\
&\simeq -\mathrm{i}\frac{\pi}{4} \hat{\boldsymbol{z}} H_0 \sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho}} \exp(\mathrm{i}k\rho) \cdot (ka)^2 (1 - 2\cos\varphi)
\end{aligned} \tag{8-90}
$$

根据图 8-10, 式 (8-90) 中 $\varphi = 0$ 为前向散射, $\varphi = \pi$ 为后向散射. TE 波情形细导线所产生的散射将不再是各向同性, 而与散射方向 ϕ 有关.

8.5.5　柱体的散射宽度

和三维物体的散射截面一样, 可以定义二维物体散射的散射截面 (宽度) 为

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma &= \lim_{\rho\to\infty}\left(2\pi\rho\frac{|\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|^2}\right)\mathrm{m} \\
\sigma\,(\mathrm{dBm}) &= 10\lg\left[\lim_{\rho\to\infty}\left(2\pi\rho\frac{|\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|^2}\right)\right]\mathrm{dBm}
\end{aligned}
\right\} \tag{8-91}
$$

其单位分别为米和分贝米. TM 情形远区散射场用式 (8-80) 计算, 注意其中 $|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|^2 = |E_0|^2$, 于是, 理想导体圆柱的散射宽度为

$$
\begin{aligned}
\sigma &= 2\pi\frac{2}{\pi k}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos(n\varphi)\right|^2 \\
&= \frac{2\lambda}{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos(n\varphi)\right|^2
\end{aligned} \tag{8-92}
$$

或者用分贝定义的波长归一化散射截面 (宽度) 为

$$
\frac{\sigma}{\lambda}\,(\mathrm{dB}) = 10\lg\left\{\frac{2}{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos(n\varphi)\right|^2\right\}\mathrm{dB} \tag{8-93}
$$

TE 情形远区散射场用式 (8-88) 计算, 这时理想导体圆柱的散射宽度为

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \lim_{\rho\to\infty}\left(2\pi\rho\frac{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|^2}\right) \\
&= 2\pi\frac{2}{\pi k}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos(n\varphi)\right|^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos(n\varphi)\right|^2 \tag{8-94}$$

或者用分贝定义的波长归一化散射截面 (宽度) 为

$$\frac{\sigma}{\lambda}(\mathrm{dB}) = 10\lg\left\{\frac{2}{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos(n\varphi)\right|^2\right\}\ \mathrm{dB} \tag{8-95}$$

其中, Bessel 函数导数用式 (8-89) 计算.

算例. 图 8-11 给出导体圆柱的归一化双站散射截面. 其中, 图 8-11(a) 为 TM 情形, 图 8-11(b) 为 TE 情形, 显示不同圆柱半径时的结果. 当 $a = 0.05\lambda$, TM 情形的散射截面随双站角的变化较小, 而 TE 情形散射截面随双站角的变化较大.

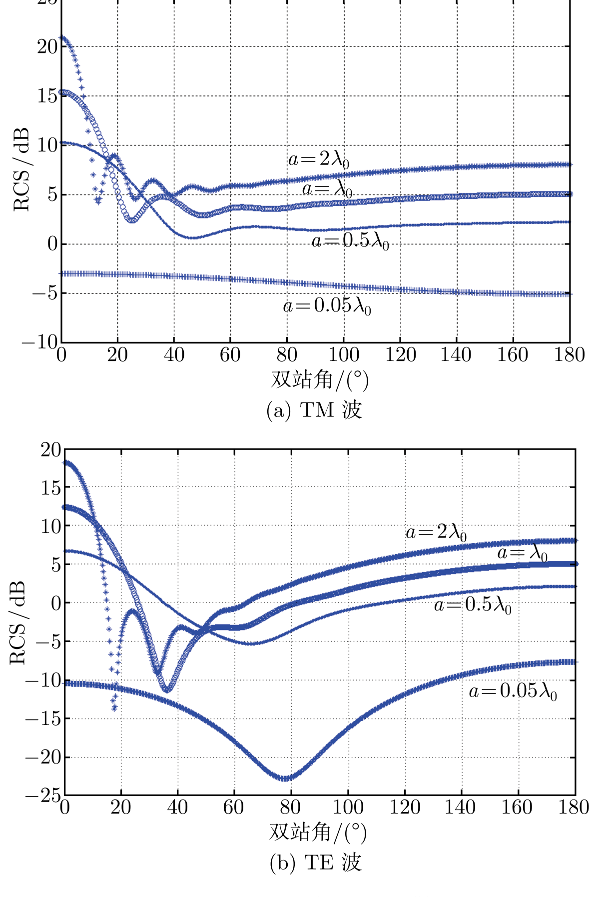


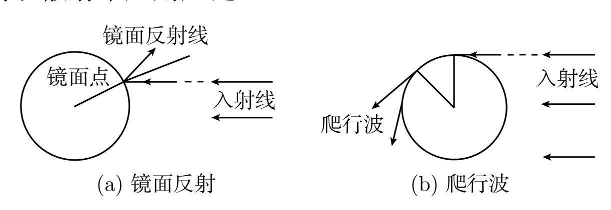
图 8-11 导体圆柱的双站散射

8.5.6 讨论：大圆柱情形

当导体圆柱半径较大, 式 (8-77) 右端级数收敛慢, 需要用 Watson 变换将其转为另一种收敛快的级数 (不推导), 结果为 (Kong, 2002)

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{z}}\pi E_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\nu_n}^{(2)}(ka)H_{\nu_n}^{(1)}(k\rho)}{\left[\dfrac{\partial H_{\nu}^{(1)}(ka)}{\partial\nu}\right]_{\nu=\nu_n}}\cdot\frac{\cos(\nu_n\varphi)\exp\left(-\mathrm{i}\nu_n\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\nu_n\pi} \tag{8-96}$$

式中, ν_n 代表 $H_{\nu}^{(1)}(ka)$ 的零点, 即 $H_{\nu_n}^{(1)}(ka)=0$, 在复数 ν 平面上 ν_n 取一系列值. 对此级数的分析表明, 当导体圆柱半径远大于波长时, 对于散射场的贡献主要来自镜面反射和爬行波的传播. 可以用几何光学来说明, 以入射波射线和柱面的交点为镜面点, 在此作切平面, 将产生镜面反射射线, 如图 8-12(a) 所示. 对于到达柱体表面时和表面相切的入射波射线, 它将沿着表面传播, 并在传播过程中沿表面切向向外辐射, 如图 8-12(b) 所示, 该射线称为爬行波. 基于圆柱和劈的级数解的进一步分析所得出的物理概念和相关公式形成处理高频电磁问题的几何绕射理论 (GTD). 这一理论在辐射和散射中应用广泛.

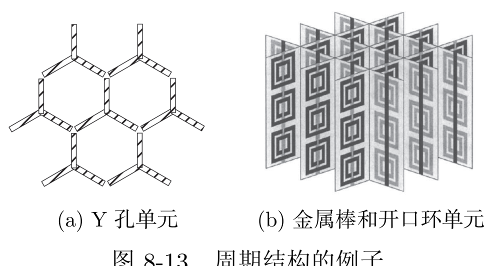


(a) 镜面反射 (b) 爬行波

图 8-12 镜面反射和爬行波

8.6 周期性表面的散射

当电磁波遇到周期性结构物体, 其传播和散射呈现一些特殊特性. 光栅是光学中常用的一种周期性结构. 海浪表面的起伏近似于周期性表面. 此外, 频率选择表面 (frequency selective surface, FSS) 和新型人工双负介质 (double negative medium, DNG, 或 metamaterial) 也都属于周期性结构. 图 8-13 给出雷达罩所用的一种 Y 孔



(a) Y 孔单元 (b) 金属棒和开口环单元

图 8-13 周期结构的例子

单元结构, 以及人工双负介质的一种金属棒和开口环单元结构的示意.

8.6.1 Floquet 定理

首先讨论周期性结构下波函数的 Floquet 定理. 设物体沿 x 方向具有周期性, 周期为 p, 如图 8-14 所示. 设入射波 (TM 波) 为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{y}} H_0 \exp\left(\mathrm{i}k_x x - \mathrm{i}k_z z\right) \tag{8-97}$$

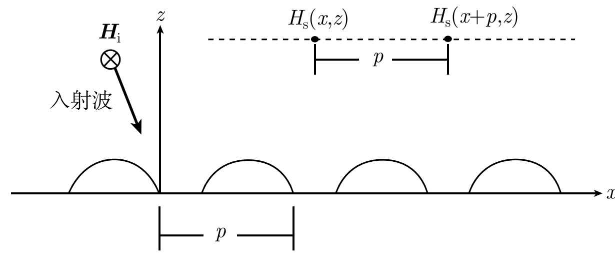


图 8-14 周期结构中波函数

以下用波函数 ψ 代表电磁场的任一直角分量. 根据周期性结构物理特性, 如果观察点位于 z 等于常数的平面, 则沿 x 方向相距为 p 的两点的波函数彼此只相差一个确定的相移和衰减, 即

$$\frac{\psi(x+p)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x+2p)}{\psi(x+p)} = \frac{\psi(x+mp)}{\psi\left(x+(m-1)p\right)} = C \tag{8-98}$$

式中, C 为复数常数. 式 (8-98) 中 C 可写为

$$C = \exp(\mathrm{i}\beta p)$$

式中, β 可为复数, 虚部对应衰减, 实部对应相移. 上式代入式 (8-98) 可得

$$\psi(x+p) = \psi(x)\exp(\mathrm{i}\beta p) \tag{8-99}$$

定义一个新函数 $U(x)$, 它和波函数之间关系为

$$U(x) = \psi(x)\exp(-\mathrm{i}\beta x) \tag{8-100}$$

则根据式 (8-99) 可得

$$\begin{aligned} U(x+p) &= \psi(x+p)\exp\left[-\mathrm{i}\beta(x+p)\right] \\ &= \psi(x)\exp(\mathrm{i}\beta p)\exp\left[-\mathrm{i}\beta(x+p)\right] \\ &= \psi(x)\exp(-\mathrm{i}\beta x) \\ &= U(x) \end{aligned} \tag{8-101}$$

式 (8-101) 表明, $U(x)$ 是周期函数, 其周期为 p. 值得注意的是波函数 $\psi(x)$ 并不是周期函数. 由于 $U(x)$ 是周期函数, 所以它可以用 Fourier 级数展开,

$$U(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{2n\pi}{p}\right)x\right] \tag{8-102}$$

式中, 系数为

$$A_n=\frac{1}{p}\int_0^p U(x)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{2n\pi}{p}\right)x\right]\mathrm{d}x \tag{8-103}$$

将式 (8-102) 代入式 (8-100) 得

$$\begin{aligned}\psi(x)&=U(x)\exp(\mathrm{i}\beta x)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left[\mathrm{i}\left(\beta+\frac{2n\pi}{p}\right)x\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left(\mathrm{i}\beta_n x\right)\end{aligned} \tag{8-104}$$

式中,

$$\beta_n=\beta+\frac{2n\pi}{p}$$

结合时谐因子 $\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$, 式 (8-104) 表明周期性结构中的波函数可以表示为许多谐波成分的叠加, β_n 是第 n 次谐波沿 x 方向的传播常数, 即

$$\psi(x)\exp(-\mathrm{i}\omega t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left[\mathrm{i}\left(\beta_n x-\omega t\right)\right]$$

考虑到沿 $+x$ 和 $-x$ 方向的谐波成分, 式 (8-104) 可改写为

$$\psi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[A_n\exp\left(\mathrm{i}\beta_n x\right)+B_n\exp\left(-\mathrm{i}\beta_n x\right)\right] \tag{8-105}$$

以上关系式称为 Floquet 定理. 它给出沿周期结构方向波的本征模.

8.6.2 理想导体表面周期性矩形槽的散射

设理想导体表面有周期性矩形槽, 如图 8-15 所示, 槽宽为 w, 深为 d, 沿 z 方向为无限长, 即 $\partial/\partial y=0$. 设矩形槽的周期为 p, 入射平面波为 TM 波,

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\exp\left[\mathrm{i}(k_x x-k_z z)\right] \tag{8-106}$$

式中,

$$k_x=k\cos\theta_{\mathrm{i}},\quad k_z=k\sin\theta_{\mathrm{i}}$$

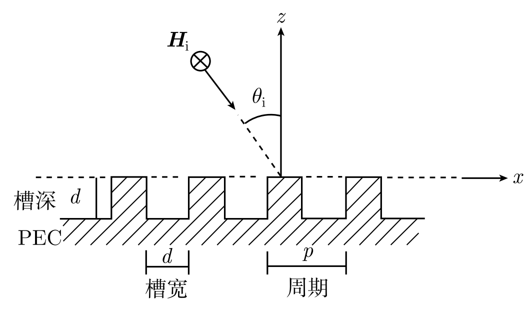


图 8-15 周期性矩形槽表面

散射波可用周期结构的本征波 Floquet 模展开为

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{s} = \hat{\boldsymbol{y}} H_0 \sum R_n \exp(\mathrm{i}\beta_n x) \exp(\mathrm{i}k_{zn} z) \tag{8-107}$$

式中, k_{zn} 为 z 方向传播常数, 满足色散关系,

$$\beta_n^2 + k_{zn}^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{8-108}$$

以及

$$\beta_n = k_x + \frac{2n\pi}{p} \tag{8-109}$$

由于 β_n 是第 n 次 Floquet 模沿 x 方向的传播常数, 物理上 $n=0$ 的模对应于镜面反射, 相当于周期性表面退化为平面时的反射波, 所以上式右端当 $n=0$ 时 β_0 等于入射波矢量的 x 分量 k_x. 散射波由多个 Floquet 模 (平面波分量) 组成, 图 8-16 给出 k 空间中各阶 Floquet 模的波矢量.

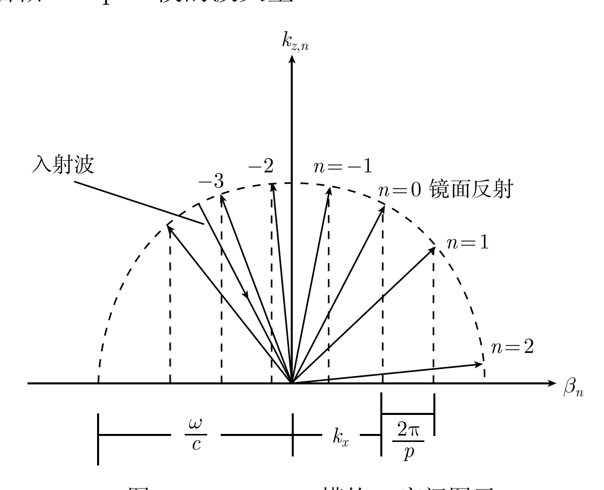


图 8-16 Floquet 模的 k 空间图示

式 (8-109) 代入式 (8-108) 得

$$k_{zn} = \sqrt{k^2 - \beta_n^2} = \sqrt{k^2 - \left(k_x + \frac{2n\pi}{p}\right)^2} \tag{8-110}$$

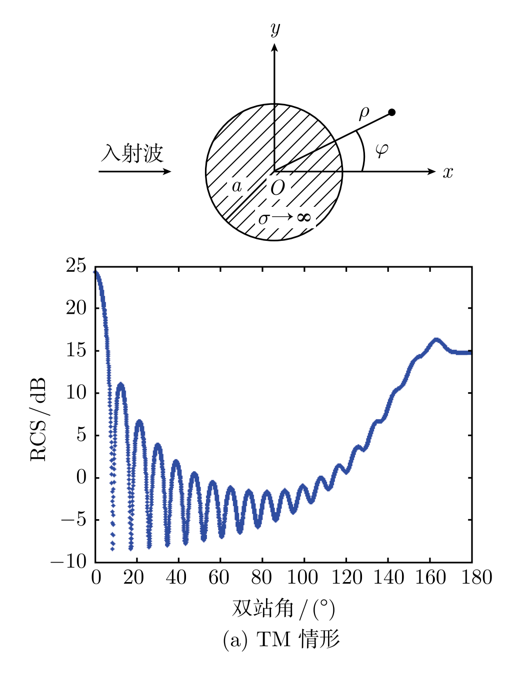
由式 (8-110) 可见当

$$k_x + \frac{2n\pi}{p} > k \tag{8-111}$$

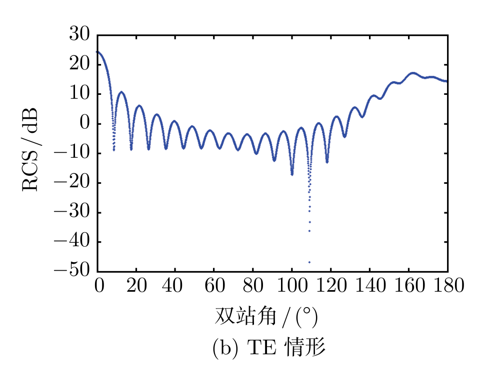
k_{zn} 成为虚数, 即波沿 z 方向呈指数衰减. 所以 Floquet 模中有两类：当 k_{zn} 为实数, 是传输模; 当 k_{zn} 为虚数, 是倏逝模. 入射波方向和周期 p 决定了各阶 Floquet 模的特性和传播方向. 式 (8-107) 中各阶 Floquet 模的幅值 R_n 则由周期结构的具体形状和介质特性确定. 根据周期结构的边界条件可以进一步确定幅值 R_n, 对于如图 8-15 所示周期性矩形槽可以有解析解, 见 Kong(2002) 和 Ishimaru(1991). 一般情形可以用数值方法求得各阶 Floquet 模的幅值 R_n.

8.7　无限长导体圆柱双站散射宽度的 MATLAB 计算

本节给出用 MATLAB 计算无限长导体圆柱的散射宽度, 参见 8.5 节. 入射波沿 x 轴, 分为 TM 情形即 E 平行于 z 轴, TM 情形即 H 平行于 z 轴. 设入射波频率 $f = 1 \times 10^{10}$Hz, 波长 $\lambda = 3$cm, 圆柱半径 $a = 10\lambda$. 双站散射宽度 (用波长归一) 如图 8-17 所示, (a) 为 TM 情形, (b) 为 TE 情形. 当 $\varphi = 0$ 为前向散射; 当 $\varphi = 180°$ 为后向散射.



(a) TM 情形



(b) TE 情形

图 8-17　导体圆柱的双站散射宽度

8.7.1　TM 情形

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                本程序计算 TM 情形无限长导体的双站散射宽度
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
f=1.0e10;                                   %入射平面电磁波频率
C0=3.0e8;                                   %真空波速
wavelength=C0/f;                            %真空波长
    k=2*pi/wavelength;                      %波矢量大小
a=10*wavelength;                            %导体柱半径
ka=k*a;
N=50;                                       %展开项数
for phi=0:0.001:pi;                         %方向角循环
E0=0;                                       %临时变量
    for n=0:1:20                            %柱面波函数展开循环
        if n == 0
            alpha=1;
        else
            alpha=2;
        end
        E=alpha*besselj(n,ka)/besselh(n,1,ka)*cos(n*phi);
        E0=E+E0;
    end
sigma=10*log10(2.0/pi*abs(E0*E0));          %计算散射宽度 (波长归一)
```

```
plot(phi/pi*180,sigma,'.')
hold on
end
xlabel(' 双站角 ','FontSize',20,'FontName','bold')
ylabel('RCS (dB)','FontSize',20,'FontName','bold')
```

8.7.2 TE 情形

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                本程序计算 TE 情形无限长导体的双站散射宽度
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
f=1.0e10;                                    %入射平面电磁波频率
C0=3.0e8;                                    %真空波速
wavelength=C0/f;                             %真空波长
k=2*pi/wavelength;                           %波矢量大小
a=10*wavelength;                             %导体柱半径
ka=k*a;
N=50;                                        %展开项数
for phi=0:0.001:pi;                          %方向角循环
E0=0;                                        %临时变量
    for n=0:1:20                             %柱面波函数展开循环
        if n == 0
            alpha=1;
        else
            alpha=2;
        end
        E=alpha*besselj(n,ka)/besselh(n,1,ka)*cos(n*phi);
        E0=E+E0;
    end
sigma=10*log10(2.0/pi*abs(E0*E0));           %计算散射宽度 (波长归一)
plot(phi/pi*180,sigma,'.')
hold on
end
xlabel(' 双站角 ','FontSize',20,'FontName','bold')
ylabel('RCS (dB)','FontSize',20,'FontName','bold')
```

习　题

1. 参照电 Debye 势函数 π_{e} 的分析过程, 导出磁 Debye 势函数 π_{m}, 并给出磁场各分量用 π_{m} 的表示式.

2. 由电和磁 Debye 势函数 π_{ie}、π_{im} 公式 (8-37) 和式 (8-39) 导出入射波磁场分量 $H_{\mathrm{i}\theta}, H_{\mathrm{i}\varphi}$ 用球面 Bessel 函数展开的表示式.

3. 由 8.3 节中介质球对平面波散射的结果：

(1) 在 $\varepsilon_{\mathrm{s}} \to \infty$ 和 $\mu_{\mathrm{s}} \to 0$ 的极限情况下过渡到理想导体球对平面波的散射.

(2) 在 $\varepsilon_{\mathrm{s}} \to 0$ 和 $\mu_{\mathrm{s}} \to \infty$ 的极限情况下过渡到理想磁导体球对平面波的散射.

【提示】　参考张善杰 (2009)、Harrington (1964)、王一平等 (1985).

4. 根据理想导体球表面边界条件 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H}|_{r=a} = \hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}})|_{r=a}$, 即 $J_{\varphi} = (H_{\mathrm{i}\theta} + H_{\mathrm{s}\theta})|_{r=a}$ 和 $J_{\theta} = -(H_{\mathrm{i}\varphi} + H_{\mathrm{s}\varphi})|_{r=a}$, 由 Mie 级数解得出理想导体球表面电流的表示式.

【提示】　为了化简所得公式, 推导中用到球面 Bessel 函数的以下等式：

$$\hat{J}_n(ka)\,\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka) - \hat{J}_n'(ka)\,\hat{H}_n^{(1)}(ka) = \mathrm{i}$$

称为 Wronski 行列式. 参考 Harrington (1964: 317), 张善杰 (2009: 450).

5. 利用 8.5 节理想导体圆柱的级数解：

(1) 导出 TM 情形表面电流的计算公式.

(2) 导出 TE 情形表面电流的计算公式.

注意这里 TE 和 TM 情形的公式不具有对偶性. 参考张善杰 (2009).

6. 参照 8.5 节, 讨论均匀介质圆柱对平面波的散射, 设入射波电场平行于柱轴, 而入射方向与柱轴垂直 (TM 波), 求散射波的级数解.

7. 同习题 6, 设入射波磁场平行于柱轴 (TE 波), 应用对偶性原理可将上题结果过渡到 TE 波散射的级数解.

第 9 章　高频近似方法基础

本章介绍两种高频近似方法：几何光学近似 (geometric optics, GO) 和物理光学近似 (physical optics, PO). 结合反射面和介质透镜给出几何光学方法的应用, 结合理想导体散射计算给出物理光学的应用.

9.1　几何光学近似

9.1.1　几何光学近似下的 Maxwell 方程

几何光学可以看作 Maxwell 电磁理论在高频的极限情形. 考虑时谐场无源 Maxwell 方程,

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\\nabla\times\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\\\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})&=0\\\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H})&=0\end{aligned}\right\}\tag{9-1}$$

对于无耗各向同性介质 (可以是非均匀), 设电磁场具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\exp[-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\exp(-\mathrm{i}\omega t)\\\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\exp[-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\exp(-\mathrm{i}\omega t)\end{aligned}\right\}\tag{9-2}$$

式中, $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2\pi/\lambda_0$ 为真空波数, $L(\boldsymbol{r})$ 是空间位置的函数, 与介质参数有关, 称为程函 (eikonal).

对于均匀介质中的平面波,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\\&=\boldsymbol{E}_0\exp\left(-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_0n\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}\right)\end{aligned}$$

式中, $n=\sqrt{\mu\varepsilon/\mu_0\varepsilon_0}$ 为折射率, $\hat{\boldsymbol{k}}$ 是波传播方向的单位矢. 和式 (9-2) 比较可见, 这里程函 $L(\boldsymbol{r})=n\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}$, 代表沿波传播方向的光程.

由式 (9-2) 可见, 程函 $L(\boldsymbol{r})$ 的等值面是等相位面 (波前), 其法向 $\hat{\boldsymbol{s}}=\nabla L/|\nabla L|$ 代表射线方向, 如图 9-1 所示.

将式 (9-2) 代入式 (9-1) 得到

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla L\times\boldsymbol{H}_0+\frac{n}{\eta}\boldsymbol{E}_0=\frac{-\mathrm{i}}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{H}_0\\
&\nabla L\times\boldsymbol{E}_0-n\eta\boldsymbol{H}_0=\frac{-\mathrm{i}}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{E}_0\\
&\nabla L\cdot\boldsymbol{E}_0=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_0\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right)\\
&\nabla L\cdot\boldsymbol{H}_0=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_0\cdot\frac{\nabla\mu}{\mu}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{9-3}$$

$\hat{s}$
射线方向
等相位面
$L(\boldsymbol{r})=$常数

图 9-1　等相位面和射线

式 (9-3) 推导如下：将式 (9-2) 代入式 (9-1) 第二式得

$$\nabla\times\{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]$$

上式中

$$\omega\mu=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}n\eta=k_0n\eta$$

式中, $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质波阻抗, 以及

$$\begin{aligned}
\nabla\times\{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\}&=[\nabla\times\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})]\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]+\{\nabla\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\}\times\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\\
&=(\nabla\times\boldsymbol{E}_0)\exp(\mathrm{i}k_0L)+\mathrm{i}k_0\nabla L\times\boldsymbol{E}_0\exp(\mathrm{i}k_0L)
\end{aligned}$$

代入后得到

$$\nabla L\times\boldsymbol{E}_0-n\eta\boldsymbol{H}_0=-\frac{\mathrm{i}}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{E}_0$$

上式即为式 (9-3) 第二式. 同样可得式 (9-3) 第一式. 将式 (9-2) 代入式 (9-1) 第三式得

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=(\nabla\varepsilon)\cdot\boldsymbol{E}+\varepsilon(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=0$$

式中,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\nabla\cdot\{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\}\\
&=(\nabla\{\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})+\exp[\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})]\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\\
&=\mathrm{i}k_0(\nabla L)\exp(\mathrm{i}k_0L)\cdot\boldsymbol{E}_0+\exp(\mathrm{i}k_0L)\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0
\end{aligned}$$

代入后得到

$$(\nabla L)\cdot\boldsymbol{E}_0=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\left[\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0+\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right)\cdot\boldsymbol{E}_0\right]$$

上式即为式 (9-3) 第三式. 同样可得式 (9-3) 第四式. 证毕.

在高频情形, $\lambda_0 \to 0$, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 很大, 式 (9-3) 的右端 $1/k_0$ 项很小, 可以忽略, 于是得到

$$\left.\begin{aligned}&\nabla L \times \boldsymbol{H} + \frac{n}{\eta}\boldsymbol{E} = 0\\&\nabla L \times \boldsymbol{E} - n\eta\boldsymbol{H} = 0\\&\nabla L \cdot \boldsymbol{E} = 0\\&\nabla L \cdot \boldsymbol{H} = 0\end{aligned}\right\} \tag{9-4}$$

式 (9-4) 即为几何光学近似下的 Maxwell 方程. 为了书写简明, 式 (9-4) 和以后分析中省略了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的下标 0.

9.1.2　射线的特性

根据式 (9-4) 可以获得射线的一些特性.

(1) 射线轨迹方程. 由式 (9-4) 第二式,

$$n\eta\boldsymbol{H} = \frac{1}{n\eta}(\nabla L) \times \boldsymbol{E}$$

代入式 (9-4) 第一式得

$$(\nabla L) \times [(\nabla L) \times \boldsymbol{E}] + n^2\boldsymbol{E} = 0 \tag{9-5}$$

式 (9-5) 左端为

$$(\nabla L) \times [(\nabla L) \times \boldsymbol{E}] = (\nabla L)[(\nabla L) \cdot \boldsymbol{E}] - \boldsymbol{E}|\nabla L|^2 = -\boldsymbol{E}|\nabla L|^2$$

式中, 用到式 (9-4) 第一式. 上式代入式 (9-5) 可得

$$\left(n^2 - |\nabla L|^2\right)\boldsymbol{E} = 0$$

亦即

$$|\nabla L|^2 = n^2 \quad 或 \quad \nabla L = \hat{\boldsymbol{s}}n \tag{9-6}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{s}}$ 是射线方向单位矢, 如图 9-1 所示. 上式称为程函方程. 若射线轨迹如图 9-2 所示, 射线上 P 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$, 该点切线方向为

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \hat{\boldsymbol{x}}s_x + \hat{\boldsymbol{y}}s_y + \hat{\boldsymbol{z}}s_z$$

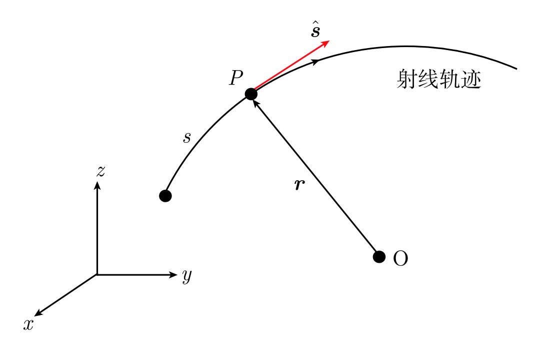


图 9-2　射线轨迹

式中, s 代表沿射线路径上的弧长, s_x, s_y, s_z 为方向余弦. 沿射线路径 s 求导可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} + s_z \frac{\partial}{\partial z} = (\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)$$

将以上二式代入式 (9-6), 得

$$\nabla L = n\hat{\boldsymbol{s}} = n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{9-7}$$

式 (9-7) 对射线路径 s 求导, 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\nabla L) \\ &= (\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)\nabla L \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \nabla\right)\nabla L \\ &= \frac{1}{n}(\nabla L \cdot \nabla)\nabla L \end{aligned} \tag{9-8}$$

利用矢量公式,

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

可得

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla L \cdot \nabla L) &= (\nabla L \cdot \nabla)\nabla L + (\nabla L \cdot \nabla)\nabla L + \nabla L \times (\nabla \times \nabla L) + \nabla L \times (\nabla \times \nabla L) \\ &= 2(\nabla L \cdot \nabla)\nabla L\end{aligned}$$

代入式 (9-8) 并应用式 (9-6) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{1}{n}(\nabla L \cdot \nabla)\nabla L$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n}\nabla\left(\nabla L\cdot\nabla L\right)\\
&= \frac{1}{2n}\nabla\left(|\nabla L|^2\right)\\
&= \frac{1}{2n}\nabla\left(n^2\right)\\
&= \nabla n
\end{aligned}
\tag{9-9}
$$

式 (9-9) 给出射线轨迹的微分方程. 若已知折射率分布 $n(x,y,z)$, 结合初始条件求解即可获得射线轨迹. 对于均匀介质, 折射率为常数, 式 (9-9) 给出 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s=0$, 为直线. 所以均匀介质中射线轨迹为直线.

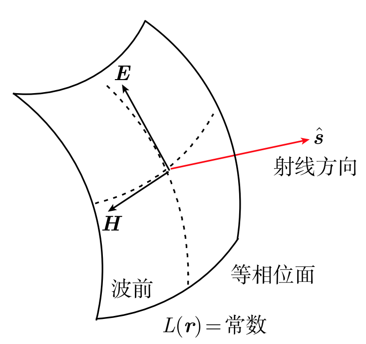


图 9-3　射线和电磁场的方向

(2) 局域平面波特性. 将式 (9-6) 代入式 (9-4) 可得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}=-\eta\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{H}\\
&\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{E}\\
&\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{E}=0\\
&\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{H}=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{9-10}
$$

可见电场和磁场与波前法向即波的传播方向三者相互垂直. 表明高频情形下局域电磁场具有平面波特性, 如图 9-3 所示.

(3) 电磁场能量密度和能流密度. 应用式 (9-10) 可得电场能量密度为

$$
\begin{aligned}
\langle W_{\mathrm{e}}\rangle &= \frac{1}{4}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\\
&= -\frac{1}{4}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot(\eta\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{H})^*\\
&= \frac{1}{4}\varepsilon\eta\hat{\boldsymbol{s}}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon\mu}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\\
&= \frac{n}{4c}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)
\end{aligned}
\tag{9-11}
$$

式中, $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 为真空光速, $v=c/n$ 为介质中波速. 同样可得磁场能量密度为

$$
\langle W_{\mathrm{m}}\rangle = \frac{1}{4}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\mu\left(\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{H}^* \\
&= \frac{\mu}{4\eta}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) \\
&= \frac{n}{4c}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)
\end{aligned} \tag{9-12}
$$

可见 $\langle W_{\mathrm{m}}\rangle = \langle W_{\mathrm{e}}\rangle = \langle W\rangle/2$, 电磁场的总能量密度为 $\langle W\rangle = \langle W_{\mathrm{e}}\rangle + \langle W_{\mathrm{m}}\rangle$.

能流密度 Poynting 矢量的时间平均值为

$$
\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{S}\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right\} \\
&= \frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times(\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{E})^*\right\} \\
&= \frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}\left\{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\,\hat{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{E}^*\,(\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{E})\right\} \\
&= \frac{1}{2\eta}\hat{\boldsymbol{s}}\,(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*) \\
&= \frac{1}{2\eta}\frac{4}{\varepsilon}\hat{\boldsymbol{s}}\,\langle W_{\mathrm{e}}\rangle \\
&= \frac{2c}{n}\hat{\boldsymbol{s}}\,\langle W_{\mathrm{e}}\rangle \\
&= 2v\hat{\boldsymbol{s}}\,\langle W_{\mathrm{e}}\rangle \\
&= v\hat{\boldsymbol{s}}\,\langle W\rangle
\end{aligned} \tag{9-13}
$$

可见平均能流密度的方向和射线方向一致, 其大小等于电磁场能量密度和局域波传播速度的乘积. 如果令波的强度为

$$
I = v\,\langle W\rangle \tag{9-14}
$$

则式 (9-13) 可写为

$$
\langle\boldsymbol{S}\rangle = \hat{\boldsymbol{s}}v\,\langle W\rangle = I\hat{\boldsymbol{s}} \tag{9-15}
$$

即平均能流密度方向和射线方向一致, 大小等于波的强度.

(4) 射线管和波的强度定律. 设介质为无耗, 由能量守恒定律有 $\nabla\cdot\langle\boldsymbol{S}\rangle = 0$. 式 (9-15) 代入后得

$$
\nabla\cdot\langle\boldsymbol{S}\rangle = \nabla\cdot(I\hat{\boldsymbol{s}}) = 0
$$

上式的积分形式为

$$\oiint \langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oiint I\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0 \tag{9-16}$$

即在无耗介质内通过任意封闭面流出的能流等于零. 设想由邻近的一束射线构成射线管, 如图 9-4 所示. 将式 (9-16) 应用于一段射线管的表面. 注意：能流密度矢量和射线管侧壁面平行; 而和射线管的两个端面 A_1, A_2 相垂直, 且一端为流入, 另一端为流出. 所以式 (9-16) 变为

$$I_1A_1 = I_2A_2 \tag{9-17}$$

式中, A_1, A_2 分别为端面的截面积, I_1, I_2 为端面处波的强度. 式 (9-17) 表明射线管中波的强度和管的截面积之间为反比关系, 称为波的强度定律.

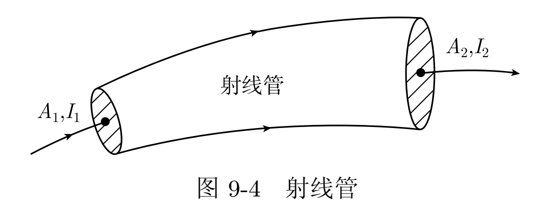


图 9-4　射线管

(5) 波前之间射线的等光程性. 根据式 (9-6) 有 $\nabla L = \hat{\boldsymbol{s}}n$, 取旋度可得

$$\nabla \times (\hat{\boldsymbol{s}}n) = \nabla \times (\nabla L) = 0$$

上式的回路积分形式为

$$\oint n\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{9-18}$$

即在无耗介质内程函梯度沿任意封闭回路的环量等于零. 考察空间任意二波前之间的两条射线, 如图 9-5 所示. 将式 (9-18) 应用于二射线和部分波前所形成的曲边

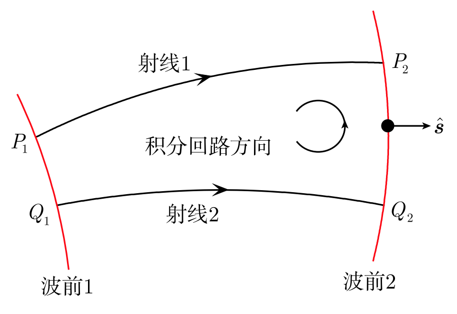


图 9-5　波前之间射线的等光程性

四边形 $P_1P_2Q_2Q_1$. 由于曲边 P_1Q_1, Q_2P_2 属于波前, 在这两条边上射线方向 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, 所以对回路积分没有贡献. 于是, 式 (9-18) 变为

$$\int_{P_1}^{P_2} n\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{Q_1}^{Q_2} n\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{9-19}$$

式中, 积分路径和射线平行, 故又可写为

$$\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s = \int_{Q_1}^{Q_2} n\mathrm{d}s \tag{9-20}$$

其中折射率和沿射线几何路程的乘积又称为光程. 所以式 (9-20) 表明, 任意二波前之间一切射线的光程都相等. 这一结论称为射线的等光程原理.

9.1.3　几何光学方法的适用性

几何光学 (GO) 方法是基于射线理论, 将电磁波和物体的相互作用归结为射线在介质中的传播特性, 具有局域性. 当物体尺寸和波长相近, GO 方法不适用.

考虑到物体边缘对电磁波的作用, Keller 提出边缘绕射系数概念, 并形成几何绕射理论 (geometric theory of diffraction, GTD). 在几何光学基础上, 考虑到物体表面多次反射的射线寻迹及射线束的扩展, 已发展有弹跳射线 (shooting and bouncing ray, SBR) 方法. 目前, GTD 和 SBR 已成为重要的高频方法, 有多种商用和专用软件用于目标散射分析.

9.2　反射面的几何光学分析

9.2.1　抛物型反射面

对于面天线, 通常要求由口径面发射出平行射线, 因而天线具有好的方向性. 这类射线称为准直 (collimated) 射线. 反射面和介质透镜常用于面天线系统中作为波前变换, 使从点源 (或线源) 发出的射线转换为准直射线.

首先考虑二维情形. 设无限长线源平行于 z 轴, 位于 F 点, 辐射柱面波, 如图 9-6 所示. 经过柱面镜反射后要求变换为平面波. 根据等光程原理, 考察从 F 点发出的两条射线 $\overline{FAB}$ 和 $\overline{FOF}$. 设反射镜放在空气 (折射率 $n=1$) 中, 所以光程就是几何路程. 通过 F 点向 AB 作垂线, 垂足为 B, FB 就是平面波前. 以 F 为原点建立极坐标, 两条射线 $\overline{FAB}$ 和 $\overline{FOF}$ 的几何路程相等, 即

$$\overline{FA}+\overline{AB}=\overline{FO}+\overline{OF}=2f$$

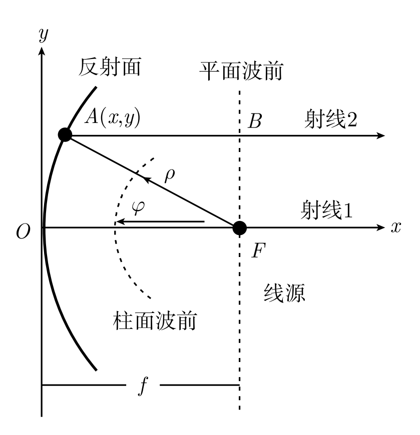


图 9-6　抛物面反射将柱面波前变换为平面波前

式中, $\overline{OF}=f$ 为焦距. 由于 $\overline{FA}=\rho,\overline{AB}=\rho\cos\varphi$, 代入上式得

$$\rho\left(1+\cos\varphi\right)=2f \tag{9-21}$$

式 (9-21) 为极坐标下的抛物线方程. 也可以转换为直角坐标形式. 设反射面顶点 O 为 xoy 坐标系的原点, 反射面上点 A 坐标为 (x,y), 由于 $\overline{FA}=\rho=\sqrt{\left(f-x\right)^2+y^2}$, $\overline{AB}=\rho\cos\varphi=f-x$, 代入式 (9-21) 得

$$\sqrt{\left(f-x\right)^2+y^2}+(f-x)=2f \tag{9-22}$$

即

$$\left(f-x\right)^2+y^2=\left(f+x\right)^2$$

于是得到

$$y^2=4fx \tag{9-23}$$

式 (9-23) 表明, 图 9-6 中点 $A\left(x,y\right)$ 的轨迹为抛物线, 线源所在位置为其焦点, 焦距为 f. 在应用中, 常以线天线作位于焦点的馈源.

式 (9-23) 也可推广到以 x 轴为对称的旋转抛物面情形, 即

$$y^2+z^2=4fx \tag{9-24}$$

旋转抛物面将球面波前转换为平面波前. 这时需用点源作为馈源, 应用中常以开口波导或喇叭天线作为点状馈源.

9.2.2 抛物型反射面口径场的幅值分布

考虑抛物型反射面口径场的分布. 已知反射面方程为式 (9-21), 即

$$\rho = \frac{2f}{1+\cos\varphi} \tag{9-25}$$

设线源位于柱坐标原点 F, 考虑由 F 发出的射线管, 张角为 $\mathrm{d}\phi$, 如图 9-7 所示. 由于空间介质为无耗, 根据能量守恒, 线源在φ至φ+dφ 角度范围内的辐射能量等于反射后准直波束在 y 到 y+dy 范围内的能量 (这里忽略了反射的损失), 即



$$U(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = P(y)\,\mathrm{d}y \tag{9-26}$$

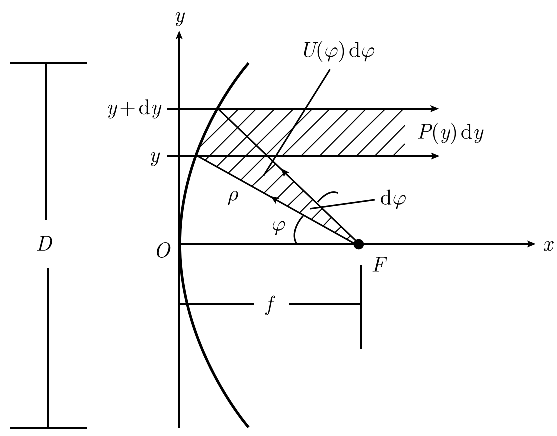


图 9-7 抛物线反射面的口径场分布

式中 $U(\varphi)$ 代表线源辐射的角分布特性, $P(y)$ 为能流密度, 正比于 $|E(y)|^2$, 代表口径面上波的强度分布.

另外, 由于 $y=\rho\sin\varphi$, 将式 (9-25) 代入后得

$$\begin{aligned} y = \rho\sin\varphi &= \frac{2f\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ &= \frac{2f\cdot 2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{2\cos^2(\varphi/2)} \\ &= 2f\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \tag{9-27}$$

式 (9-27) 求导得

$$\mathrm{d}y = \frac{2f}{1+\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{f}{\cos^2(\varphi/2)}\mathrm{d}\varphi$$

上式代入式 (9-26) 得到

$$P(y)=\frac{f}{\cos^2(\varphi/2)}\mathrm{d}\varphi=U(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

即

$$P(y)=\frac{\cos^2(\varphi/2)}{f}U(\varphi) \tag{9-28}$$

式 (9-28) 给出反射面口径上波的强度分布和线源辐射角分布之间关系. 当 $y=0$, $\varphi=0$, 有 $P(0)=U(0)/f$. 由于 $P(y)$ 正比于 $|E(y)|^2$, 上式可得口径面的场分布为

$$\frac{E(y)}{E(y=0)}=\sqrt{\frac{P(y)}{P(0)}}=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\frac{U(\varphi)}{U(0)}} \tag{9-29}$$

设线源辐射为各向同性, 即 $U(\varphi)$ 等于常数, 和角度无关, 则式 (9-29) 变为

$$\frac{E(y)}{E(y=0)}=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{9-30}$$

由式 (9-27) 可得

$$y=2f\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)=2f\frac{\sqrt{1-\cos^2(\varphi/2)}}{\cos(\varphi/2)}$$

即为

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{2f}{\sqrt{y^2+4f^2}}$$

上式代入式 (9-30) 得

$$\frac{E(y)}{E(y=0)}=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{2f}{\sqrt{y^2+4f^2}} \tag{9-31}$$

可见在口径面上场分布随 y 的增大而减小. 口径面上场虽然是等相位面, 但其幅值不均匀, 从中心到边缘逐渐减小, 如图 9-8 所示. 这一现象称为口径场的锥度分布 (tapered distribution), 对于天线的辐射方向性有影响.

9.2.3　双曲型反射面

当抛物反射面口径尺寸增大, 焦距 f 相应增大, 馈源就需要放置在距离反射面较远处, 整个系统的尺寸变大. 为了在小范围达到长焦距的效果, 可以采用凸反射面实现球面波前的变换, 如图 9-9 所示. 设点源位于 $G(-c,0,0)$. 由点源辐射的波前记为球面波前 1, 向右传播. 经过凸面镜反射后形成的新球面波前记为波前 2, 向左传播. 设球面波前 2 的球心位于 F, 称为虚点源. 下面来确定反射面的形状.

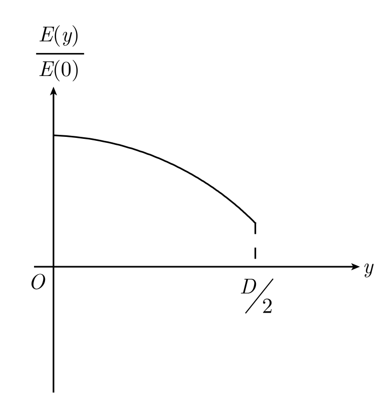


图 9-8 口径场分布从中心到边缘逐渐减小

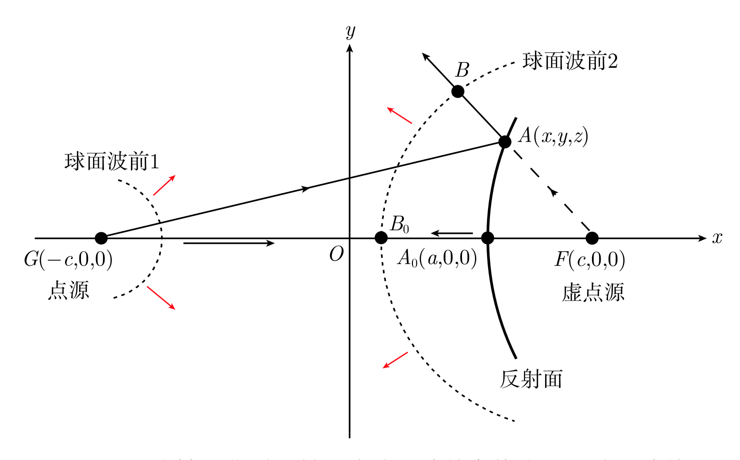


图 9-9 旋转双曲型反射面将球面波前变换为另一球面波前

根据等光程原理, 两个球面波前之间射线的光程应当相等. 设 B 和 B_0 是球面波前 2 上的两点. 考虑图中两条射线 GA_0B_0 和 GAB. 由于反射面置于空气中, 射线的光程就是几何路程, 二者相等即

$$\overline{GA}+\overline{AB}=\overline{GA_0}+\overline{A_0B_0}=\overline{GO}+\overline{OA_0}+\overline{A_0B_0} \tag{9-32}$$

设坐标原点 O 位于点源 G 和虚点源 F 连线的中点, 如图 9-9 所示, 即有 $\overline{GO}=\overline{OF}$. 同时, 由于 B 和 B_0 位于球面波前 2 上, 所以 $\overline{FB}=\overline{FB_0}$. 式 (9-32) 中

$$\overline{AB}=\overline{FB}-\overline{FA}=\overline{FB_0}-\overline{FA}$$

代入式 (9-32) 得

$$\overline{GA}+\overline{FB_0}-\overline{FA}=\overline{OF}+\overline{OA_0}+\overline{A_0B_0}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{GA} - \overline{FA} &= \overline{OF} - \overline{FB_0} + \overline{OA_0} + \overline{A_0B_0} \\
&= \overline{OB_0} + \overline{A_0B_0} + \overline{OA_0} \\
&= 2\overline{OA_0}
\end{aligned}
$$

根据图中所给各点坐标, 上式即为

$$
\sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} = 2a \tag{9-33}
$$

整理后得

$$
x^2 - \frac{y^2 + z^2}{e^2 - 1} = a^2 \tag{9-34}
$$

式中,

$$
e = \frac{\overline{OF}}{\overline{OA_0}} = \frac{c}{a}
$$

式 (9-34) 也可改写为

$$
\frac{y^2 + z^2}{a^2(e^2 - 1)} - \frac{x^2}{a^2} = -1 \tag{9-35}
$$

这是以 x 轴为对称的旋转双叶双曲面方程. 可见式 (9-34) 所示反射面为旋转双曲面, 它可以将球面波前 1 转换为另一球面波前 2, 二者传播方向相反.

以上双曲型反射面结构常用于 Cassegrain 天线作为组合式馈源. Cassegrain 天线采用双反射面组合实现波前变换, 如图 9-10 所示. 点源所发出的球面波照射到双曲线型次反射面后形成新的球面波前, 再照射到抛物线型主反射面后成为准直射线束的平面波前. 这种双反射面组合结构中, 采用双曲型次反射面使得点状馈源的位置具有灵活性; 同时, 主反射面的抛物面焦距可以远大于天线的物理结构尺寸, 适

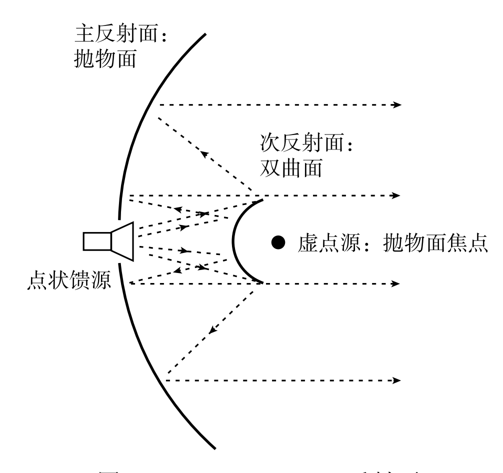


图 9-10　Cassegrain 双反射面

用于大口径面天线. 最初这种双反射面组合结构由 Cassegrain 用于光学望远镜设计, 现在用于卫星跟踪、通信和射电天文望远镜的微波地面站天线.

9.3 介质透镜的几何光学分析

9.3.1 双曲线型和椭圆型介质透镜

先考虑二维情形, $\partial/\partial z=0$. 设线源置于坐标原点 O, 如图 9-11 所示, 介质分界面为曲面, 左、右半空间折射率分别为 n_1, n_2. 以下分析将柱面波前变换为平面波前所需要的分界面形状. 设介质分界面端点 A 到原点 O 距离 $\overline{OA}=a$, 界面上一点 B 到原点距离 $\overline{OB}=\rho$. 通过 B 点作垂线 $\overline{BA_2}$. 若要求圆柱波前进入到介质内变为平面波前, 则 $\overline{BA_2}$ 位于平面波前. 根据等光程原理, 图中从 O 到 A_2 的光程 $n_1\cdot\overline{OA}+n_2\cdot\overline{AA_2}$ 应当等于 $\overline{OB}$ 的光程 $n_1\cdot\overline{OB}$, 即

$$n_1\cdot\overline{OB}=n_1\cdot\overline{OA}+n_2\cdot\overline{AA_2} \tag{9-36}$$

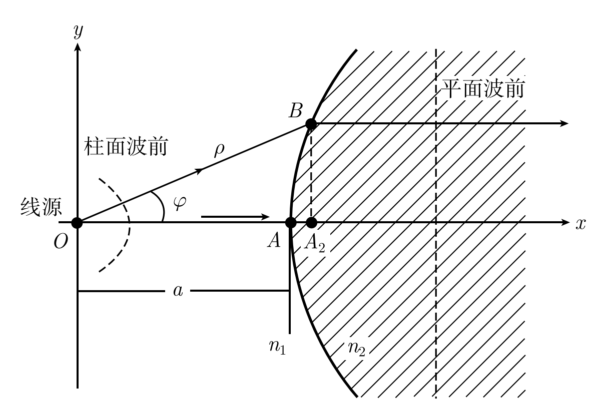


图 9-11 介质分界面将球面波前变换为平面波前

设 B 点坐标为 (ρ,φ), 则 $\overline{AA_2}=\rho\cos\varphi-a$, 代入式 (9-36) 得

$$n_1\rho=n_1a+n_2\left(\rho\cos\varphi-a\right)$$

令 $n_{21}=n_2/n_1$ 为相对折射率, 由上式可得

$$\frac{\rho}{a}=\frac{n_{21}-1}{n_{21}\cos\varphi-1} \tag{9-37}$$

将柱坐标转化为直角坐标, $\rho=\sqrt{x^2+y^2},\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2}$, 代入式 (9-37) 可得

$$\frac{\left(x-\dfrac{n_{21}}{n_{21}+1}a\right)^2}{\left(\dfrac{a}{n_{21}+1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)a^2}=1 \tag{9-38}$$

式 (9-38) 为二次曲线方程.

式 (9-38) 的推导如下. 由式 (9-37) 有

$$n_{21}\rho\cos\varphi-\rho=n_{21}a-a$$

将 $\rho=\sqrt{x^2+y^2},\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2}$ 代入上式得

$$\begin{aligned}
&n_{21}x-\sqrt{x^2+y^2}=n_{21}a-a\\
&\sqrt{x^2+y^2}=n_{21}x-n_{21}a+a\\
&x^2+y^2=n_{21}^2x^2+n_{21}^2a^2+a^2+2n_{21}ax-2n_{21}^2ax-2n_{21}a^2
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
y^2&=\left(n_{21}^2-1\right)x^2-\left(n_{21}-1\right)2n_{21}ax+\left(n_{21}-1\right)^2a^2\\
&=\left(n_{21}-1\right)\left[\left(n_{21}+1\right)x^2-2n_{21}ax+\left(n_{21}-1\right)a^2\right]
\end{aligned}$$

移项整理得到

$$\begin{aligned}
&\frac{y^2}{n_{21}-1}=\left(n_{21}+1\right)x^2-2n_{21}ax+\left(n_{21}-1\right)a^2\\
&\frac{\left(n_{21}+1\right)y^2}{n_{21}-1}=\left[\left(n_{21}+1\right)^2x^2-n_{21}a\right]^2-a^2
\end{aligned}$$

上式两端除以 a^2, 移项整理后得

$$\frac{\left(x-\dfrac{n_{21}}{n_{21}+1}a\right)^2}{\left(\dfrac{a}{n_{21}+1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)a^2}=1$$

上式即为式 (9-38). 证毕.

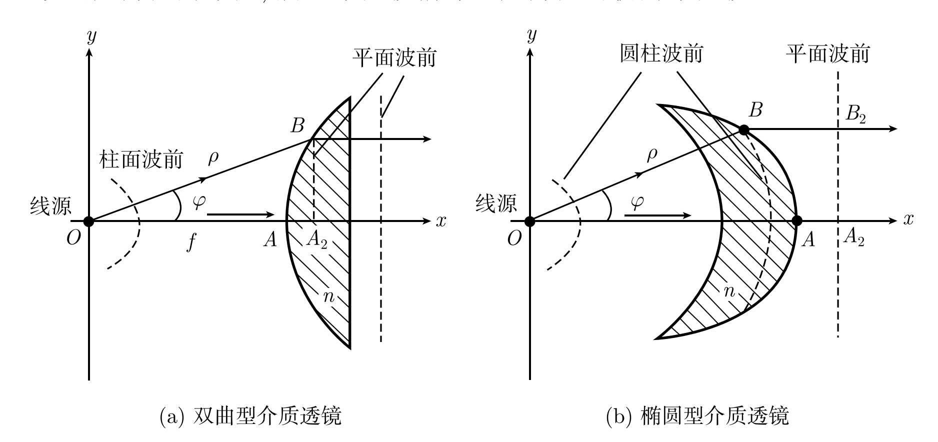
下面讨论式 (9-38) 的两种情形：$n_{21}>1$ 和 $n_{21}<1$.

情形一：当 $n_{21}>1$, 式 (9-38) 中 $n_{21}-1>0$, 即 $n_2>n_1$, y^2 项的系数为负号. 设 $n_1=1,n_2=n$, $n_{21}=n_2/n_1=n$ 即左半空间为真空, 并记焦距 a 为 f, 式 (9-37)、式 (9-38) 变为

$$\frac{\rho}{a}=\frac{n-1}{n\cos\varphi-1} \tag{9-39}$$

$$\frac{\left(x-\dfrac{n}{n+1}a\right)^2}{\left(\dfrac{a}{n+1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)a^2}=1 \tag{9-40}$$

式 (9-40) 是式 (9-39) 的直角坐标形式, 为二次曲线中的双曲线. 相应介质透镜如图 9-12(a) 所示, 介质透镜的前界面为双曲线, 圆柱波前进入介质后变换为平面波前. 设透镜的后界面为平面, 所以平面波前穿出后界面时仍为平面波.



(a) 双曲型介质透镜　　　　(b) 椭圆型介质透镜

图 9-12　介质透镜将球面波前变换为平面波前

情形二：当 $n_{21}<1$, 式 (9-38) 中 $n_{21}-1<0$, 即 $n_2<n_1$, y^2 项的系数为正号. 设 $n_2=1, n_1=n$, 即右半空间为真空, 式 (9-38) 变为

$$\frac{\left(x-\dfrac{1}{n+1}a\right)^2}{\left(\dfrac{na}{n+1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)a^2}=1 \tag{9-41}$$

式 (9-41) 为二次曲线中的椭圆, 相应介质透镜如图 9-12(b) 所示. 设介质透镜的前界面为圆柱形, 使得线源发出的圆柱波前进入介质后仍为圆形波前. 透镜的后界面为式 (9-41) 确定的椭圆, 其左侧介质折射率为 n, 右侧空气折射率等于 1, 圆柱波前经过椭圆界面将转换为平面波前.

如果波源为点源, 可将式 (9-38) 中 y^2 项改换为 (y^2+z^2), 代表以 x 轴为旋转对称的双曲型或椭圆型介质透镜. 激光微机械技术可将光纤端面直接加工成各种形状的微透镜. 旋转对称的双曲型光纤端接透镜可以使光纤输出聚焦, 如图 9-13 所示, 再耦合到后续元器件.

上述介质透镜也可以修改为阶梯式介质透镜. 由于进入如图 9-12(a) 所示介质透镜内部的波前已经变换为平面, 所以按照阶梯形状除去介质后将不会改变射线的

平行特性 (准直性), 如图 9-14 所示. 此外, 由于切割使得从焦点到达透镜外平面波前之间各平行射线彼此光程不再相等, 如图 9-14 所示中的射线 1 和射线 2. 如果切割厚度适当, 使得射线 1 和射线 2 之间相位差为 2π整数倍, 则仍可保持平行射线在垂直于 x 轴的平面上具有相同相位. 所以, 切割厚度应当满足以下条件：

$$nk_0\Delta x = k_0\Delta x + m\cdot 2\pi$$

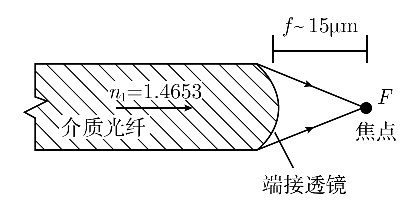


图 9-13　光纤端接透镜

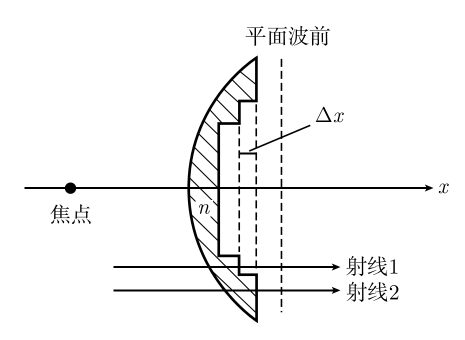


图 9-14　阶梯式双曲型介质透镜

式中 m 为整数. 由上式有

$$(n-1)\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta x = m\cdot 2\pi$$

即

$$\Delta x = \frac{m\lambda_0}{n-1} \tag{9-42}$$

如果双曲型介质透镜为旋转对称, 所切割阶梯部分为环状. 这种阶梯式介质透镜既减轻了介质透镜的重量, 也保持了原有介质透镜的波前变换作用.

9.3.2　介质透镜口径场的幅值分布

讨论如图 9-12(a) 所示双曲型介质透镜的口径面场分布. 透镜前界面方程如式 (9-37) 所示, 这里改记 $n_{21}=n$, $a=f$, 即为

$$\rho = \frac{(n-1)f}{n\cos\varphi - 1} \tag{9-43}$$

线源位于坐标原点 O. 考虑由 O 点发出的射线管, 张角为 $\mathrm{d}\varphi$, 与 x 轴夹角为φ, 如图 9-15 所示. 设介质透镜为无耗, 根据能量守恒, 线源在 φ 到$\mathrm{d}\varphi$角度范围内的辐射能量等于出射射线管在 y 至 $y+\mathrm{d}y$ 范围内的能量 (这里, 忽略了介质分界面的反射), 即

$$U(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = P(y)\,\mathrm{d}y \tag{9-44}$$

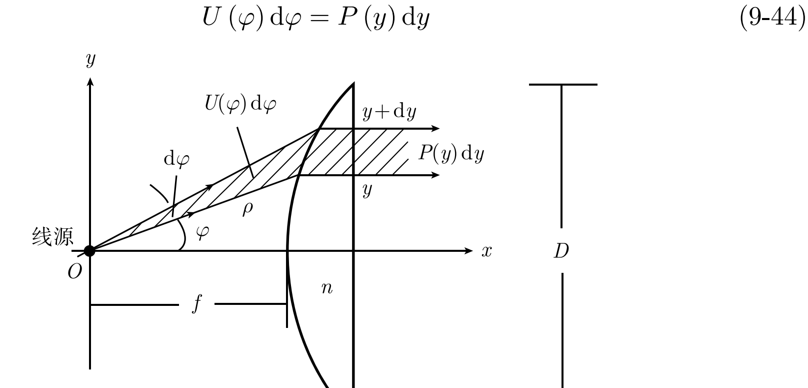


图 9-15　双曲型介质透镜的口径场

式中, $U(\varphi)$ 代表线源辐射的角分布特性, $P(y)$ 正比于 $|E(y)|^2$, 代表口径面上波的强度分布. 将式 (9-43) 求导得

$$\mathrm{d}\rho = \frac{n(n-1)f\sin\varphi}{(n\cos\varphi-1)^2}\mathrm{d}\varphi \tag{9-45}$$

由于 $y=\rho\sin\varphi$, 所以

$$\mathrm{d}y = \sin\varphi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

式 (9-43)、式 (9-45) 代入上式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= \sin\varphi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{n(n-1)f\sin^2\varphi}{(n\cos\varphi-1)^2}\mathrm{d}\varphi + \frac{(n-1)f\cos\varphi}{(n\cos\varphi-1)}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{(n-1)f}{(n\cos\varphi-1)^2}[n\sin^2\varphi + (n\cos\varphi-1)\cos\varphi]\mathrm{d}\varphi \\
&= (n-1)f\frac{n-\cos\varphi}{(n\cos\varphi-1)^2}\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

上式代入式 (9-44) 得

$$P(y)\,\frac{(n-1)\,f\,(n-\cos\varphi)}{(n\cos\varphi-1)^2}\mathrm{d}\varphi = U(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

即

$$P\left(y\right)=\frac{\left(n\cos\varphi-1\right)^{2}}{\left(n-1\right)f\left(n-\cos\varphi\right)}U\left(\varphi\right) \tag{9-46}$$

式 (9-46) 给出介质透镜口径面上波的强度分布和线源辐射角分布之间关系. 当 $y=0,\varphi=0$, 有 $P\left(0\right)=U\left(0\right)/f$. 由于 $P\left(y\right)$ 正比于 $\left|E\left(y\right)\right|^{2}$, 上式可得口径面的场分布为

$$\frac{E\left(y\right)}{E\left(y=0\right)}=\sqrt{\frac{P\left(y\right)}{P\left(0\right)}}=\frac{n\cos\varphi-1}{\sqrt{\left(n-1\right)\left(n-\cos\varphi\right)}}\sqrt{\frac{U\left(\varphi\right)}{U\left(0\right)}} \tag{9-47}$$

根据式 (9-43), 可得

$$y=\rho\sin\varphi=\frac{(n-1)f\sin\varphi}{n\cos\varphi-1} \tag{9-48}$$

设线源辐射为各向同性, 即 $U\left(\varphi\right)$ 等于常数, 和角度无关, 由式 (9-47) 和式 (9-48) 可得在口径面上场分布是从中心到边缘逐渐减小, 为锥度分布, 如图 9-8 所示.

9.4　介质球的几何光学分析

9.4.1　均匀介质球的散射和彩虹

设均匀介质球半径为 a, 折射率为 n, 射线进入后产生折射, 如图 9-16 所示. 由于界面的反射和折射, 从 A 点入射的射线, 会从 Q 点出射; 也有在 Q 点反射后从 B 点出射, 等等. 天空彩虹的出现是由于阳光在雾状水滴中的反折射, 可以用球内一次反射后的出射来解释. 设 A 点入射角为 θ_1, 折射角为 θ_2, 则有

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n}{n_0},\sin\theta_2=\frac{1}{n}\sin\theta_1 \tag{9-49}$$

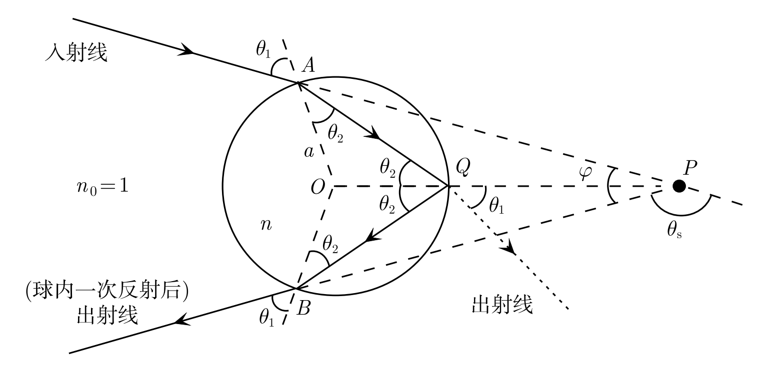


图 9-16　均匀介质球中的射线

式中, $n_0 = 1$ 为空气折射率. 注意图中 $\triangle OAQ$ 和 $\triangle OQB$ 为等腰三角形, 且底边角均为 θ_2. 将入射线延长和 OQ 延长线相交于 P 点; 同时 PB 的延长线也就是出射线. 设入射线和出射线的夹角为 $\angle APB = \varphi$. 由图中三角形的几何关系可得

$$\angle AOQ = 180^\circ - 2\theta_2$$

$$\frac{\varphi}{2} = 180^\circ - \angle AOQ - \theta_1 = 180^\circ - (180^\circ - 2\theta_2) - \theta_1 = 2\theta_2 - \theta_1$$

即

$$\varphi = 2\left(2\theta_2 - \theta_1\right) \tag{9-50}$$

式 (9-50) 表明, 出射线和入射线之间夹角 φ(散射角 $\theta_{\mathrm{s}} = 180^\circ - \varphi$) 与球的半径无关.

由于入射角 θ_1 和角 φ 与入射线到达球面位置 A 有关, 下面求 $\varphi_{\max}$. 令

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta_1} = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_1}\left(2\theta_2 - \theta_1\right) = 2\left(2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}\theta_1} - 1\right) = 0 \tag{9-51}$$

由式 (9-49) 可得

$$n\cos\theta_2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}\theta_1} = \cos\theta_1$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}\theta_1} = \frac{\cos\theta_1}{n\cos\theta_2} = \frac{\cos\theta_1}{n\sqrt{1-\sin^2\theta_2}} = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}}$$

代入式 (9-51) 得

$$2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}\theta_1} - 1 = \frac{2\cos\theta_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} - 1 = 0$$

$$n^2 - \sin^2\theta_1 = 4\cos^2\theta_1 = 4\left(1-\sin^2\theta_1\right)$$

即

$$\sin^2\theta_1 = \frac{1}{3}\left(4-n^2\right)\ ,\ \theta_1 = \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}\left(4-n^2\right)} \tag{9-52}$$

以及由式 (9-49)

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{n}\sin\theta_1 = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{3}\left(4-n^2\right)},\ \theta_2 = \arcsin\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{3}\left(4-n^2\right)}\right] \tag{9-53}$$

式 (9-52)、式 (9-53) 对应于 $\varphi = \varphi_{\max}$ 的入射角和折射角.

算例. 空气中的球形水滴. 水的折射率 $n = 4/3$, 代入式 (9-52)、式 (9-53) 计算得到当入射角 $\theta_1 = \arcsin\sqrt{(4-n^2)/3} = 59.4^\circ$ 时, 水珠内的折射角为 $\theta_2 =$

$\arcsin\left[\sqrt{(4-n^2)/3}/n\right]=40.2°$, 再代入式 (9-50) 得到球内一次反射后出射线和入射线之间夹角 $\varphi_{\max}=2(2\theta_2-\theta_1)=2\times(2\times40.2+59.4)\simeq42°$, 相应散射角为 $\theta_{\mathrm{s}}=180°-\varphi_{\max}=138°$.

另外, 由式 (9-49) 可得从水到空气的全反射临界角为

$$\theta_{2\mathrm{c}}=\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)=\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\simeq48.6°$$

所以当 $\theta_1=59.4°$ 时, θ_2 接近全反射临界角 $\theta_{2,\mathrm{c}}$, 在这个入射角附近形成较强反射. 由于不同颜色光水的折射率略有区别, 致使散射角 θ_{s} 彼此不同, 因而造成天空中的彩虹.

9.4.2 Luneburg 介质透镜

设介质球内折射率为非均匀, 但具有球对称性. 可以证明, 射线进入球内发生弯曲, 但其传播路径位于通过球心的平面内. 所以球内射线轨迹的描写可以采用柱坐标 ρ, θ, 如图 9-17 所示, 球的折射率为 $n(\rho)$. 射线进入球内后发生弯曲, 设射线上点的坐标为 $P(\rho,\theta)$, 则射线轨迹方程为 (Ruck et al., 1970: 193; Born, Wolf, 1980: 123)

$$\theta=\theta_0+an_0\sin\zeta_0\int_a^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{n^2(\rho)\rho^2-n_0a^2\sin^2\zeta_0}} \tag{9-54}$$

式中, a 为球的半径, n_0 为球外介质折射率, ζ_0 为射线在球面的入射角, θ_0 则为射线进入球内表面的角度. 如果 $n(a)\neq n_0$, 即球内表面和球外介质的折射率有突变, 则有 $n(a)\sin\theta_0=n_0\sin\zeta_0$; 如果 $n(a)=n_0$, 即球内表面和球外介质的折射率为连续, 则 $\theta_0=\zeta_0$.

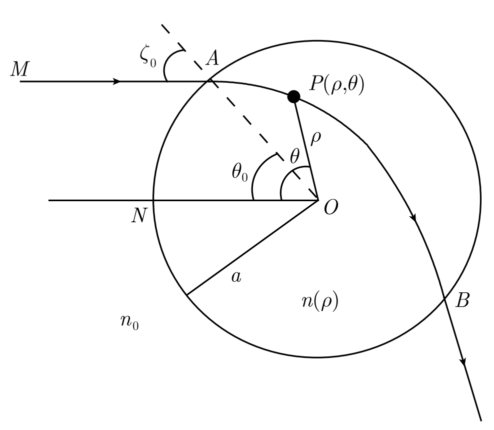


图 9-17 球对称性非均匀介质球中的射线弯曲

Luneberg 透镜的折射率分布由球心呈单调下降并具有以下分布：

$$n_{\text{Luneberg}}(\rho)=\sqrt{2-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2} \tag{9-55}$$

设空气折射率 $n_0=1$, Luneberg 透镜的表面折射率为连续, 上述分布时式 (9-54) 的射线轨迹为

$$1-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta_0=\cos\theta_0\cos(2\theta-\theta_0) \tag{9-56}$$

式 (9-56) 结果如图 9-18 所示, 将 $\theta=\pi$ 代入式 (9-56) 可得

$$1-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta_0=\cos\theta_0\cos(2\pi-\theta_0)=\cos^2\theta_0$$

$$\sin^2\theta_0-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta=0$$

可得 $\rho=a$, 与 θ_0 无关. 表明所有平行于 NO 的入射线经过 Luneberg 球的折射将会聚到 NO 延长线上的球面 B 点, 称为焦点, 如图 9-18 所示.

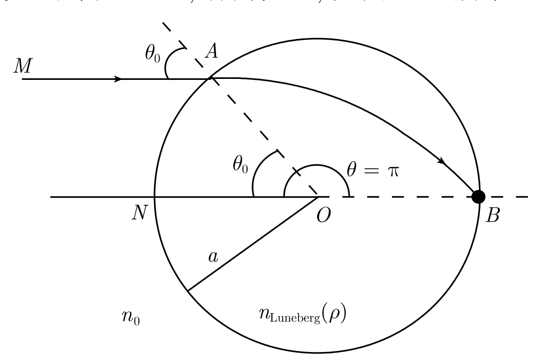


图 9-18　Luneberg 球中的射线弯曲

如果在 Luneberg 介质球的半球面上涂复金属反射面, 如图 9-19 所示, 这时从

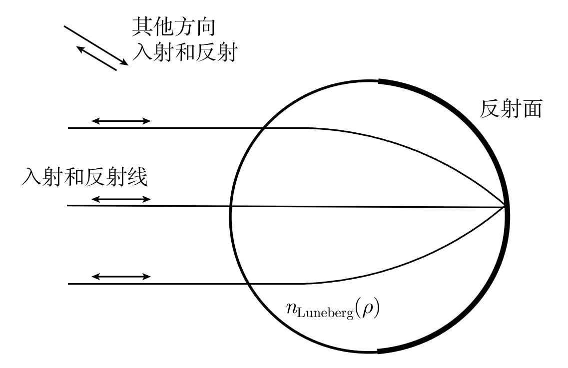


图 9-19　Luneberg 球形反射器

外部入射的平行射线将会聚到反射面上的一点, 经过反射后又由原来路径返回. 这种涂复介质球可以在约 180° 范围内实现对来自任何方向平面波 (准直射线) 的反射, 称为 Luneberg 反射器. 目前在微波毫米波段获得应用. 实际上可用多层分层介质球代替上述连续变化的折射率分布.

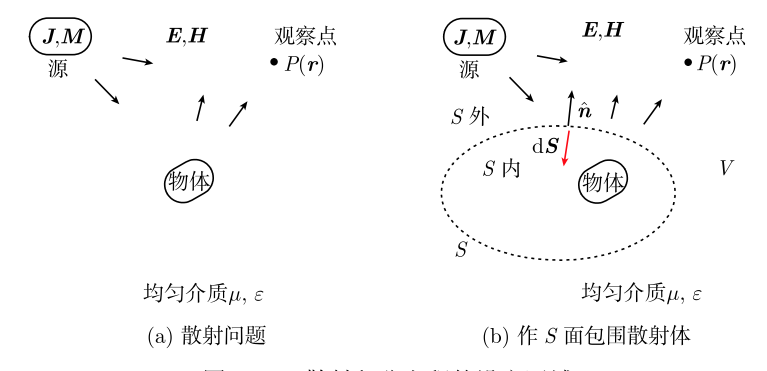
9.5　物理光学近似

9.5.1　散射问题的 Stratton–Chu 积分方程

当源所辐射电磁波照射到物体时会产生散射, 如图 9-20(a) 所示. 下面先考虑散射问题的一般积分方程. 作封闭面 S 包围散射体, 设辐射源均处于 S 面外, 如图 9-20(b) 所示. 根据 7.2 节 Stratton-Chu 方程, 区域 V 中观察点 $P(\boldsymbol{r})$ 处的电磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = &\iiint\limits_V \left[\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G + \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\nabla'G\right]\mathrm{d}V \\ &- \oiint\limits_S \{\mathrm{i}\omega\mu[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G + [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G + [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\} \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = &\iiint\limits_V \left[\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')G + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\nabla G + \frac{\rho_m(\boldsymbol{r}')}{\mu}\nabla'G\right]\mathrm{d}V \\ &+ \oiint\limits_S \{\mathrm{i}\omega\varepsilon[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]G - [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G - [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\end{aligned} \tag{9-57}$$

式中, ∇' 是对源点 $\boldsymbol{r}'$ 的求导, 体积分一项为 S 面外 (体积 V 中) 辐射源的贡献, 面积分一项代表 S 面内物体散射场的贡献, 如图 9-20(b) 所示.



(a) 散射问题　　(b) 作 S 面包围散射体

图 9-20　散射积分方程的设定区域

将空间电磁场区分为入射场和散射场, 于是总场可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\end{aligned} \tag{9-58}$$

式中, 下标 i 表示入射场, s 代表散射场. 式 (9-57) 中积分项为源的辐射, 即为入射场,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) &= \iiint\limits_V \left[\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G + \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\nabla'G\right]\mathrm{d}V \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) &= \iiint\limits_V \left[\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')G + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\nabla G + \frac{\rho_m(\boldsymbol{r}')}{\mu}\nabla'G\right]\mathrm{d}V\end{aligned}\right\} \tag{9-59}$$

式 (9-57) 中面积分一项为 S 面内物体的散射场, 即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &= -\oiint\limits_S \{\mathrm{i}\omega\mu[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G + [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G + [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\} \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &= \oiint\limits_S \{\mathrm{i}\omega\varepsilon[\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]G - [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G - [\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\end{aligned}\right\} \tag{9-60}$$

式中, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向为区域 V 的外法向, 如图 9-20(b) 所示. 若记 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S'$, 这里设法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 指向 S 面外, 式 (9-60) 改写为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &= \oiint\limits_S \{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G + [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G + [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\mathrm{d}S' \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &= \oiint\limits_S \{-\mathrm{i}\omega\varepsilon[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]G + [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G + [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\mathrm{d}S'\end{aligned}\right\} \tag{9-61}$$

对于散射问题, 通常将 S 面取为散射体的表面, 如图 9-21 所示, $\hat{\boldsymbol{n}}$ 即为物体表面的外法向. 散射问题分析中通常入射场为已知, 对于给定物体 (散射体), 需要确定其散射场. 这时, 式 (9-61) 右端积分号下的电磁场为总场, 包含了散射场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}$. 所以式 (9-61) 是积分方程, 分别称为电场积分方程和磁场积分方程.

9.5.2 理想导体散射的积分方程

如果物体为理想导体 (PEC), 其表面满足边界条件,

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}|_S &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}|_S &= 0\end{aligned}\right\} \tag{9-62}$$

图 9-21　散射问题中 S 面取为散射体表面

式 (9-62) 代入式 (9-61) 得到

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\rm s}(\boldsymbol{r})&=\oiint_S\{{\rm i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G+[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}{\rm d}S'\\ \boldsymbol{H}_{\rm s}(\boldsymbol{r})&=\oiint_S[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G{\rm d}S'\end{aligned}\right\}\tag{9-63}$$

式 (9-63) 为理想导体散射的电场和磁场积分方程. 上述积分方程可以应用数值方法, 例如矩量法来求解. 下面讨论高频情形的物理光学近似方法.

9.5.3　物理光学近似：理想导体情形

设散射体尺寸远大于入射波长. 物理光学 (PO) 近似有两个基本假设, 其一是照明区一阴影区的划分. 根据入射波照射方向将物体表面区分为照明区和阴影区, 如图 9-22 所示. 同时, 假设阴影区表面总场为零. 则式 (9-61) 变为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\rm s}(\boldsymbol{r})&\simeq\iint_{S_1}\{{\rm i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G+[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G+[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\,{\rm d}S'\\ \boldsymbol{H}_{\rm s}(\boldsymbol{r})&\simeq\iint_{S_1}\{-{\rm i}\omega\varepsilon[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]G+[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G+[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\,{\rm d}S'\end{aligned}\right\}\tag{9-64}$$

(a) 平面波入射情形

(b) 球面波入射情形

图 9-22　物体表面的照明区和阴影区

式中, 积分区域只涉及照明区表面 S_1. 对于理想导体, 式 (9-64) 变为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &\simeq \iint_{S_1}\{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G + [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\,\mathrm{d}S'\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &\simeq \iint_{S_1}[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G\mathrm{d}S'\end{aligned}\right\}\tag{9-65}$$

物理光学近似的第二个假设为切平面近似. 当物体表面曲率半径远大于波长, 物体照明区表面的总场等于该点切平面处入射波和反射波之和, 其中反射波可以按照半空间反射 Fresnel 公式计算. 如果物体是理想导体, 由电场切向分量为零的边界条件 (9-62),

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}|_{S_1} = \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}})|_{S_1} = 0$$

由此可得照明区表面的散射 (反射) 电场切向分量为

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}|_{S_1} = -\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|_{S_1}\tag{9-66}$$

此外, 根据 2.2 节所述理想导体平面的反射特性, 表面处磁场切向分量和电场法向分量分别为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}|_{S_1} = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|_{S_1}\\ &\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}|_{S_1} = \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}})|_{S_1} = 2\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|_{S_1}\\ &\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}|_{S_1} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}|_{S_1}\\ &\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}|_{S_1} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}})|_{S_1} = 2\,\hat{\boldsymbol{n}}\times E_{\mathrm{i}}|_{S_1}\end{aligned}\right\}\tag{9-67}$$

式 (9-67) 代入式 (9-65) 得到

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &\simeq 2\iint_{S_1}\{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')]G + [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')]\nabla'G\}\mathrm{d}S'\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &\simeq 2\iint_{S_1}[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'G\mathrm{d}S'\end{aligned}\right\}\tag{9-68}$$

由此可见, 采用物理光学近似使积分方程 (9-63) 化简为定积分的计算, 积分范围为理想导体表面的照明区 S_1. 式 (9-68) 第一式的积分中既有电场又有磁场, 而式 (9-68) 第二式只涉及磁场, 比第一式要简单. 所以理想导体散射分析时用磁场公式比较方便. 在用式 (9-68) 第二式求得散射场的磁场后, 散射场的电场可以用无源时谐场 Maxwell 方程得到. 对于远区散射场, 利用远区场的平面波特性由远区磁场得出电场则更为简便.

下面, 考虑入射波为平面波以及远区散射场的特殊情形. 设入射平面波为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{H}_{0}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right] \tag{9-69}$$

$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$ 为入射波矢量. 由 6.5 节所给出的远区 Green 函数近似,

$$\begin{aligned}G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)&=\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\\&\simeq\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\exp\left(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\\&=\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\end{aligned} \tag{9-70}$$

式中, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}=k\hat{\boldsymbol{r}}$ 为散射波矢量. 远区场情形下算子 ∇ 可替换为

$$\nabla\rightarrow\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}} \tag{9-71}$$



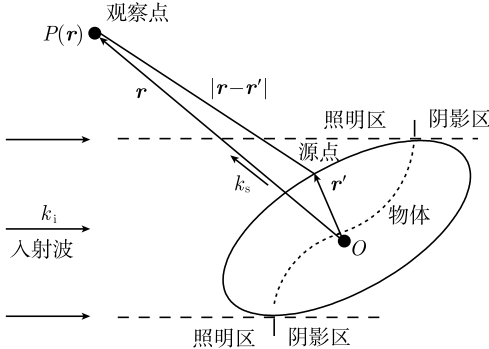


图 9-23　物体表面的照明区和阴影区

所以, 远区 Green 函数的梯度为

$$\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\nabla' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{9-72}$$

式中, ∇ 和 ∇' 分别为对观察点和源点求导. 代入式 (9-68) 第二式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}\right)&=2\iint\limits_{S_1}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\times\nabla' G\mathrm{d}S'\\&=-\mathrm{i}2\iint\limits_{S_1}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{0}\exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\right]\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\&=-\mathrm{i}\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{2\pi r}\iint\limits_{S_1}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{0}\right]\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0]\times\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_\mathrm{s}-\boldsymbol{k}_\mathrm{i})\cdot\boldsymbol{r}']\mathrm{d}S' \tag{9-73}$$

只要已知理想导体物体外形尺寸以及入射波和散射波方向就可以完成式 (9-73) 积分获得散射场.

特别, 对于后向散射, 即散射波方向刚好和入射波方向相反, $\boldsymbol{k}_\mathrm{s}=-\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$, 式 (9-73) 化简为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_\mathrm{s}-\boldsymbol{k}_\mathrm{i})\cdot\boldsymbol{r}']\mathrm{d}S' \\
&= \mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\exp(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \\
&= -\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}[\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{H}_0)-\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})]\exp(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \\
&= \mathrm{i}\boldsymbol{H}_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}(\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\exp(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'
\end{aligned} \tag{9-74}$$

式 (9-74) 中的最后一等式用到入射波为平面波, $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{H}_0=0$ 的特性. 式 (9-74) 表明, 物理光学近似下后向散射波的磁场和入射波磁场彼此平行, 具有相同的极化特性. 所以后向散射公式 (9-74) 也可以写成标量式,

$$H_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}H_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}(\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\exp(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{9-75}$$

9.5.4 物理光学近似：介质物体情形

应用中 PO 近似已推广用于介质物体. 这时, 两条基本假设中关于照明区一阴影区的假设不变; 但在切平面近似中反射波的计算需要用第 2 章所讨论的半空间介质 Fresnel 反射系数.

目前, 也有将 PO 近似推广用于涂层物体的散射计算. 这时在切平面近似中反射场的计算需要用第 2 章所讨论的分层介质的反射系数.

9.5.5 物理光学近似的适用性

物理光学 (PO) 近似在电大尺寸理想导体的散射计算中, 对镜面反射方向的散射计算较为准确, 偏离镜面反射方向越远误差越大. 对于后向散射, PO 近似只能得到同极化散射场, 不能获得散射场的交叉极化分量. 另外, PO 近似是一种高频方法, 如果物体尺寸和波长相近, 不宜采用 PO 近似方法计算.

考虑到物体表面的多次反射, 已经发展有迭代物理光学 (iterative physical optics, IPO) 近似方法. 当物体表面存在劈尖或边缘时, Ufimtsev 提出边缘绕射形成

物理光学绕射理论 (physical theory of diffraction, PTD). 目前, 物理光学方法结合其后续发展已成为一种广泛应用的高频方法, 有多种软件用于散射和 RCS 计算.

9.6　理想导体散射的物理光学计算

9.6.1　理想导体矩形板的单站散射

理想导体矩形平板边长为 $a \times b$. 设线极化平面波垂直入射, $\boldsymbol{H}_0 = \hat{\boldsymbol{y}} H_0$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{i} = -\hat{\boldsymbol{z}} k$, 如图 9-24 所示, 求后向散射散射截面. 由式 (9-75) 计算后向散射场, 其中 $\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -k = -2\pi/\lambda$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}' = 0$, 代入后得

$$\begin{aligned}
H_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i} H_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r} \iint_{S_1} (\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \exp(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}') \mathrm{d}S' \\
&= \mathrm{i} H_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r} \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \int_{-a/2}^{a/2} (-k)\, \mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{i}kH_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r} ab \\
&= -\mathrm{i}kH_0 ab \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}
\end{aligned} \tag{9-76}$$

由式 (8-60) 得垂直入射时板的后向散射截面为

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \left(4\pi r^2 \frac{|\boldsymbol{H}_\mathrm{s}|^2}{|\boldsymbol{H}_\mathrm{i}|^2} \right) = \frac{k^2 A^2}{\pi} = \frac{4\pi A^2}{\lambda^2} \tag{9-77}$$

式中, $A = ab$ 为板的面积. 式 (9-77) 表明, 垂直入射时后向散射截面和平板面积平方成正比, 和波长平方成反比 (Harrington, 1961: 138).

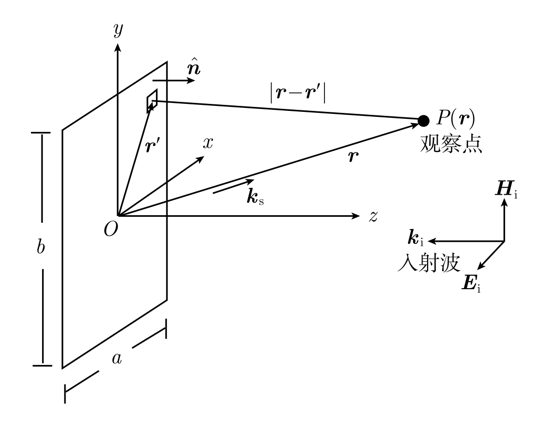


图 9-24　理想导体平板的散射：垂直入射

下面考虑斜入射时的后向散射, 见图 9-25. 由于 $\boldsymbol{k}_\mathrm{s}=-\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}&=-\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\\&=-\left(\hat{\boldsymbol{x}}k_{\mathrm{s}x}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{\mathrm{s}y}+\hat{\boldsymbol{z}}k_{\mathrm{s}z}\right)\\&=-k\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)\\ \boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}'&=-\left(k_{\mathrm{s}x}x'+\hat{\boldsymbol{y}}k_{\mathrm{s}y}y'\right)\end{aligned}$$

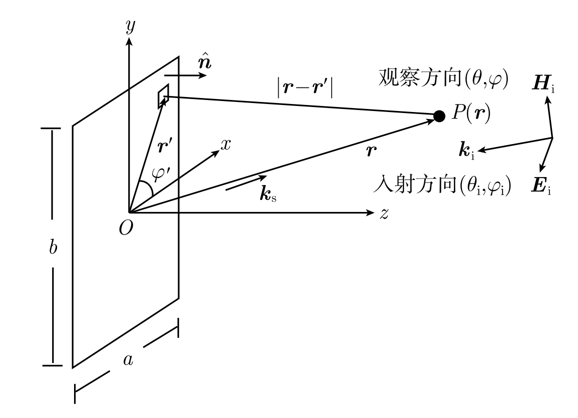


图 9-25　理想导体平板的散射：斜入射

式中, (θ,φ) 为散射方向, 以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}&=-k\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\\&=-k\cos\theta\end{aligned}$$

代入式 (9-75) 得到

$$\begin{aligned}H_\mathrm{s}\left(\boldsymbol{r}\right)&=\mathrm{i}H_0\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{2\pi r}\iint\limits_{S_1}\left(\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)\exp\left(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\\&=-\mathrm{i}H_0k\cos\theta\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{2\pi r}\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left(-2\mathrm{i}k_{\mathrm{s}y}y'\right)\mathrm{d}y'\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(-2\mathrm{i}k_{\mathrm{s}x}x'\right)\mathrm{d}x'\\&=-\mathrm{i}H_0kA\cos\theta\frac{\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{2\pi r}\frac{\sin\left(k_{\mathrm{s}x}a/2\right)}{\left(k_{\mathrm{s}x}a/2\right)}\frac{\sin\left(k_{\mathrm{s}y}b/2\right)}{\left(k_{\mathrm{s}y}b/2\right)}\end{aligned}\tag{9-78}$$

式中, $A=ab$ 为板的面积. 由式 (8-60) 得斜入射时板的后向散射截面为

$$\sigma=\lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{\left|\boldsymbol{H}_\mathrm{s}\right|^2}{\left|\boldsymbol{H}_\mathrm{i}\right|^2}\right)=\frac{\left(kA\right)^2\cos^2\theta}{\pi}\left[\frac{\sin\left(k_{\mathrm{s}x}a/2\right)}{\left(k_{\mathrm{s}x}a/2\right)}\frac{\sin\left(k_{\mathrm{s}y}b/2\right)}{\left(k_{\mathrm{s}y}b/2\right)}\right]^2\tag{9-79}$$

当$\theta=0$, 式 (9-79) 中 $\lim\limits_{\xi\to0}\left[(\sin\xi)/\xi\right]=1$, 式 (9-78)、式 (9-79) 退化为垂直入射时的后向散射结果式 (9-76) 和式 (9-77).

9.6.2 理想导体矩形板的双站散射

矩形板的双站散射需要用式 (9-73) 计算. 先考虑垂直入射情形, 如图 9-24, $\boldsymbol{H}_0 = \hat{\boldsymbol{y}} H_0$, $\boldsymbol{k}_{\rm i} = -\hat{\boldsymbol{z}} k$. 式 (9-73) 中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_{\rm s} &= k\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}} k_{{\rm s}x} + \hat{\boldsymbol{y}} k_{{\rm s}y} + \hat{\boldsymbol{z}} k_{{\rm s}z} \\
&= k\left(\hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right) \\
(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_0) \times \boldsymbol{k}_{\rm s} &= kH_0\left(\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}}\right) \times \left(\hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right) \\
&= kH_0\left(-\hat{\boldsymbol{x}}\right) \times \left(\hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right) \\
&= kH_0\left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}' = \hat{\boldsymbol{x}} x' + \hat{\boldsymbol{y}} y' \\
&\boldsymbol{k}_{\rm i} \cdot \boldsymbol{r}' = 0 \\
&(\boldsymbol{k}_{\rm s} - \boldsymbol{k}_{\rm i}) \cdot \boldsymbol{r}' = (\hat{\boldsymbol{x}} k_{{\rm s}x} + \hat{\boldsymbol{y}} k_{{\rm s}y} + \hat{\boldsymbol{z}} k_{{\rm s}z}) \cdot \boldsymbol{r}' = k_{{\rm s}x} x' + k_{{\rm s}y} y'
\end{aligned} \tag{9-80}
$$

代入式 (9-73) 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\rm s}(\boldsymbol{r}) &= -{\rm i}\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r} \iint_{S_1} (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_0) \times \boldsymbol{k}_{\rm s} \exp[-{\rm i}(\boldsymbol{k}_{\rm s} - \boldsymbol{k}_{\rm i}) \cdot \boldsymbol{r}'] {\rm d}S' \\
&= -{\rm i}\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r} kH_0\left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\right) \\
&\quad \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-{\rm i}k_{{\rm s}y} y')\,{\rm d}y' \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-{\rm i}k_{{\rm s}x} x')\,{\rm d}x' \\
&= -{\rm i}kH_0\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\right)\frac{\sin(k_{{\rm s}x}a/2)}{k_{{\rm s}x}/2}\frac{\sin(k_{{\rm s}y}b/2)}{k_{{\rm s}y}/2} \\
&= -{\rm i}kH_0 A\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\right)\frac{\sin(k_{{\rm s}x}a/2)}{(k_{{\rm s}x}a/2)}\frac{\sin(k_{{\rm s}y}b/2)}{(k_{{\rm s}y}b/2)}
\end{aligned} \tag{9-81}
$$

式中, $A = ab$ 为板的面积, $k_{{\rm s}x}, k_{{\rm s}y}$ 如式 (9-80), $k_{{\rm s}x} = k\sin\theta\cos\varphi, k_{{\rm s}y} = \sin\theta\sin\varphi$. 利用矢量关系,

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}} &= \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi \\
\hat{\boldsymbol{y}} &= \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi \\
\hat{\boldsymbol{z}} &= \hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta
\end{aligned}
$$

可以由式 (9-81) 得到散射场的θ, φ分量,

$$
H_{{\rm s}\theta}(\boldsymbol{r}) = -{\rm i}kH_0 A\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\left(\sin^2\theta\sin\varphi + \cos^2\theta\sin\varphi\right)\frac{\sin(k_{{\rm s}x}a/2)}{(k_{{\rm s}x}a/2)}\frac{\sin(k_{{\rm s}y}b/2)}{(k_{{\rm s}y}b/2)}
$$

$$= -\mathrm{i}kH_0A\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\sin\varphi\frac{\sin(k_{\mathrm{s}x}a/2)}{(k_{\mathrm{s}x}a/2)}\frac{\sin(k_{\mathrm{s}y}b/2)}{(k_{\mathrm{s}y}b/2)}$$

$$H_{\mathrm{s}\varphi}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}kH_0A\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}(\cos\theta\cos\varphi)\frac{\sin(k_{\mathrm{s}x}a/2)}{(k_{\mathrm{s}x}a/2)}\frac{\sin(k_{\mathrm{s}y}b/2)}{(k_{\mathrm{s}y}b/2)} \tag{9-82}$$

垂直入射时的双站散射截面为

$$\sigma = \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|^2}\right) = \frac{(kA)^2}{\pi}\left(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\right)\left[\frac{\sin(k_{\mathrm{s}x}a/2)}{(k_{\mathrm{s}x}a/2)}\frac{\sin(k_{\mathrm{s}y}b/2)}{(k_{\mathrm{s}y}b/2)}\right]^2 \tag{9-83}$$

当 $\theta=0$, $k_{\mathrm{s}x}=k_{\mathrm{s}y}=0$, 式 (9-83) 中 $\lim\limits_{\xi\to0}[(\sin\xi)/\xi]=1$, 式 (9-82)、式 (9-83) 分别退化为垂直入射时后向散射结果式 (9-76)、式 (9-77).

对于斜入射情形, 见图 9-25, 矩形板的双站散射需要用式 (9-73) 计算, 其中

$$(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{r}' = (k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x})x'+(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y})y'$$

$$(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}} = (\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}$$

代入式 (9-73) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{r}']\mathrm{d}S' \\ &= -\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}A\int_{-a/2}^{a/2}\exp[-\mathrm{i}(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x})x']\,\mathrm{d}x' \\ &\quad\cdot\int_{-b/2}^{b/2}\exp[-\mathrm{i}(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y})y']\,\mathrm{d}x' \\ &= -\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}A\frac{\sin[(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x})a/2]}{(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x})a/2} \\ &\quad\frac{\sin[(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y})b/2]}{(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y})b/2}\end{aligned} \tag{9-84}$$

所以, 由式 (8-60) 得斜入射时板的双站散射截面为

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|^2}\right) \\ &= \frac{\left|\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{H}}_0\right)\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\right|^2}{\pi}(kA)^2\left\{\frac{\sin[(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x})a/2]}{(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x})a/2}\frac{\sin[(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y})b/2]}{(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y})b/2}\right\}^2 \\ &= \frac{k^2A^2}{\pi}P(\theta,\varphi)F(\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{9-85}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{H}}_0$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}$ 为单位矢, 以及

$$\begin{aligned}P(\theta,\varphi)&=\left|\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{H}}_0\right)\times\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}\right|^2\\F(\theta,\varphi)&=\left[\frac{\sin\left[\left(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x}\right)a/2\right]}{\left(k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x}\right)a/2}\frac{\sin\left[\left(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y}\right)b/2\right]}{\left(k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y}\right)b/2}\right]^2\end{aligned}\tag{9-86}$$

分别称为极化因子和方向因子. 方向因子中包含 $(\sin\xi)/\xi$ 函数. 注意到

$$\begin{aligned}k_{\mathrm{s}x}-k_{\mathrm{i}x}&=k\left(\sin\theta\cos\varphi-\sin\theta_\mathrm{i}\cos\varphi_\mathrm{i}\right)\\k_{\mathrm{s}y}-k_{\mathrm{i}y}&=k\left(\sin\theta\sin\varphi-\sin\theta_\mathrm{i}\sin\varphi_\mathrm{i}\right)\end{aligned}\tag{9-87}$$

由式 (9-87) 可得, 当 $k_{\mathrm{s}x}=k_{\mathrm{i}x}$, $k_{\mathrm{s}y}=k_{\mathrm{i}y}$, 方向因子为极大值, 即 $F(\theta,\varphi)_{\max}=1$. 满足式 (9-87) 的解有两个: 方向分别为 $\theta=\theta_\mathrm{i}$, $\varphi=\varphi_\mathrm{i}$ 和 $\theta=\pi-\theta_\mathrm{i},\varphi=\varphi_\mathrm{i}$, 如图 9-26 所示, 图中仅画出入射面 (入射波方向和平面法向所决定的平面) 内的示意. 当 $\theta=\pi-\theta_\mathrm{i},\varphi=\varphi_\mathrm{i}$ 有 $k_{\mathrm{s}x}=k_{\mathrm{i}x}$, $k_{\mathrm{s}y}=k_{\mathrm{i}y}$, 且 $k_{\mathrm{s}z}=k\cos\theta=-k\cos\theta_\mathrm{i}=-k_{\mathrm{i}z}$, 对应于镜面反射. 当 $\theta=\theta_\mathrm{i},\varphi=\varphi_\mathrm{i}$ 有 $k_{\mathrm{s}z}=k\cos\theta=k\cos\theta_\mathrm{i}=k_{\mathrm{i}z}$, 对应于和入射波方向相同的前向散射. 亦即镜面方向和前向散射的方向因子 $F(\theta,\varphi)_{\max}=1$. 实际上, 强的前向散射和入射波叠加从而在平板后面产生阴影.

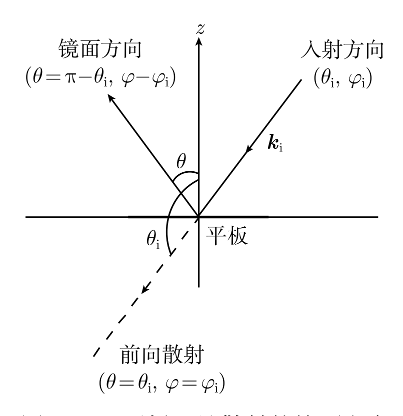


图 9-26　平板双站散射的镜面方向

下面讨论极化因子. 分别考虑两种情形: 入射波磁场 $\hat{\boldsymbol{H}}_0=\hat{\boldsymbol{\varphi}}_\mathrm{i}$ 垂直于入射面和 $\hat{\boldsymbol{H}}_0=\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathrm{i}$ 平行于入射面.

情形一: 设 $\hat{\boldsymbol{H}}_0=\hat{\boldsymbol{\varphi}}_\mathrm{i}$, 这时入射波磁场垂直于入射面, 电场平行于入射面, 称为平行极化. 式 (9-86) 第一式变为

$$\begin{aligned}P^{\|}(\theta,\varphi)&=\left|\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{H}}_0\right)\times\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}\right|^2\\&=\left|\left(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}_\mathrm{i}\right)\times\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)\right|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |[\hat{\boldsymbol{z}} \times (-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi_{\rm i} + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi_{\rm i})] \\
&\quad \times (\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta)|^2 \\
&= |[(-\hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi_{\rm i} - \hat{\boldsymbol{x}}\cos\varphi_{\rm i})] \\
&\quad \times (\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta)|^2 \\
&= |\hat{\boldsymbol{z}}\sin\varphi_{\rm i}\sin\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\varphi_{\rm i}\sin\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi_{\rm i}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi_{\rm i}\cos\theta|^2 \\
&= \sin^2\theta\,(\sin\varphi_{\rm i}\cos\varphi - \cos\varphi_{\rm i}\sin\varphi)^2 + \sin^2\varphi_{\rm i}\cos^2\theta + \cos^2\varphi_{\rm i}\cos^2\theta \\
&= \sin^2\theta\sin^2(\varphi_{\rm i} - \varphi) + \cos^2\theta
\end{aligned} \tag{9-88}
$$

情形二：设 $\hat{\boldsymbol{H}}_0 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\rm i}$, 这时入射波磁场平行于入射面, 电场垂直于入射面, 称为垂直极化. 式 (9-86) 第一式变为

$$
\begin{aligned}
P^{\perp}(\theta,\varphi) &= \left|\left(\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{H}}_0\right) \times \hat{\boldsymbol{k}}_{\rm s}\right|^2 \\
&= \left|\left(\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\rm i}\right) \times (\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta)\right|^2 \\
&= |[\hat{\boldsymbol{z}} \times (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{\rm i}\cos\varphi_{\rm i} + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{\rm i}\sin\varphi_{\rm i} - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_{\rm i})] \\
&\quad \times (\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta)|^2 \\
&= |[(\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{\rm i}\cos\varphi_{\rm i} - \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{\rm i}\sin\varphi_{\rm i})] \\
&\quad \times (\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta)|^2 \\
&= |-\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{\rm i}\cos\varphi_{\rm i}\sin\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{\rm i}\sin\varphi_{\rm i}\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad +\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{\rm i}\cos\varphi_{\rm i}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{\rm i}\sin\varphi_{\rm i}\cos\theta|^2 \\
&= \sin^2\theta\cos^2\theta_{\rm i}\,(\cos\varphi_{\rm i}\cos\varphi + \sin\varphi_{\rm i}\sin\varphi)^2 + \cos^2\theta_{\rm i}\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi_{\rm i} + \sin^2\varphi_{\rm i}\right) \\
&= \cos^2\theta_{\rm i}\left[\sin^2\theta\cos^2(\varphi_{\rm i} - \varphi) + \cos^2\theta\right]
\end{aligned} \tag{9-89}
$$

将式 (9-88)、式 (9-89) 代入式 (9-85) 即可得到垂直和平行极化两种情形的双站散射截面.

下面考虑两个极大值方向, 即前向散射和镜面反射方向上的极化因子. 在前向散射方向, $\theta = \theta_{\rm i}$, $\varphi = \varphi_{\rm i}$, 代入式 (9-88)、式 (9-89) 可得

$$
\begin{aligned}
P^{\parallel}_{\rm forward} &= \sin^2\theta\sin^2(\varphi_{\rm i} - \varphi) + \cos^2\theta = \cos^2\theta_{\rm i} \\
P^{\perp}_{\rm forward} &= \sin^2\theta\cos^2\theta_{\rm i}\cos^2(\varphi_{\rm i} - \varphi) + \cos^2\theta_{\rm i}\cos^2\theta \\
&= \sin^2\theta_{\rm i}\cos^2\theta_{\rm i} + \cos^2\theta_{\rm i}\cos^2\theta_{\rm i} \\
&= \cos^2\theta_{\rm i}
\end{aligned} \tag{9-90}
$$

在镜面散射方向, $\theta = \pi - \theta_{\rm i}$, $\varphi = \varphi_{\rm i}$, 代入式 (9-88)、式 (9-89) 可得

$$
P^{\parallel}_{\rm specular} = \sin^2\theta\sin^2(\varphi_{\rm i} - \varphi) + \cos^2\theta = \cos^2(\pi - \theta_{\rm i}) = \cos^2\theta_{\rm i}
$$

$$\begin{aligned}P_{\text{specular}}^{\perp} &= \sin^2\theta\cos^2\theta_{\text{i}}\cos^2(\varphi_{\text{i}}-\varphi)+\cos^2\theta_{\text{i}}\cos^2\theta \\ &= \sin^2(\pi-\theta_{\text{i}})\cos^2\theta_{\text{i}}+\cos^2\theta_{\text{i}}\cos^2(\pi-\theta_{\text{i}}) \\ &= \sin^2\theta_{\text{i}}\cos^2\theta_{\text{i}}+\cos^2\theta_{\text{i}}\cos^2\theta_{\text{i}} \\ &= \cos^2\theta_{\text{i}}\end{aligned} \tag{9-91}$$

以上结果表明, 对于垂直和平行极化两种情形, 镜面方向和前向散射的极化因子相同. 由于镜面方向和前向散射的方向因子 $F(\theta,\varphi)_{\max}=1$, 再将式 (9-90)、式 (9-91) 代入式 (9-85) 便得到斜入射时双站散射截面的极大值为

$$\sigma_{\max}^{\parallel}=\sigma_{\max}^{\perp}=\frac{k^2}{\pi}(A\cos\theta_{\text{i}})^2 \tag{9-92}$$

式中, θ_{i} 为入射角. 式 (9-92) 表明, 镜面方向的散射截面随平板面积在镜面反射方向的投影的平方而减小. 关于矩形板双站散射的讨论见 Knott 等 (2004).

9.6.3　理想导体圆板的单站散射

设理想导体圆板半径为 a, 如图 9-27 所示, 考虑线极化平面波斜入射时的后向散射 (Ishimaru, 1991: 307). 由于 $\boldsymbol{k}_{\text{s}}=-\boldsymbol{k}_{\text{i}}$, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_{\text{i}} &= -\boldsymbol{k}_{\text{s}} \\ &= -(\hat{\boldsymbol{x}}k_{\text{s}x}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{\text{s}y}+\hat{\boldsymbol{z}}k_{\text{s}z}) \\ &= -k(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta) \\ \boldsymbol{k}_{\text{i}}\cdot\boldsymbol{r}' &= -(k_{\text{s}x}x'+\hat{\boldsymbol{y}}k_{\text{s}y}y')=-k\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')\end{aligned}$$

式中, $(\theta,\ \varphi)$ 为散射方向, 以及

$$\boldsymbol{k}_{\text{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=-k(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}$$

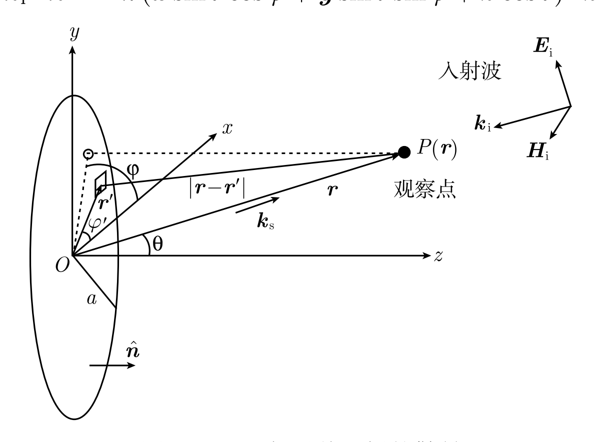


图 9-27　理想导体圆板的散射

$$= -k\cos\theta$$

注意 PO 近似下后向散射波和入射波为同极化, 以上结果代入式 (9-75) 得

$$\begin{aligned}H_{\rm s}(\boldsymbol{r}) &= {\rm i}H_0\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\iint\limits_{S_1}(\boldsymbol{k}_{\rm i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\exp(2{\rm i}\boldsymbol{k}_{\rm i}\cdot\boldsymbol{r}'){\rm d}S' \\ &= -{\rm i}H_0k\cos\theta\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\int_0^a\rho'{\rm d}\rho' \\ &\quad\times\int_0^{2\pi}\exp[-{\rm i}2k\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]\,{\rm d}\varphi'\end{aligned}\tag{9-93}$$

计算式 (9-93) 中积分需用到 Bessel 函数公式,

$$J_n(z) = \frac{{\rm i}^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-{\rm i}(z\cos\varphi-n\varphi)]\,{\rm d}\varphi$$

$$\int_0^x zJ_0(z)\,{\rm d}z = xJ_1(x)$$

代入式 (9-93) 得

$$\begin{aligned}H_{\rm s}(\boldsymbol{r}) &= -{\rm i}H_0k\cos\theta\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\int_0^a\rho'{\rm d}\rho'\int_0^{2\pi}\exp[-{\rm i}2k\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]\,{\rm d}\varphi' \\ &= -{\rm i}H_0k\cos\theta\frac{\exp({\rm i}kr)}{2\pi r}\cdot 2\pi\int_0^a\rho' J_0(2k\rho'\sin\theta)\,{\rm d}\rho' \\ &= -{\rm i}H_0k\cos\theta\frac{\exp({\rm i}kr)}{r}\cdot\frac{1}{(2k\sin\theta)^2}(2ka\sin\theta)J_1(2ka\sin\theta) \\ &= -{\rm i}H_0k\cos\theta\frac{\exp({\rm i}kr)}{r}\cdot a\frac{J_1(2ka\sin\theta)}{2k\sin\theta} \\ &= -{\rm i}H_0ka^2\cos\theta\frac{\exp({\rm i}kr)}{r}\cdot\frac{J_1(2ka\sin\theta)}{2ka\sin\theta}\end{aligned}\tag{9-94}$$

所以由式 (8-60) 得斜入射时板的后向散射截面为

$$\sigma = \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{H}_{\rm s}|^2}{|\boldsymbol{H}_{\rm i}|^2}\right) = 4(ka\cos\theta)^2\cdot(\pi a^2)\left[\frac{J_1(2ka\sin\theta)}{2ka\sin\theta}\right]^2\tag{9-95}$$

式中, πa^2 为圆板面积. 后向散射截面用圆板面积归一化得

$$\frac{\sigma}{\pi a^2} = \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{H}_{\rm s}|^2}{|\boldsymbol{H}_{\rm i}|^2}\right) = 4(ka\cos\theta)^2\left[\frac{J_1(2ka\sin\theta)}{2ka\sin\theta}\right]^2\tag{9-96}$$

注意式 (9-96) 中 $\lim\limits_{u\to 0}[J_1(u)/u] = 0.5$. 由式 (9-96) 可得垂直入射 $\theta = 0$ 时的后向散射截面为

$$\frac{\sigma}{\pi a^2} = (ka)^2 \quad \text{或} \quad \sigma = \frac{k^2A^2}{\pi}\tag{9-97}$$

式中, $A = \pi a^2$, 和矩形平板垂直入射时的后向散射截面 (9-77) 相同.

9.6.4　理想导体球的单站散射

设导体球半径为 a, 线极化平面波沿 $(-z)$ 入射, $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}=-\hat{\boldsymbol{z}}k$, 如图 9-28 所示. 根据 PO 近似, 照明区为图中右半球面. 对于后向散射, $\boldsymbol{k}_\mathrm{s}=-\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$. 对于球面, 后向散射 PO 公式 (9-74) 或式 (9-75) 中 $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=-k\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=-k\cos\theta$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}'=-ka\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=-ka\cos\theta$. 代入式 (9-75) 得

$$
\begin{aligned}
H_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}H_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint_{S_1}(\boldsymbol{k}_i\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\exp(2\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \\
&= \mathrm{i}H_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}a^2\sin\theta(-k\cos\theta)\exp(-\mathrm{i}2ka\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \mathrm{i}kH_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}2\pi a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\exp(-\mathrm{i}2ka\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta)
\end{aligned}
\tag{9-98}
$$

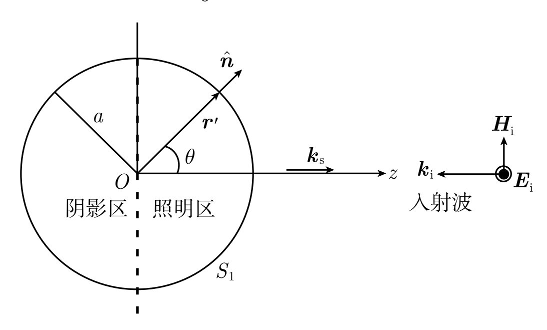


图 9-28　理想导体球的散射

式 (9-98) 中的积分结果为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\exp(-\mathrm{i}2ka\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2ka}\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp(-\mathrm{i}2ka)-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right]
\end{aligned}
\tag{9-99}
$$

式 (9-99) 的积分计算如下：令 $u=\cos\theta$ 代入积分得

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\exp(-\mathrm{i}2ka\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= \int_1^0 u\exp(-\mathrm{i}2kau)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{-\mathrm{i}2ka}\int_0^1 u\mathrm{d}\left[\exp(-\mathrm{i}2kau)\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2ka}\left\{\left[u\exp(-\mathrm{i}2kau)\right]_{u=0}^{u=1}-\int_0^1\exp(-\mathrm{i}2kau)\,\mathrm{d}u\right\} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2ka}\left\{\exp(-\mathrm{i}2ka)-\frac{1}{-\mathrm{i}2ka}\left[\exp(-\mathrm{i}2ka)-1\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}2ka}\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2ka\right)-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right]$$

以上结果即式 (9-99). 证毕.

式 (9-99) 代入式 (9-98) 得到

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}kH_0a^2\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2ka\right)-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right] \\ &= H_0a\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{2r}\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2ka\right)-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right] \end{aligned} \tag{9-100}$$

单站散射截面为

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}|^2}{|\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}|^2}\right)=\pi a^2\left|\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2ka\right)-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right|^2 \\ &= \pi a^2\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2ka\right)-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right]\left[\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(+\mathrm{i}2ka\right)+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right] \\ &= \pi a^2\left\{\left[1+\frac{1}{(2ka)^2}\right]+\frac{1}{(2ka)^2}\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(-\mathrm{i}2ka\right)-\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}2ka}\right)\exp\left(+\mathrm{i}2ka\right)\right]\right\} \\ &= \pi a^2\left[1+\frac{1}{2(ka)^2}-\frac{\sin(2ka)}{ka}-\frac{\cos(2ka)}{2(ka)^2}\right] \end{aligned} \tag{9-101}$$

用球的截面积归一后得

$$\frac{\sigma}{\pi a^2}=1-\frac{\sin(2ka)}{ka}+\frac{1}{2(ka)^2}-\frac{\cos(2ka)}{2(ka)^2} \tag{9-102}$$

可见在 $ka\to\infty$ 时 $\sigma\simeq\pi a^2$. 高频时 RCS 围绕这一平均值振荡变化 (Knott et al., 1988: 128).

9.7　物理光学照明区边界的修正项

9.7.1　表面不连续处的电荷守恒定律

设物体表面具有特性突变的分界线 C, 如图 9-29 所示. 当分界线两侧的面电流法向分量出现不连续时, 分界线 C 上会出现线电荷. 对于面电荷、面电流, 电荷守恒定律为

$$\nabla_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=-\frac{\partial\rho_e}{\partial t}=\mathrm{i}\omega\rho_e \tag{9-103}$$

式中, ∇_{s} 表示面散度. 在表面 S_1 和 S_2 的分界线 C 处作小矩形回路, 如图 9-29 所示, 在 S_1 和 S_2 两侧回路宽度均为 $\Delta a/2$. 式 (9-103) 对于此回路的积分形式为

$$\left(\boldsymbol{J}_{1s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1+\boldsymbol{J}_{2s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2\right)\Delta l=\mathrm{i}\omega\left(\rho_e\Delta l\Delta a\right) \tag{9-104}$$

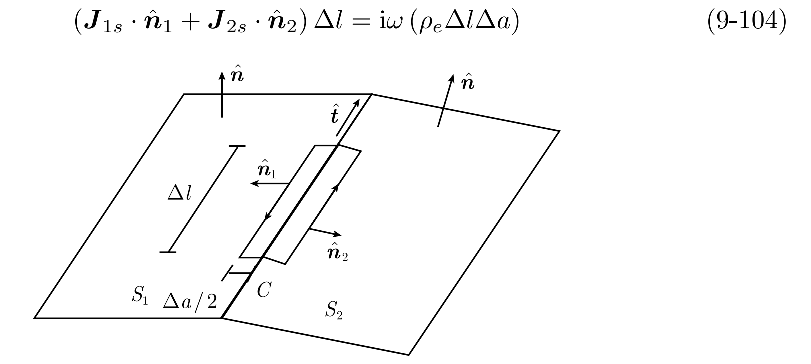


图 9-29　物体表面存在突变时的分界线

式中, $\hat{\boldsymbol{n}}_1$, $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ 为矩形小回路两侧的外法向单位矢. 由于回路窄边 Δa 很小, 上式中只给出通过宽边 Δl 流出的电流. 当回路窄边宽度 Δa 趋于零, 若分界线上有线电荷, 式 (9-104) 中 $\lim\limits_{\Delta a\to 0}(\rho_e\Delta a)=\tau_e$, τ_e 为线电荷密度. 于是式 (9-104) 变为

$$\boldsymbol{J}_{1s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1+\boldsymbol{J}_{2s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2=\mathrm{i}\omega\tau_e \tag{9-105}$$

式 (9-105) 给出面电流法向分量的不连续和分界线上线电荷的关系式.

9.7.2　物理光学近似的修正线积分项

物理光学 (PO) 近似是基于电磁场 Huygens 原理的一种高频近似方法. 它类似于衍射问题中的 Kirchhoff 近似, 都是通过物理假设将封闭面积分转换为有限表面的积分, 并以入射波代替总场, 避开积分方程的求解.

PO 近似中将物体表面 S 区分为照明区 S_1 和阴影区 S_2, 且阴影区表面的总场等于零, 如图 9-30 所示. 这时, Huygens 原理 (9-61) 中对物体整个表面的积分变为对照明区的积分, 如式 (9-64), 所以,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})&=\iint\limits_{S_1}\left\{\mathrm{i}\omega\mu\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\right]G+\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\right]\times\nabla' G+\left[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\right]\nabla' G\right\}\mathrm{d}S'\\\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})&=\iint\limits_{S_1}\left\{-\mathrm{i}\omega\varepsilon\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\right]G+\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\right]\times\nabla' G+\left[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\right]\nabla' G\right\}\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{9-106}$$

式中, S_1 为照明区.

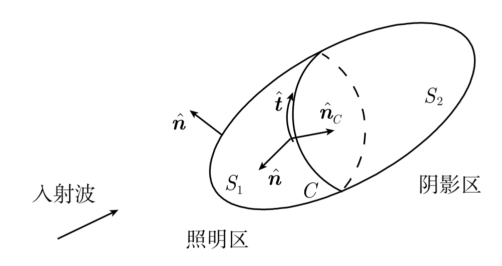


图 9-30 照明区和阴影区分界线 C

$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)$—— 等效面电流密度;

$\rho_{\mathrm{e}}=\varepsilon\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}'\right)$—— 等效面电荷密度;

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}'\right)$—— 等效面磁流密度;

$\rho_{\mathrm{m}}=\mu\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)$—— 等效面磁荷密度.

所以, 式 (9-106) 右端各项分别代表面电荷、面电流以及面磁荷、面磁流对散射场的贡献.

Kottler(1923) 指出, 由于阴影区电磁场假设为零, 等效面电流和面磁流在 S_1 的边线 C 处发生突变. 这一突变和电荷守恒定律相矛盾, 同时积分所得到的电磁场也不满足 Maxwell 方程, 所以需要对其作修正 (Stratton, 1941: 468). 在照明区–阴影区分界线 C 处作小矩形回路, 如图 9-31 所示. 由于阴影区 S_2 中面电流等于零, 电荷守恒定律 (9-105) 在此小矩形回路变为

$$\mathrm{i}\omega\tau_{\mathrm{e}}=\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\boldsymbol{J}_{1\mathrm{s}} \tag{9-107}$$

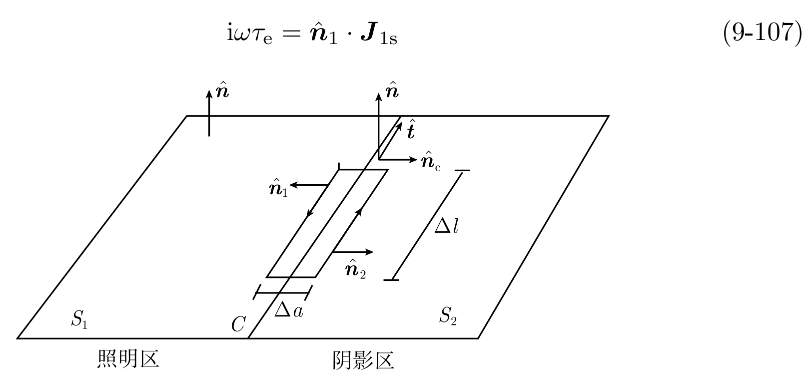


图 9-31 照明区–阴影区分界线 C 处小回路

式 (9-107) 表明, 面电流法向的不连续在边线 C 上产生线电荷 τ_e. 设 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 S_1 面法向, $\hat{\boldsymbol{t}}$ 为边线 C 的切向单位矢, $\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{c}}=-\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 为垂直于分界线 C 的外法向, 如图 9-31 所示. 可见, $\hat{\boldsymbol{n}}_1=\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{t}}$. 代入式 (9-107) 可得线电荷为

$$\tau_e=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\boldsymbol{J}_{1s}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{t}}\right)\cdot\boldsymbol{J}_{1s}=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{J}_{1s}\right) \tag{9-108}$$

参照式 (9-106) 第一式右端中面电荷一项的表示式, 上述线电荷对电场的贡献为

$$\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon}\oint_C \tau_e \nabla' G \mathrm{d}l$$

将式 (9-108) 代入得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{\varepsilon}\oint_C \tau_e \nabla' G \mathrm{d}l=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C\left[\hat{\boldsymbol{t}}\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{J}_{1s})\right]\nabla' G\mathrm{d}l\\
&=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C\left[\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{J}_{1s})\right]\nabla' G=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C\left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\{\hat{\boldsymbol{n}}\times[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\}\right)\nabla' G\\
&=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C\left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\{\hat{\boldsymbol{n}}[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\}\right)\nabla' G\\
&=+\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]\nabla' G
\end{aligned}\tag{9-109}$$

同样, 根据对偶关系可得照明区边线 C 上的线磁荷为

$$\tau_m=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\boldsymbol{M}_{1s}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{t}}\right)\cdot\boldsymbol{M}_{1s}=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\hat{\boldsymbol{t}}\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{M}_{1s})\tag{9-110}$$

参照式 (9-106) 第二式右端中面磁荷一项的表示式, 同样可得上述线磁荷对磁场的贡献为

$$\boldsymbol{H}_C(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\oint_C\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]\nabla' G\tag{9-111}$$

将上述线电荷和线磁荷的贡献分别补充到式 (9-106) 中得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r})=&\iint\limits_{S_1}\{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G+[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla' G+[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla' G\}\mathrm{d}S'\\
&+\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]\nabla' G\\
\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r})=&\iint\limits_{S_1}\{-\mathrm{i}\omega\varepsilon[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]G+[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla' G+[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla' G\}\mathrm{d}S'\\
&-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\oint_C\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]\nabla' G
\end{aligned}\tag{9-112}$$

式 (9-112) 为 PO 近似的 Kottler 修正积分公式. 经过修正后, 式 (9-112) 的电磁场满足 Maxwell 方程, 有关证明可见 Stratton(1941: 469).

9.7.3 远区散射场情形

对于远区散射场, 式 (9-112) 中的线积分项可以转变为面积分 (Ruck et al., 1970: 52). 在远区, 由式 (9-70) 和式 (9-72), Green 函数及其梯度可近似为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\simeq\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{r}')$$
$$\nabla' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\simeq-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{9-113}$$

代入式 (9-112) 中的线积分项并利用矢量分析中的 Stokes 定理可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}]\nabla' G\\
&=\frac{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\oint_C[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}]G\\
&=\frac{-\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\omega\varepsilon}\oint_C G\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\
&=\frac{-\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\omega\varepsilon}\iint\limits_{S_1}\nabla'\times[G\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S'\\
&=\frac{-\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\omega\varepsilon}\iint\limits_{S_1}[G\nabla'\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\times\nabla' G]\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S'\\
&=\frac{\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\omega\varepsilon}\iint\limits_{S_1}[-\mathrm{i}\omega\varepsilon G\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\times\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}G]\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S'\\
&=\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\iint\limits_{S_1}G\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'+\frac{\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\iint\limits_{S_1}G\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S'
\end{aligned}\tag{9-114}$$

式 (9-114) 已将围绕边线 C 的线积分转换为沿照明区表面 S_1 的面积分. 将以上二式代入式 (9-112) 第一式, 并记 $\boldsymbol{k}_\mathrm{s}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}$, 得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r})=&\iint\limits_{S_1}\{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G-[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}G-[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}G\}\mathrm{d}S'\\
&+\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\iint\limits_{S_1}G[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S'+\frac{\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\iint\limits_{S_1}G\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S'\\
=&\iint\limits_{S_1}\Bigg(\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]G-[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}G\\
&+\frac{\boldsymbol{k}_\mathrm{s}}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\{G\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\}\Bigg)\mathrm{d}S'\\
\simeq&\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\iint\limits_{S_1}\Bigg([\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]-\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}\left\{\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\right\}\\
&-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{s}\Bigg)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'
\end{aligned}\tag{9-115}$$

利用对偶关系可得

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_1}\left\{\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]-\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\left(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\right\}\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S' \tag{9-116}$$

式 (9-115) 和式 (9-116) 为 PO 近似下经 Kottler 修正后的远区场公式. 注意：式中积分号下的电磁场为总场, 包含入射场和散射场.

9.7.4　理想导体散射的远区场

下面将远区场公式用于理想导体. 根据理想导体边界条件式 (9-62), PO 公式 (9-115)、式 (9-116) 分别变为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}\right)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_1}\left(\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]-\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\left\{\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\right\}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}\right)&=-\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_1}\left\{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\right\}\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\\&=-\frac{\mathrm{i}k\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{4\pi r}\iint\limits_{S_1}\left\{\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\right\}\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{9-117}$$

将理想导体照明区表面切平面近似式 (9-67) 代入式 (9-117) 后得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})&\simeq\frac{\mathrm{i}\omega\mu\exp(\mathrm{i}kr)}{2\pi r}\iint\limits_{S_1}\left(\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]-\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\left\{\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\right\}\right)\\&\quad\cdot\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\\\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{r}\right)&\simeq-\frac{\mathrm{i}k\exp\left(\mathrm{i}kr\right)}{2\pi r}\iint\limits_{S_1}\left\{\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right]\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\right\}\exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{9-118}$$

比较式 (9-118)、式 (9-73) 可见二者一致. 所以, 对于理想导体, PO 近似的线积分项修正不改变远区场结果.

9.8　物理光学近似下简单目标散射的 MATLAB 计算

本节给出用 MATLAB 计算物理光学近似下几种理想导体目标的 RCS. 参见 9.6 节.

9.8.1 理想导体矩形板的单站 RCS

设理想导体矩形板边长为 $a=2\lambda, b=4\lambda$, 入射波频率 1×10^{10}Hz, 即 $\lambda=3$ cm, 在 $\varphi=\pi/4$ 入射面内的单站 RCS 如图 9-32 所示.

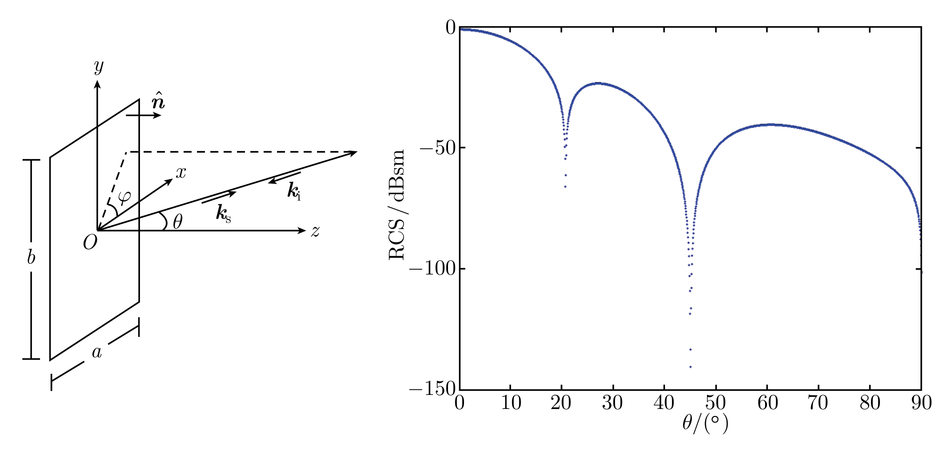


图 9-32 理想导体矩形板的单站 RCS

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          物理光学近似计算理想导体矩形板的单站散射
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
f=1.0e10;                          %入射平面电磁波频率
C0=3.0e8;                          %真空波速
wavelength=C0/f;                   %真空波长
k=2*pi/wavelength;                 %波矢量大小
a=2*wavelength;                    %矩形板边长
b=4*wavelength;                    %矩形板边长
A=a*b;                             %矩形板面积
phi=pi/4;
T=(k*A)^2/pi;
for theta=0.002:0.001:pi/2;        %方向角循环
    ksx=k*sin(theta)*cos(phi);
    ksy=k*sin(theta)*sin(phi);
    ksxa=sin(ksx*a/2)/(ksx*a/2);
    ksyb=sin(ksy*b/2)/(ksy*b/2);
    sigma=T*(cos(theta))^2*(ksxa*ksyb)^2;
```

```
    sigma=10*log10(sigma);                %计算散射宽度
    plot(theta/pi*180,sigma,'.')
    hold on
end
xlabel('\theta','FontSize',20,'FontName','bold')
ylabel('RCS (dB)','FontSize',20,'FontName','bold')
```

9.8.2　理想导体矩形板的双站 RCS

设理想导体矩形板边长为 $a = 4\lambda, b = 5\lambda$, 电磁波垂直于板面入射, 入射波电场沿 y 方向极化, 频率 1×10^{10}Hz, 即 $\lambda = 3$ cm. 在 $\varphi = 0(H$ 面, 星号) 和 $\varphi = 90°(E$ 面, 圆圈) 面内的双站 RCS 如图 9-33 所示.

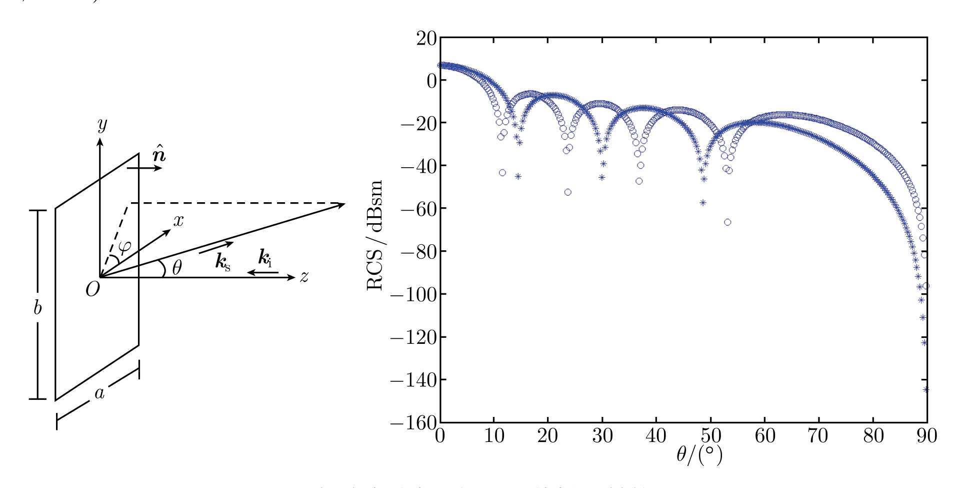


图 9-33　电磁波垂直于矩形导体板入射的双站 RCS

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%        理想导体散射的物理光学计算 (矩形板) 电磁波垂直入射时的双站散射
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
f=1.0e10;                          %入射平面电磁波频率
C0=3.0e8;                          %真空波速
wavelength=C0/f;                   %真空波长
k=2*pi/wavelength;                 %波矢量大小
a=4*wavelength;                    %矩形板边长
b=5*wavelength;                    %矩形板边长
A=a*b;                             %矩形板面积
```

```
phi= pi/2;                        %散射线与矩形板法线的夹角
T=(k*A)^2/pi;
for theta=0.002:0.005:pi/2;       %方向角循环
    ksx=k*sin(theta)*cos(phi);
    ksy=k*sin(theta)*sin(phi);
    ksxa=sin(ksx*a/2)/(ksx*a/2);
    ksyb=sin(ksy*b/2)/(ksy*b/2);
    sigma=T*((sin(theta))^2*(sin(phi))^2+(cos(theta))^2)*(ksxa*ksyb)^2;
    sigma=10*log10(sigma);        %计算散射截面
    plot(theta/pi*180,sigma,'*')
    hold on
end
xlabel('\theta','FontSize',20,'FontName','bold')
ylabel('RCS (dB)','FontSize',20,'FontName','bold')
```

9.8.3 理想导体圆板的单站 RCS

设理想导体圆板半径为 $a = 3\lambda$, 入射波频率 1×10^{10}Hz, 即 $\lambda = 3$cm. 单站 RCS(用圆板面积 πa^2 归一) 随 θ 的变化如图 9-34 所示.

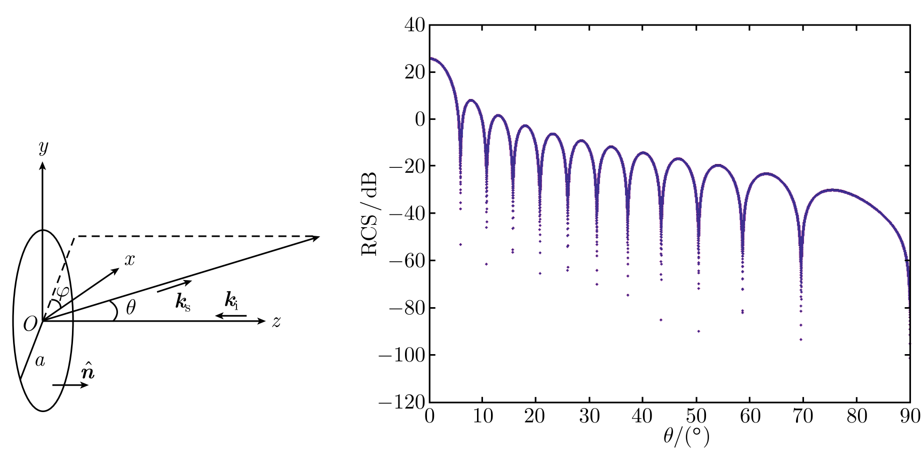


图 9-34 金属圆板的单站 RCS

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     物理光学近似计算理想导体圆板的单站散射
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
f=1.0e10;                           %入射平面电磁波频率
```

```
C0=3.0e8;                              %真空波速
wavelength=C0/f;                       %真空波长
k=2*pi/wavelength;                     %波矢量大小
a=3*wavelength;                        %圆板半径
ka=k*a;
for theta=eps:0.002:pi/2;              %方向角循环
  sigma=4*(ka*cos(theta))^2*(besselj(1,2*ka*sin(theta))/2/ka/sin(theta))^2;
  sigma=10*log10(sigma);               %计算散射截面 (用圆板面积归一)
  plot(theta/pi*180,sigma,'.')
  hold on
end
xlabel('\theta','FontSize',20,'FontName','bold')
ylabel('RCS (dB)','FontSize',20,'FontName','bold')
```

9.8.4 理想导体球的单站 RCS

用物理光学法计算理想导体球单站 RCS(用球的截面积 πa^2 归一) 的结果如图 9-35 所示 (点线); 作为比较, 给出了 Mie 级数的计算结果 (实线). 可见, 只有当球的电尺寸在 $a/\lambda > 2.0$ 的光学区 (高频区), PO 近似和 Mie 级数符合较好; 随着频率增高 (a/λ 增大)RCS 逐渐趋于球的几何截面 πa^2.

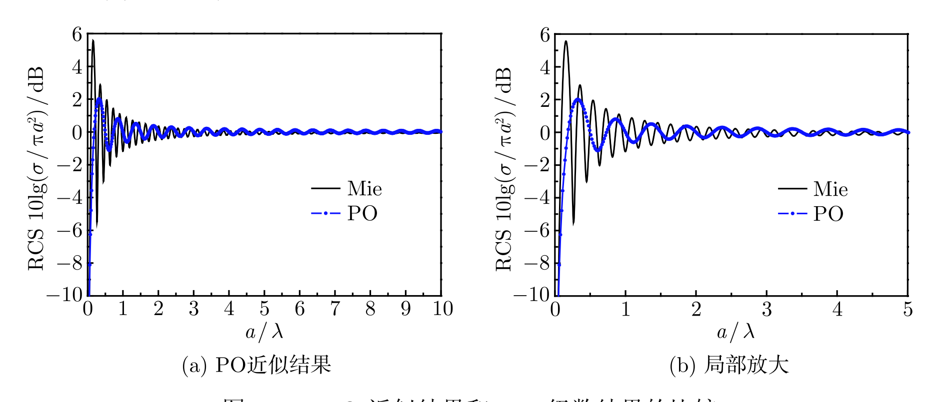


图 9-35　PO 近似结果和 Mie 级数结果的比较

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    物理光学理想导体球单站散射截面 (球的截面积归一)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
for ka=1:0.1:50;
```

```
  sigma=(1+0.5/ka^2-sin(2*ka)/ka-cos(2*ka)/2/ka^2);
  sigma=10*log10(sigma) ;
  plot(ka,sigma,'.')
  hold on
end
xlabel('ka','FontSize',14,'FontName','bold')
ylabel('RCS (dB)','FontSize',14,'FontName','bold')
```

习　题

1. 发射天线距离地面为 h, 接收天线距离地面为 z, 周围介质为空气 ε_0, μ_0. 设发射点和接收点的水平距离为 d, 如图 9-36 所示. 根据几何光学理论到达接收点的有直达波和地面反射波. 假设直达波和反射波均为平面波, 电场为水平极化, 即电场平行于地面 (Kraus, 1984: 698).

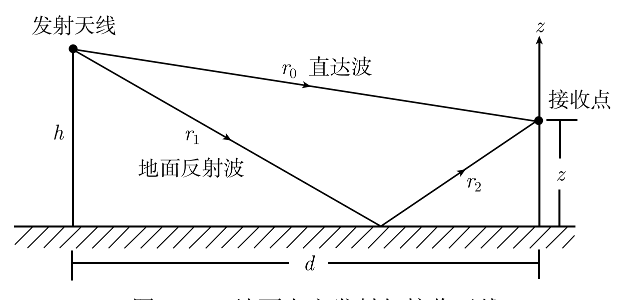


图 9-36　地面上方发射如接收天线

(1) 设地面为理想导体, h =200m, $\lambda = 1$m, d =4km. 接收点的高度变化范围为 $0 < z < 50$m, 试求接收点处直达波和地面反射波的合成电场随高度的变化, 以及合成场为极大值的高度, 并给出图示.

(2) 设地面为土壤介质, $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, 重复以上计算.

【提示】　从发射点的镜像位置作直线连接到接收点即可确定反射点的位置.

2. 介质透镜折射率为 n, 如图 9-37(a) 所示, 右侧平面上覆盖理想导体, 成为反射式透镜. 为了使此透镜将平行射线会聚到焦点 F, 试证透镜的前界面形状为

$$\rho = \frac{(n-1)2a}{(2n-1)\cos\varphi - 1}$$

式中, a 为焦距 (Kraus, 1984: 719).

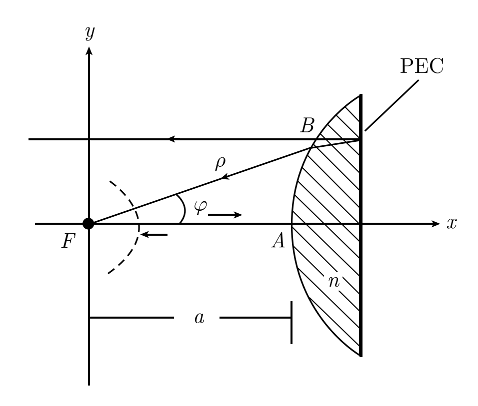
【提示】　由于光线路径可逆, 由焦点 F 发出的射线经过透镜变为准直射线, 如图 9-37(b) 所示. 考虑从焦点 F 出射, 经过透镜折射反射后成为准直射线的两条射线 AQ 和 CP. 设透镜内经过理想导体反射的往返路径近似于平行. 根据等光程原理, 对于图中两条

射线的光程有 $FB + BC + CP = FA + 2n \cdot AD + AQ$, 式中 $CP = AQ$, $FB = \rho, FA = a$, $BC = AD = \rho\cos\varphi - a$, 代入得到

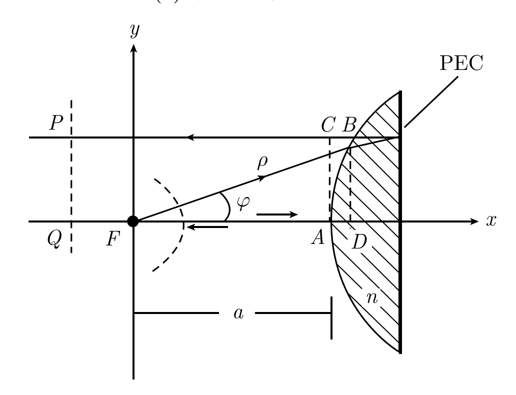
$$\rho + BC = a + 2n \cdot AD$$

$$\rho = a + (2n-1)\,AD = a + (2n-1)\,(\rho\cos\varphi - a)$$

由此可得本题结果.



(a) 平行射线会聚到焦点



(b) 由焦点发出射线变为准直

图 9-37　反射式介质透镜

3. 已知水的折射率对于红光 ($\lambda = 0.7\mu$m) 为 $n = 1.330$, 橙色光 ($\lambda = 0.7\mu$m) 为 $n = 1.333$, 紫色光 ($\lambda = 0.4\mu$m) 为 $n = 1.342$. 参照 9.4.1 节, 试求阳光中这三种颜色光经过水珠后的散射角 θ_s, 以及彩虹中红光和紫光之间的角宽度.

4. 球和矩形板的散射截面 (RCS). PO 近似下, 垂直入射时矩形板的后向 RCS 为式 (9-77),

$$\sigma_{\text{plate}} = \frac{4\pi A^2}{\lambda^2}$$

式中, $A = ab$ 为矩形板面积. 球的后向 RCS 为式 (9-102),

$$\sigma_{\text{sphere}} = \pi a^2$$

式中, a 为球半径. 设矩形板面积为 $A = 2 \times 2 = 4\text{m}^2$, 球的截面面积也等于 $\pi a^2 = 4\text{m}^2$, 球的半径为 $a = \sqrt{4/\pi} = 1.13\text{m}$. 设入射波频率为 10GHz($\lambda = 3\text{cm}$), 试计算板和球的后向 RCS(Kraus, Fleisch, 1999: 355).

5. 设 PEC 圆形板和球的半径都等于 1m, 平面波垂直入射, 利用 PO 近似结果计算它们的后向 RCS(Kraus, Fleisch, 1999: 322).

6. 设矩形板面积为 $a = 1.5\text{m}, b = 2\text{m}$, 入射波斜入射. 试求散射方向$\theta = 30^\circ$、$\varphi = 0$ 和 90° 时的后向 RCS, 并与垂直入射时的后向 RCS 比较.

参考文献

(按照作者姓名汉语拼音或英文字母顺序排列)

[1] Balanis C A. 1989. Advanced Engineering Electromagnetics. New York：John Wiley & Sons

[2] Balanis C A. 1997. Antenna Theory: Analysis and Design. New York：John Wiley & Sons

[3] Bohren C F, Huffman D R. 1983. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. New York：John Wiley & Sons

[4] Born M, Wolf E. 1980. Principle of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. 6th ed. Oxford: Pergamon Press; 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press

[5] Chen H C(陈惠青). 1988. 电磁波理论 —— 无坐标方法. 梁昌洪, 刘鹏程, 李天成译. 北京：电子工业出版社

[6] Elliott R S. 1981. Antenna Theory and Design. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

[7] 傅君眉, 冯恩信. 2000. 高等电磁理论. 西安：西安交通大学出版社

[8] Gaskill J D. 1978. Linear Systems, Fourier Transforms and Optics. New York：John Wiley & Sons

[9] 郭硕鸿. 1997. 电动力学. 第二版. 北京：高等教育出版社

[10] Guru B S, Hiziroglu H R. 2002. Electromagnetic Field Theory Fundamentals. 北京：机械工业出版社

[11] Harrington R F. 1961, 2007 (2nd, ed.). Time-Harmonic Electromagnetic Field. New York：McGraw-Hill (1964. 正弦电磁场. 孟侃译. 上海：上海科学技术出版社)

[12] Ishimaru A, 1991. Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering. Englewood Cliffs: Prentice Hall

[13] Jackson J D. 1999. Classical Electrodynamics. 3rd ed. New York：John Wiley & Sons; 2004. 北京：高等教育出版社

[14] 焦培南, 张忠治. 2007. 雷达环境与电波传播特性. 北京：电子工业出版社

[15] Knott E F, Sheaffer J F, Tuley M T. Radar Cross Section; 1988. 阮颖铮等译. 雷达散射截面. 北京：电子工业出版社; 2004. 2nd ed, Raleigh: SciTech Pub

[16] Kong J A. 2002. Electromagnetic Wave Theory. 北京：高等教育出版社

[17] Kong J A. 2002. Maxwell Equations; 2004. 北京：高等教育出版社

[18] Kraus J D. 1984. Electromagnetics. 3rd ed. New York：McGraw-Hill.

[19] Kraus J D, Fleisch D A. 1999. Electromagnetics with Applications. 5th ed. New York：McGraw-Hill; 2001. 北京：清华大学出版社

[20] Lee C S, Lee S W, Chuang S L. 1985. Plot of modal field distribution in rectangular and circular waveguides. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, MTT-33(3): 271～274

[21] Li, Kai. 2009. Electromagnetic Fields in Stratified Media. Hangzhou：Zhejiang University Press

[22] 刘鹏程. 1991. 工程电磁场简明手册. 北京：高等教育出版社

[23] Millington G, Shearman E D R, Wait J R. 1981. Aperture Antennas and Diffraction Theory. London: Peter Peregrinus Ltd

[24] Raveendranath U, Mathew K T. 1998. New Cavity Perturbation Technique for Measuring Complex Permeability of Ferrite Materials. Microwave and Tech. Lett., 18(4)：241～243

[25] Ruck G T, Barrick D E, Stuart W D et al. 1970. Radar Cross Section Handbook. New York: Plenum Press

[26] 数学手册编写组. 1979. 数学手册. 北京：人民教育出版社

[27] Sodha M S, Srivastava N C. 1981. Microwave Propagation in Ferrimagnetics. New York: Plenum Press

[28] Stratton J A. 1941. Electromagnetic Theory. New York：McGraw-Hill

[29] Wait J R. 1985. Electromagnetic Wave Theory. New York: Harper & Row Publishers

[30] 王一平, 陈达章, 刘鹏程. 1985. 工程电动力学. 西安：西北电讯工程学院出版社

[31] 谢处方, 饶克谨. 1987. 电磁场和电磁波. 第二版. 北京：高等教育出版社; 2006. 第四版. 北京：高等教育出版社

[32] 杨儒贵. 2008. 高等电磁理论. 北京：高等教育出版社

[33] 应嘉年, 顾茂章, 张克潜. 1994. 微波和光导波技术. 北京：国防工业出版社

[34] 张善杰. 2009. 工程电磁理论. 北京：科学出版社

附录 A　矢量分析和场论的若干基本公式

本附录给出本书推导中常用到的矢量分析和场论基本公式.

A1　直角系圆柱系和球坐标系的矢量转换

A1.1　直角系和圆柱坐标系

空间坐标的转换

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\varphi=\dfrac{y}{x}\\ z=z\end{array}\right\}\end{array}\right\}\tag{A1}$$

单位矢量的转换

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\\ \hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\\ \hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{\rho}}=\hat{\boldsymbol{x}}\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi\\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi\\ \hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\tag{A2}$$

矢量分量的转换

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A_x=A_\rho\cos\varphi-A_\varphi\sin\varphi\\ A_y=A_\rho\sin\varphi+A_\varphi\cos\varphi\\ A_z=A_z\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}A_\rho=A_x\cos\varphi+A_y\sin\varphi\\ A_\varphi=-A_x\sin\varphi+A_y\cos\varphi\\ A_z=A_z\end{array}\right\}\end{array}\right\}\tag{A3}$$

A1.2 直角系和球坐标系

空间坐标的转换

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \tag{A4}$$

单位矢量的转换

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi\end{array}\right\}\end{array}\right\} \tag{A5}$$

矢量分量的转换

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A_x = A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \\ A_y = A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \\ A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}A_r = A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta \\ A_\theta = A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta \\ A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi\end{array}\right\}\end{array}\right\} \tag{A6}$$

A1.3 圆柱系和球坐标系

空间坐标的转换：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}r = \sqrt{\rho^2+z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{\rho}{z} \\ \varphi = \varphi\end{array}\right\}\end{array}\right\} \tag{A7}$$

单位矢量的转换：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{\rho}}=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \tag{A8}$$

矢量分量的转换：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A_\rho=A_r\sin\theta+A_\theta\cos\theta\\ A_\varphi=A_\varphi\\ A_z=A_r\cos\theta-A_\theta\sin\theta\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}A_r=A_\rho\sin\theta+A_z\cos\theta\\ A_\theta=A_\rho\cos\theta-A_z\sin\theta\\ A_\varphi=A_\varphi\end{array}\right\}\end{array}\right\} \tag{A9}$$

A2　矢量分析公式

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\\ \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{array}\right\} \tag{A10}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g\\ \nabla\times(f\boldsymbol{A})=\nabla f\times\boldsymbol{A}+f\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=\nabla f\cdot\boldsymbol{A}+f\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\ \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\end{array}\right\} \tag{A11}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\\ \nabla\times\nabla f=0\\ \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\end{array}\right\} \tag{A12}$$

A3　梯度、散度、旋度在不同坐标系中的表示式

A3.1　直角坐标系

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla f=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial f}{\partial z}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\
&\nabla\times\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\
&\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\}\tag{A13}
$$

A3.2　圆柱坐标系

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla f=\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial f}{\partial z}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\
&\nabla\times\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\\
&\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\}\tag{A14}
$$

A3.3　球坐标系

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla f=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial f}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\theta\right)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\\
&\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]+\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}-\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\\
&\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}\right\}\tag{A15}
$$

A4　含两点距离的微分关系式

设空间两点 $P(\boldsymbol{r})$ 和 $Q(\boldsymbol{r}')$, 如图 A1 所示, 可分别称为观察点或场点 $P(\boldsymbol{r})$ 和源点 $Q(\boldsymbol{r}')$. 它们的相对位置矢量和距离为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\hat{\boldsymbol{x}}(x-x')+\hat{\boldsymbol{y}}(y-y')+\hat{\boldsymbol{z}}(z-z')=\hat{\boldsymbol{R}}R\\&R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\end{aligned}\right\}\tag{A16}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{R}}$ 表示单位矢. 算子 ∇ 为对 P 点坐标求导:

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\tag{A17}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3\\&\nabla R=\hat{\boldsymbol{R}}\\&\nabla f(R)=\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\nabla R=\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\hat{\boldsymbol{R}}\end{aligned}\right\}\tag{A18}$$

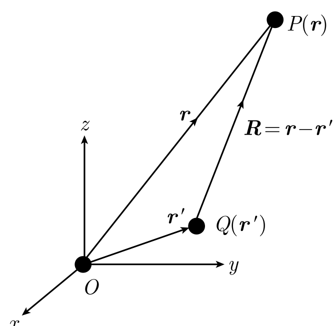


图 A1　空间两点的距离

设算子 ∇' 为对 Q 点坐标求导, 即

$$\nabla'=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z'}\tag{A19}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\nabla'\cdot\boldsymbol{R}=-3=-\nabla\cdot\boldsymbol{R}\\&\nabla' R=-\hat{\boldsymbol{R}}=-\nabla R\\&\nabla' f(R)=\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\nabla' R=-\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\hat{\boldsymbol{R}}=-\nabla f(R)\end{aligned}\right\}\tag{A20}$$

可见, 算子 ∇ 和算子 ∇' 有简单对应关系,

$$\nabla' \to -\nabla \tag{A21}$$

对于自由空间 Green 函数, 其梯度为

$$\begin{aligned}\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \nabla\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R}\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R}\right]\nabla R\\ &= \left(\mathrm{i}k-\frac{1}{R}\right)\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R}\right]\hat{\boldsymbol{R}}\\ &= \left(\mathrm{i}k-\frac{1}{R}\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\mathbf{R}}\\ &= -\nabla' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{A22}$$

更多公式可见王一平等 (1985: 368) 和刘鹏程 (1991: 21).

A5　场论基本积分定理

A5.1　Green 定理

标量 Green 定理为

$$\left.\begin{aligned}&\iiint\limits_V \left(\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi\right)\mathrm{d}V = \oiint\limits_S \varphi\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\psi\right)\\ &\iiint\limits_V \left(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi\right)\mathrm{d}V = \oiint\limits_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi\right)\end{aligned}\right\} \tag{A23}$$

矢量 Green 定理为

$$\left.\begin{aligned}&\iiint\limits_V [(\nabla\times\boldsymbol{Q})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{P})-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q})]\mathrm{d}V = \oiint\limits_S (\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &\iiint\limits_V [\boldsymbol{Q}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P})-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q})]\mathrm{d}V\\ &= \oiint\limits_S (\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}\right\} \tag{A24}$$

以上矢量 Green 定理证明如下. 由 Gauss 定理

$$\iiint\limits_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = \oiint\limits_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

令上式中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}$, 注意到

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}) = (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})$$

可得

$$\iiint\limits_V [(\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] \mathrm{d}V = \oiint\limits_S (\boldsymbol{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式即为式 (A24) 第一式. 交换 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 可得

$$\iiint\limits_V [(\nabla \times \boldsymbol{Q}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P})] \mathrm{d}V = \oiint\limits_S (\boldsymbol{Q} \times \nabla \times \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

二者相减得到

$$\iiint\limits_V [\boldsymbol{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q})] \mathrm{d}V = \oiint\limits_S (\boldsymbol{P} \times \nabla \times \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \times \nabla \times \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式即为式 (A24) 第二式. 证毕.

A5.2 Stokes 定理

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &\iint\limits_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\nabla f) = \oint_L f \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &\iint\limits_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla) \times \boldsymbol{A} = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \tag{A25}$$

式 (A25) 第三式的证明如下：式 (A25) 第三式右端可以改写为

$$\begin{aligned} \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{A} &= \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times (\hat{\boldsymbol{x}} A_x + \hat{\boldsymbol{y}} A_y + \hat{\boldsymbol{z}} A_z) \\ &= \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times (\hat{\boldsymbol{x}} A_x) + \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times (\hat{\boldsymbol{y}} A_y) + \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times (\hat{\boldsymbol{z}} A_z) \\ &= -\hat{\boldsymbol{x}} \times \oint_L A_x \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \hat{\boldsymbol{y}} \times \oint_L A_y \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \hat{\boldsymbol{z}} \times \oint_L A_z \mathrm{d}\boldsymbol{l} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\hat{\boldsymbol{x}} \times \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\nabla A_x) - \hat{\boldsymbol{y}} \times \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\nabla A_y) \\
&\quad - \hat{\boldsymbol{z}} \times \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\nabla A_z) \\
&= -\iint_S \hat{\boldsymbol{x}} \times [\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\nabla A_x)] - \iint_S \hat{\boldsymbol{y}} \times [\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\nabla A_y)] \\
&\quad - \iint_S \hat{\boldsymbol{z}} \times \mathrm{d}\,[\boldsymbol{S} \times (\nabla A_z)] \\
&= -\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,[\hat{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla A_x)] + \iint_S \nabla A_x\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}) \\
&\quad - \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,[\hat{\boldsymbol{y}} \cdot (\nabla A_y)] + \iint_S \nabla A_y\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{y}}) \\
&\quad - \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,[\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla A_z)] + \iint_S \nabla A_z\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}) \\
&= -\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \iint_S \nabla\,[A_x\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{x}})] \\
&\quad - \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \iint_S \nabla\,[A_y\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{y}})] \\
&\quad - \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \iint_S \nabla\,[A_z\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})] \\
&= -\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \iint_S \nabla\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} A_x) \\
&\quad - \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \iint_S \nabla\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} A_y) \\
&\quad - \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \iint_S \nabla\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} A_z) \\
&= -\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \iint_S \nabla\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

另外, 利用矢量分析公式可将式 (A25) 第三式左端写为

$$
\iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla) \times \boldsymbol{A} = -\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \iint_S \nabla\,(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A})
$$

可见, 式 (A25) 第三式左端和右端有相同结果. 证毕.

关于 Stokes 定理第三式的另一种证明. 由 Stokes 定理第一式出发, 令其中矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{C}$ 为常矢量. 代入 Stokes 定理第一式得

$$\iint\limits_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P})]=\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P})$$

根据矢量混合乘积公式 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$, 上式左端改写为

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P})]&=\iint\limits_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P})\\&=-\boldsymbol{C}\cdot\iint\limits_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\cdot\times\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

前式右端改写为

$$\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P})=-\boldsymbol{C}\cdot\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{P}$$

代入 Stokes 定理第一式, 得

$$-\boldsymbol{C}\cdot\iint\limits_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{C}\cdot\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{P}$$

式中, $\boldsymbol{C}$ 为任意常矢量, 于是可得 Stokes 定理第三式. 证毕.

A5.3　Gauss 定理

$$\left.\begin{aligned}\iiint\limits_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V&=\oint\!\!\!\oint\limits_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\\iiint\limits_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V&=\oint\!\!\!\oint\limits_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}\\\iiint\limits_V(\nabla f)\mathrm{d}V&=\oint\!\!\!\oint\limits_S f\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}\right\}\tag{A26}$$

式中, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 指向体积 V 的外法向.

索　引

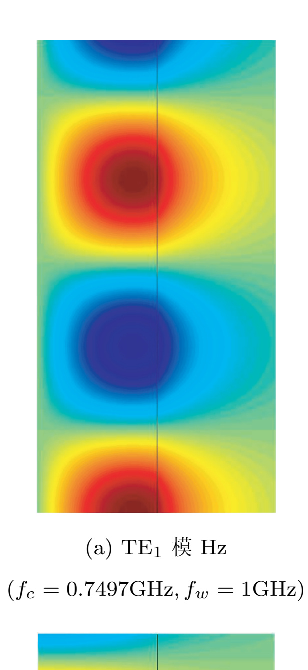
《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元, 侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树, 等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮, 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁, 陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘 辽, 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元, 等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡, 李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04

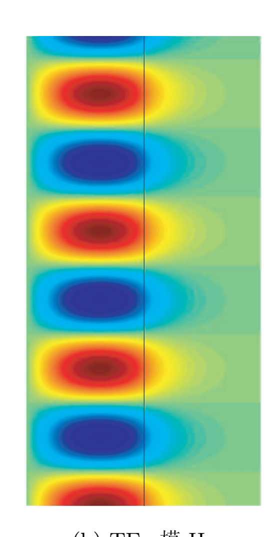
31. 高等结构动力学(第二版)　　李东旭 编著　　2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册)　　梁敬魁 编著　　2011.03
33. 量子计算与量子信息原理　　Giuliano Benenti 等著
　　——第一卷：基本概念　　王文阁, 李保文 译　　2011.03
34. 近代晶体学(第二版)　　张克从　著　　2011.05
35. 引力理论(上、下册)　　王永久　著　　2011.06
36. 低温等离子体　　B. M. 弗尔曼, И. M. 扎什京 编著
　　——等离子体的产生、工艺、问题及前景　　邱励俭 译　　2011.06
37. 量子物理新进展　　梁九卿，韦联福　著　　2011.08
38. 电磁波理论　　葛德彪，魏　兵　著　　2011.08

彩　　图



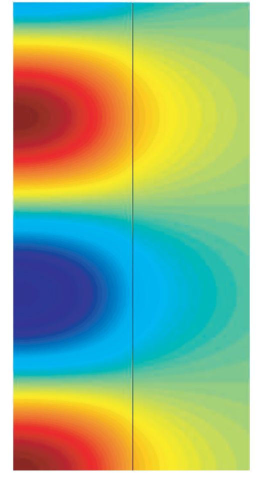
(a) TE_1 模 Hz

$(f_c = 0.7497\text{GHz}, f_w = 1\text{GHz})$



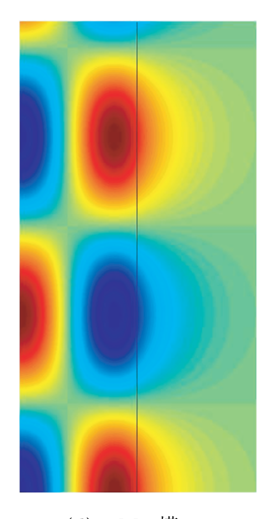
(b) TE_1 模 Hz

$(f_c = 0.7497\text{GHz}, f_w = 2\text{GHz})$



(c) TM_0 模 Ez

$(f_c = 0, f_w = 0.8\text{GHz})$

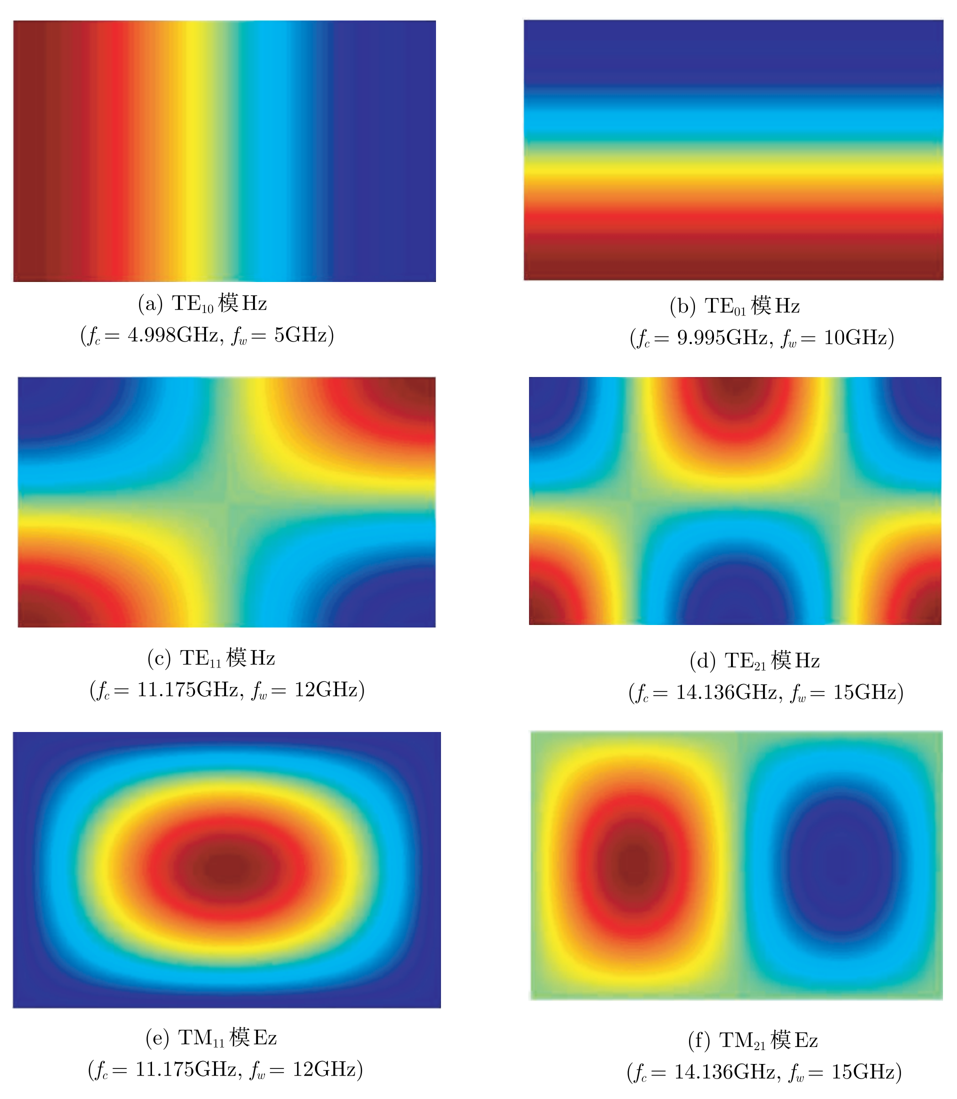


(d) TM_1 模 Ez

$(f_c = 1.4993\text{GHz}, f_w = 1.5\text{GHz})$

彩图 1　平板镜像波导几种传播模的纵向截面场分布 (介质层厚 0.1m, $\varepsilon_r = 2.0$)

(f_c为截止频率, f_w为工作频率)



(a) TE_{10} 模 Hz ($f_c = 4.998$GHz, $f_w = 5$GHz)

(b) TE_{01} 模 Hz ($f_c = 9.995$GHz, $f_w = 10$GHz)

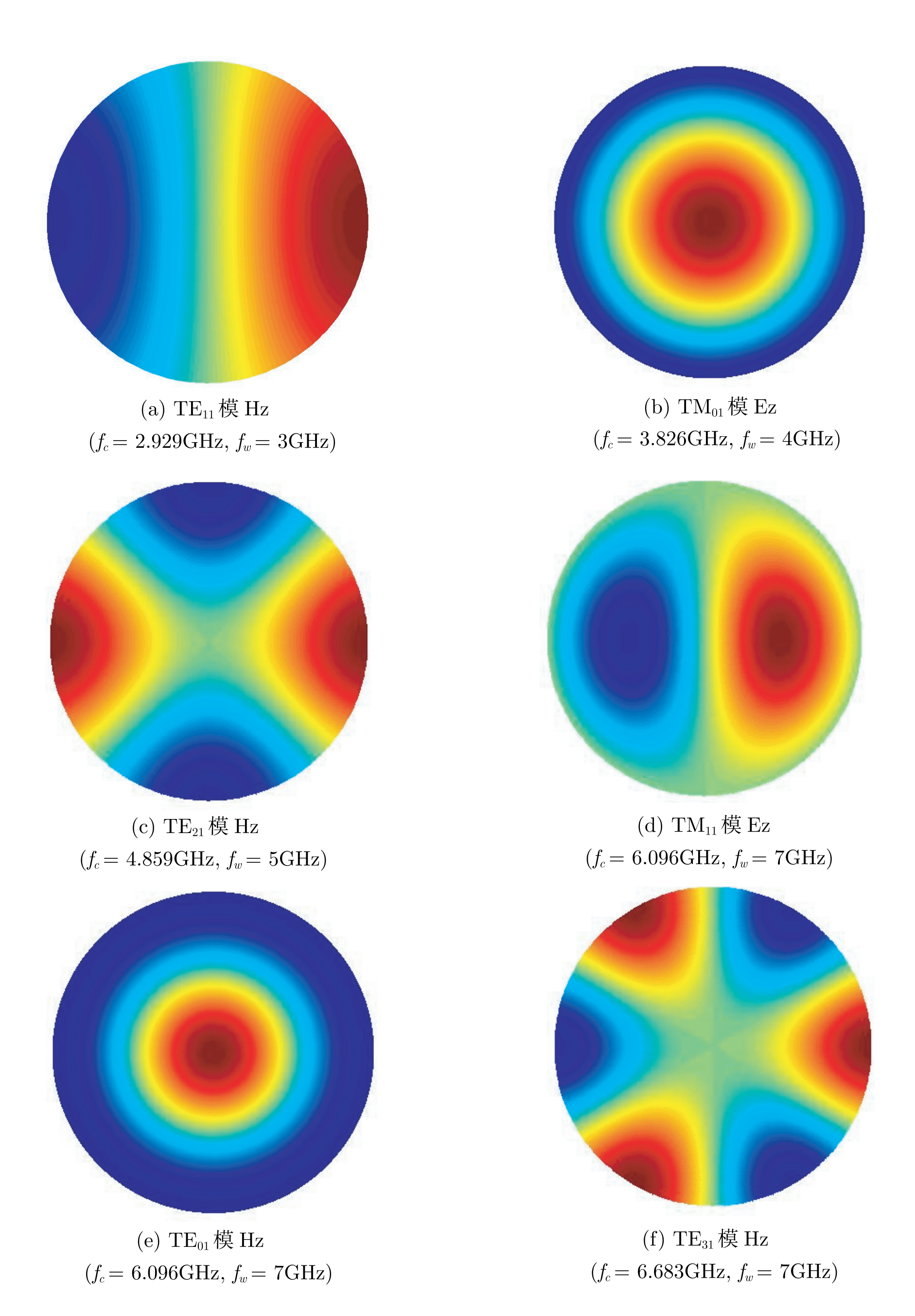
(c) TE_{11} 模 Hz ($f_c = 11.175$GHz, $f_w = 12$GHz)

(d) TE_{21} 模 Hz ($f_c = 14.136$GHz, $f_w = 15$GHz)

(e) TM_{11} 模 Ez ($f_c = 11.175$GHz, $f_w = 12$GHz)

(f) TM_{21} 模 Ez ($f_c = 14.136$GHz, $f_w = 15$GHz)

彩图 2　金属矩形波导几种传播模的横截面场分布 (矩形边长为 1.5cm×3cm)



(a) TE_{11} 模 Hz
($f_c = 2.929$GHz, $f_w = 3$GHz)

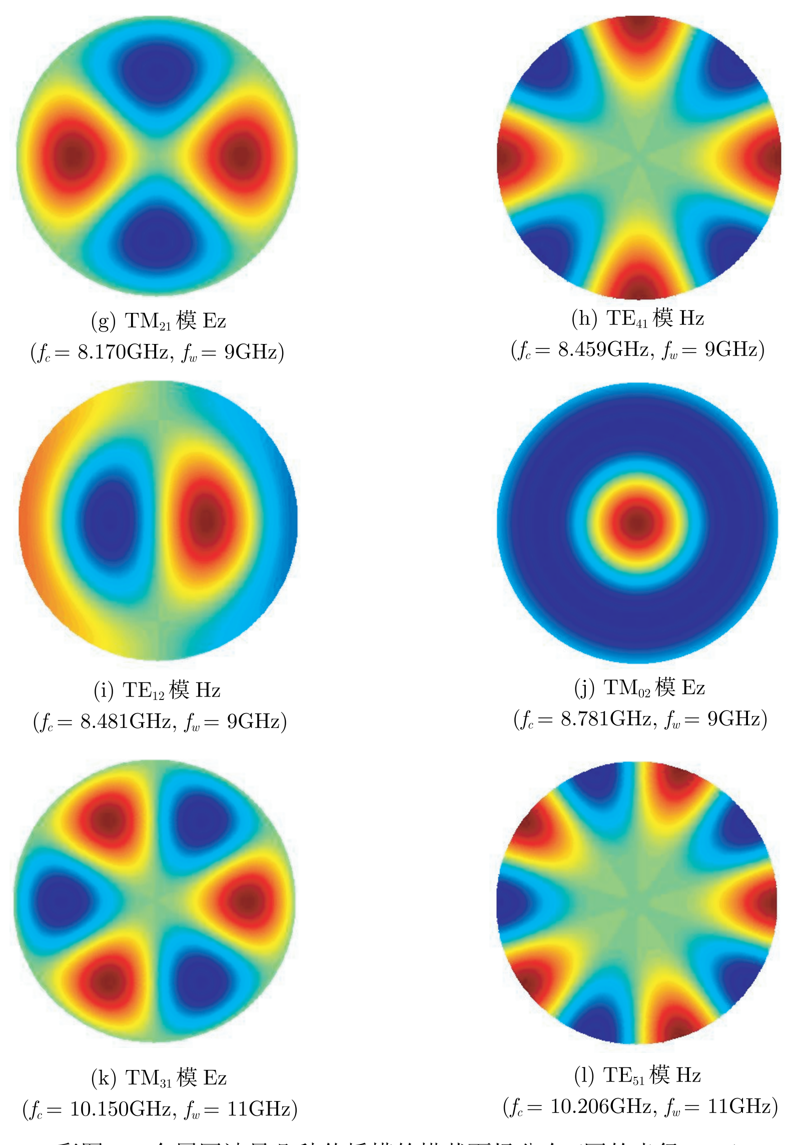
(b) TM_{01} 模 Ez
($f_c = 3.826$GHz, $f_w = 4$GHz)

(c) TE_{21} 模 Hz
($f_c = 4.859$GHz, $f_w = 5$GHz)

(d) TM_{11} 模 Ez
($f_c = 6.096$GHz, $f_w = 7$GHz)

(e) TE_{01} 模 Hz
($f_c = 6.096$GHz, $f_w = 7$GHz)

(f) TE_{31} 模 Hz
($f_c = 6.683$GHz, $f_w = 7$GHz)



(g) TM_{21} 模 Ez
($f_c = 8.170$GHz, $f_w = 9$GHz)

(h) TE_{41} 模 Hz
($f_c = 8.459$GHz, $f_w = 9$GHz)

(i) TE_{12} 模 Hz
($f_c = 8.481$GHz, $f_w = 9$GHz)

(j) TM_{02} 模 Ez
($f_c = 8.781$GHz, $f_w = 9$GHz)

(k) TM_{31} 模 Ez
($f_c = 10.150$GHz, $f_w = 11$GHz)

(l) TE_{51} 模 Hz
($f_c = 10.206$GHz, $f_w = 11$GHz)

彩图 3　金属圆波导几种传播模的横截面场分布 (圆的半径 3cm)